<u>Lección n°2</u>: El álgebra de números complejos generalizados. USFQ, 2022

1. Recordando los números complejos

Sobre $\mathbb{R}^2$, dotado de su suma usual, se define un producto entre pares ordenados de la siguiente manera:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Denotando a los vectores de la base como $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, podemos escribir a cualquier par $z = (x, y)$ de la forma $z = x + iy$. Además, por como se definió el producto, se tiene que $i^2 = -(1, 0) = -1$. Así, el conjunto de números complejos se lo suele definir de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} := \left\{z = x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, i^2 = -1\right\}.$$

Con las operaciones definidas de suma y producto, $\mathbb{C}$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Presentemos ahora algunas propiedades bÃ¡sicas del conjunto (ver [9]). El conjugado de un número complejo $z = x + iy$ viene dado por la expresión

$$\overline{z} = x - iy.$$

El conjugado es un involución de $\mathbb{C}$ en si mismo y además preserva la estructura, es decir, cumple con las siguientes propiedades:

- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$,
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, y
- $\overline{\overline{z}} = z$.

El módulo o magnitud de z se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El módulo es en realidad una norma sobre $\mathbb{C}$ y no es difícil ver que

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, y
- $|zw| = |z||w|$.

El inverso multiplicativo de $z \neq 0$ se puede calcular con la expresión

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Otra cualidad de suma importancia que tienen los números complejos es que tienen una representación polar. Esto es, que a cualquier número z se lo puede escribir como

$$z = |z|e^{i\theta},$$

donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ es el ángulo que forma con el eje real. Esta representación facilita la multiplicación de números complejos pues para $z = |z|e^{i\theta_1}$ y $w = |w|e^{i\theta_2}$, se tiene que

$$zw = |z||w|e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

y mediante inducción, se obtiene la fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Teoría de funciones analíticas

Para hablar sobre anÃ¡lisis necesitamos primero tener en cuenta que topología se define sobre $\mathbb{C}$. A $\mathbb{C}$ usualmente se la suele dotar de la topología inducida por su módulo. A los elementos de la base de la topología se los llama discos y se recuerda que tienen la forma

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\},$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Con esto podemos recordar la diferenciabilidad sobre $\mathbb{C}$.

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es diferenciable en $z \in \Omega$ si el siguiente límite existe

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

donde $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $h + z \in \Omega$. A $f'(z)$ se le conocerá como la derivada de f en z.

Si una función es diferenciable sobre todo $z \in \Omega$, se dirá que es diferenciable en Ω.

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es analítica en $z \in \Omega$ si existe $R > 0$ tal que f es diferenciable sobre el disco abierto $D(z, R)$.

Si una función es analítica en todo punto $z \in \Omega$ entonces se dirá que es analítica sobre Ω. Una ventaja de las funciones analíticas es que se pueden caracterizar a partir de un par de ecuaciones.

Teorema 1.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f(x, y) = f_0(x, y) + i f_1(x, y)$, donde f_0 y f_1 son funciones real valuadas. Entonces, f es analítica sobre Ω si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \partial_x f_0 &= \partial_y f_1, \\ \partial_y f_0 &= -\partial_x f_1, \end{aligned} \tag{1}$$

en Ω. A este sistema de ecuaciones se lo conoce como ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostración. Véase en [9, pg. 11]. ■

Este sistema de ecuaciones motiva la definición del operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\partial_x + i\partial_y\right) \tag{2}$$

y su conjugado

$$\frac{d}{dz} = \overline{\frac{d}{d\bar{z}}} = \frac{1}{2} \left(\partial_x - i\partial_y\right), \tag{3}$$

de manera que caracterizan si una función es analítica y guarda relación con la derivada de una función.

Proposición 1.1. *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en $z \in \Omega$ si y solo si*

$$\frac{d}{d\bar{z}} f(z) = 0 \quad y \quad \frac{d}{dz} f(z) = f'(z).$$

Demostración. Véase en [9, Prop. 2.3.]. ■

Con estas definiciones y resultados se pueden presentar ejemplos necesarios para el desarrollo del curso.

