

Lección n°3: Más propiedades del álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

USFQ, 2022

1. Clasificación

A $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se la puede clasificar en clases isomorfas dependiendo de los valores de α y β . Esto lo hace I. Yaglom en [13] y se detalla con el siguiente resultado.

Teorema 1.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle.$$

Demostración. Se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ z_0 + iz_1 &\longmapsto z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle, \end{aligned}$$

y se debe probar que es un homomorfismo biyectivo. Sean $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cualesquiera, tales que $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$. Probar que es un homomorfismo es directo pues

$$\begin{aligned} T(z + w) &= (z_1 + w_1)X + (z_0 + w_0) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle) + (w_1 X + w_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle) \\ &= T(z) + T(w), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(zw) &= (z_0 w_1 + z_1 w_0 - \beta z_1 w_1)X + (z_0 w_0 - \alpha z_1 w_1) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (z_0 w_1 + z_1 w_0)X + z_0 w_0 - z_1 w_1(\beta X + \alpha) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (z_0 w_1 + z_1 w_0)X + z_0 w_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= T(z)T(w). \end{aligned}$$

Ahora, para probar biyectividad primero probemos que T es inyectiva. Para esto se busca probar que $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Sea $z \in \text{Ker}(T)$, entonces

$$T(z) = z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle,$$

en consecuencia, $z_1 X + z_0 \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$z_1 X + z_0 = k(X^2 + \beta X + \alpha).$$

Puesto que el coeficiente de X^2 del lado izquierdo de la igualdad es 0, entonces $k = 0$. En consecuencia, al igualar los coeficientes de los demás términos se sigue que $z_0 = z_1 = 0$, y por tanto $z = 0$.

Para mostrar sobreyectividad, primero se debe notar que cualquier elemento de $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es de la forma $p(X) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, donde $p(X)$ es de grado menor que 2. La razón de esto es ya que si $p(X) = aX^2 + bX + c$, se puede escribir

$$\begin{aligned} p(X) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle &= a(X^2 + \beta X + \alpha) + (b - \alpha a - a\beta)X + c + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (b - \alpha a - a\beta)X + c + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle, \end{aligned}$$

Se puede razonar de manera similar para grados mayores a 2. De esta forma, para cualquier $z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \in \mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, tiene como preimagen el número $z = z_0 + iz_1$, probando la sobreyectividad. De este modo, se concluye que T es un homomorfismo biyectivo. ■

Corolario 1.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ es un cuerpo si y solo si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha < 0$.

Demostración. Se sabe que $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es un cuerpo si y solo si $X^2 + \beta X + \alpha$ es irreducible sobre \mathbb{R} . Esto sucede cuando su discriminante $\Delta < 0$, por lo tanto, $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es un cuerpo si y solo si $\Delta < 0$. Así $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ es un cuerpo si y solo si $\Delta < 0$ gracias al isomorfismo del teorema anterior. ■

El signo de Δ es el que usa Yaglom para clasificar a $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ en 3 tipos de números.

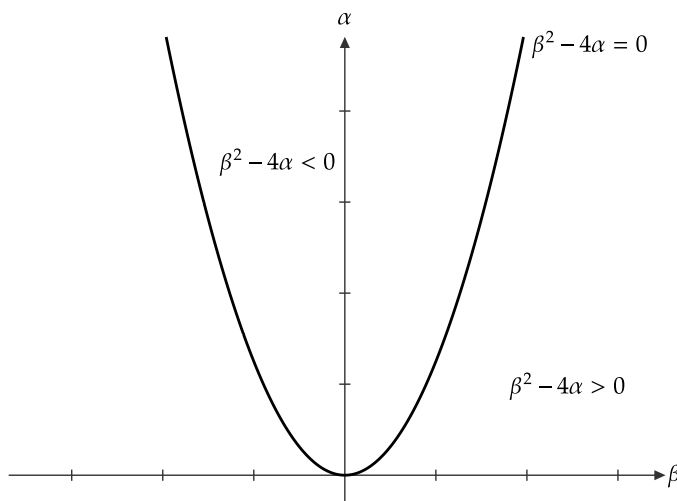


Figura 1: Regiones en las cuales el signo del discriminante Δ cambia.