Ejemplo 1. Los polinomios $f(z) = z^n$ son analíticos sobre $\mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se puede comprobar usando la definición. Gracias al Teorema Binomial se tiene que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}h^k - z^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^{n-k}h^k}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}h^{k-1} \\ &= \binom{n}{1} z^{n-1} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Así, es diferenciable en todo $\mathbb{C}$ y por lo tanto analítica.

Ejemplo 2. La función exponencial compleja definida como

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, es analítica sobre $\mathbb{C}$. Además, su derivada es $f'(z) = e^z$. En efecto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x f_0 &= e^x cos(y) = \partial_y f_1, \\ \partial_y f_0 &= -e^x \operatorname{sen}(y) = -\partial_x f_1 \end{aligned}$$

y además,

$$f'(z) = \frac{d}{dz}e^z = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right) e^x e^{iy} = \frac{e^x e^{iy} + e^x e^{iy}}{2} = e^z.$$

Otras funciones analíticas son las series de potencias. Recordemos que una función f es una serie de potencias si tiene la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

donde $z_0, c_k \in \mathbb{C}$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Convergencia de esta serie involucra discos abiertos, cuyo radio R pasará a ser llamado radio de convergencia y guarda relación con los coeficientes c_k. Esto se detalla en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Cauchy-Hadamard). *Dada una serie de potencias* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z - z_0)^k$, *existe* $0 \leq R \leq +\infty$, *dada por*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to+\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}},$$

tal que

1. *Si* $z \in D(z_0, R)$, *la serie converge absolutamente.*
2. *Si* $z \notin D(z_0, R)$, *la serie diverge.*

Cuando $R = +\infty$, la serie converge sobre todo $\mathbb{C}$.

Demostración. Véase en [11, Teo. 3.2.1.]. ∎

Teorema 1.3. *Si* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una función que se puede representar como una serie de potencias sobre* Ω, *entonces* f *es analítica sobre* Ω.

Demostración. Véase en [9, Teo. 2.6]. ∎

2. Números complejos generalizados

Similar a los números complejos, sobre $\mathbb{R}^2$ con su suma usual se definen las siguientes operaciones:

$$(x_0, y_0) \cdot (x_1, y_1) = (x_0x_1 - \alpha y_0y_1\, ,\, x_0y_1 + y_0x_1 - \beta y_0y_1), \tag{4}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son escalares arbitrarios. Tomando $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, se puede escribir a cualquier par ordenado como $z = (x, y) = x + iy$. Consecuencia de como se define el producto, en este caso se tiene que $i^2 = -\alpha - \beta i$. Así, los números complejos generalizados se definen cómo

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \left\{ z = x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R},\, i^2 = -\alpha - \beta i \right\}.$$

Gracias a la conmutatividad del producto en $\mathbb{R}$, se puede deducir que el producto entre estos números es conmutativo también.

Se presentan ahora propiedades análogas a las que se presentaron en los números complejos.

Tomemos $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. El conjugado de un número $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ viene dado por la expresión

$$\overline{z} = x - \beta y - iy,$$

Esta función es también una involución como en el caso complejo, es decir

- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$,
- $\overline{zw} = \overline{z}\, \overline{w}$, y,
- $\overline{\overline{z}} = z$.

La representación matricial estará dada por:

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} x & -\alpha y \\ y & x - \beta y \end{pmatrix} \tag{5}$$

El módulo o magnitud de z en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es de la forma

$$|z|_{\alpha,\beta} = \sqrt{|x^2 - \beta xy + \alpha y^2|}.$$

No es difícil probar en este caso que se cumplen

- $|z|^2_{\alpha,\beta} = |z\overline{z}|$, y,
- $|zw|_{\alpha,\beta} = |z|_{\alpha,\beta}|w|_{\alpha,\beta}$.

Más aún, se puede definir una forma bilineal que induce el módulo similar al producto interno de $\mathbb{C}$ (el mismo de $\mathbb{R}^2$). Esta se la define como

$$\langle z, w \rangle_{\alpha,\beta} = xu - \frac{\beta}{2}(xv + uy) + \alpha yv,$$

de manera que

$$|z|_{\alpha,\beta} = \sqrt{|\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta}|}.$$

Contrario a los números complejos, no todos los elementos de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ tienen inverso multiplicativo. En el caso que si exista el inverso, se lo puede calcular Además, el inverso multiplicativo de $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se puede calcular, de ser posible, mediante la

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta}}.$$

Al conjunto de números no invertibles de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, incluyendo al 0, se lo denotará como $\mathrm{Sing}_{\alpha,\beta}$ descrito como

$$\mathrm{Sing}_{\alpha,\beta} = \{ z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \,:\, |z|_{\alpha,\beta} = 0 \}.$$

Como ejemplo, analicemos la unidad imaginaria de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Ejemplo 3. El módulo de i no es 1 como en el caso complejo. Reemplazando en la definición se obtiene

$$|i|_{\alpha,\beta} = \sqrt{|\alpha|}.$$

De esto, se puede ver que cuando $\alpha = 0$ entonces i no sería invertible. El conjugado en este caso viene a ser

$$\bar{i} = -\beta - i$$

y por lo tanto, el inverso tendría la forma

$$i^{-1} = -\frac{\beta + i}{\alpha},$$

cuando $\alpha \neq 0$.

Se puede notar que cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ se rescata el caso complejo, es decir, $\mathbb{C}_{1,0} = \mathbb{C}$. Del mismo modo, las definiciones del conjugado, módulo e inverso coinciden a las del caso complejo. Otra propiedad que cumple similar al caso de $\mathbb{C}$ es la siguiente:

Proposición 2.1. *$\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Dado que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $\mathbb{C}$ tienen la misma estructura algebraica respecto a la suma, entonces $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un espacio vectorial real. Basta con verificar que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un anillo. Para ello tomemos $z = z_0 + iz_1, w = w_0 + iw_1, v = v_0 + iv_1 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, y notemos que:

- Se cumple la propiedad de clausura, pues

$$zw = z_0w_0 - \alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1) \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}.$$

- La asociatividad también se cumple, pues

$$\begin{aligned} z(wv) &= z_0w_0v_0 - \alpha z_0w_1v_1 - \alpha w_0z_1v_1 - \alpha z_1w_1v_0 + \alpha\beta z_1w_1v_1 \\ &\quad + i(z_0w_0v_1 + z_0w_1v_0 - \beta z_0w_1v_1 \\ &\quad + w_0v_0z_1 - \alpha z_1w_1v_1 - \beta w_0z_1v_1 - \beta z_1w_1v_0 + \beta^2 z_1w_1v_1) \\ &= (z_0w_0 - \alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1))v \\ &= (zw)v. \end{aligned}$$

- Las propiedades distributivas se cumplen. La primera al calcular

$$\begin{aligned} z(w + v) &= (z_0w_0 + -\alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)) \\ &\quad + (z_0v_0 + -\alpha z_1v_1 + i(z_0v_1 + z_1v_0 - \beta z_1v_1)) \\ &= zw + zv, \end{aligned}$$

  y la segunda se sigue directo de la conmutatividad del producto.

Por último, ya que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se sigue que es un álgebra sobre $\mathbb{R}$. ∎

Dado que los valores de α y β pueden ser cualquiera, una pregunta natural que puede surgir es: ¿Existe alguna relación entre distintos $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$? Una respuesta corta es si. Yaglom clasifica esta familia de conjuntos en tres diferentes tipos y serÃ¡ abarcado con mayor profundidad en la siguiente lección.

Referencias

[1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications.* Birkhäuser Boston, 2004.

[2] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time.* Birkhäuser Basel, 2008.

[3] Fjelstad, P. y Gal, S. G. Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 11(1):81-107, 2001.

[4] Harkin A.A., Harkin J.B.: Geometry of generalized complex numbers. Math. Mag. **77**(2), 118-129, 2004.

[5] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions.* Springer International Publishing, 2015.

[6] Morillo, E. Estudio de funciones tipo exponencial y trigonométricas fraccionarias, y sus propiedades asociados al operador de Cauchy-Riemann fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville, sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.

[7] Needham, T. *Visual Complex Analysis.* Clarendon Press, 1998.

[8] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. On holomorphic hypercomplex connections. 23(1):179-207, 2012.

[9] Stein, E. *Complex analysis.* Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.

[10] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.

[11] Wegert, E. *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits.* Birkhäuser, Basel, 2012.

[12] Yaglom, I. Three types of complex numbers. En *Complex Numbers in Geometry*, págs. 1-25. Elsevier, 1968.