■ **Números elípticos**

Para los valores de α y β tales que $\Delta < 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ como el álgebra de *números elípticos*. El nombre de esta álgebra viene dado por la forma de las curvas unitarias. Si se grafica en \mathbb{R}^2 el conjunto

$$S_{\alpha, \beta} := \{z \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta} : |z|_{\alpha, \beta} = 1\},$$

se obtienen elipses en el plano como en la siguiente figura 2.

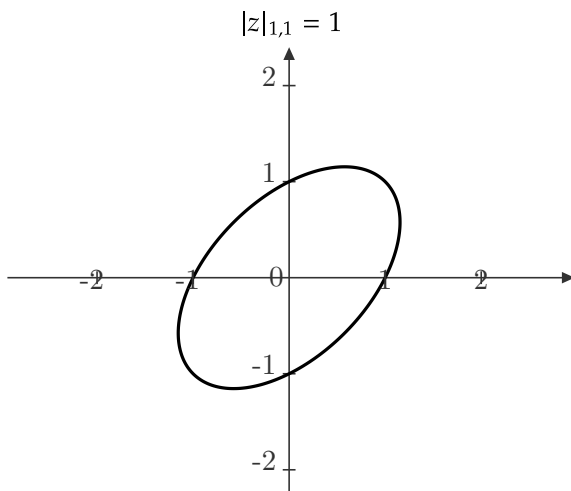


Figura 2: Elipse rotada correspondiente a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

Nótese que \mathbb{C} es un caso particular de esta álgebra pues si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, entonces $\Delta = -4 < 0$. Más aún, se tiene un isomorfismo entre $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ y \mathbb{C} .

Proposición 1.1. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta < 0$, se tiene

$$\mathbb{C}_{\alpha, \beta} \cong \mathbb{C}.$$

Demostración. Se denota por ϵ a la unidad imaginaria de \mathbb{C} , es decir $\epsilon^2 = -1$. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \beta} : \mathbb{C}_{\alpha, \beta} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b\right). \end{aligned}$$

Hay que probar que es un isomorfismo. Sean $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$, y probemos que $\varphi_{\alpha,\beta}$ es un homomorfismo. Para la suma se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}(z+w) &= \left(z_0 + w_0 - \frac{\beta}{2}z_1 - \frac{\beta}{2}w_1\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1 + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1\right) \\ &= \left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) + \epsilon \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1 + \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) + \epsilon \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1 \\ &= \varphi_{\alpha,\beta}(z) + \varphi_{\alpha,\beta}(w).\end{aligned}$$

y para el producto

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}(zw) &= \left(z_0w_0 - \alpha z_1w_1 - \frac{\beta}{2}(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)\right) \\ &= \left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) - \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2 z_1w_1 \\ &\quad + \epsilon \left[\left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1\right) + \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1\right)\right] \\ &= \varphi_{\alpha,\beta}(z) \varphi_{\alpha,\beta}(w).\end{aligned}$$

Lo que muestra que $\varphi_{\alpha,\beta}$ es un homomorfismo.

Ahora, se prueba primero inyectividad tomando $z \in \text{Ker}(\varphi_{\alpha,\beta}^-)$ y notando que

$$\left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1\right) = 0.$$

Igualando parte real e imaginaria, se sigue que $z_1 = 0$ y, en consecuencia, $z_0 = 0$. Por lo tanto, $z = 0$. Al haber tomado z de manera arbitraria entonces $\text{Ker}(\varphi_{\alpha,\beta}) = \{0\}$, lo que muestra inyectividad.

Para mostrar sobreyectividad, tomemos $w = w_0 + \epsilon w_1 \in \mathbb{C}$ y definamos

$$z = \left(w_0 + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}w_1\right) + i \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}w_1\right).$$

Es claro que $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y además

$$\varphi_{\alpha,\beta}(z) = w.$$

Por lo tanto, $\varphi_{\alpha,\beta}$ es sobreyectiva. Al ser un homomorfismo biyectivo, se tiene el isomorfismo. ■

Corolario 1.2. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta < 0$, $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \{0\}$.

Demostración. Puesto que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un cuerpo cuando $\Delta < 0$, entonces no tiene divisores de cero. En consecuencia, $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \{0\}$. ■

En general, el módulo $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ no es una norma ya que puede fallar la desigualdad triangular y podrá anularse para números distintos de cero. Sin embargo, en esta clase de números si se logra cumplir estas dos propiedades, que se muestra en el siguiente resultado.

Lema 1.1. El módulo $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ describe una norma sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ cuando $\Delta < 0$.

Demostración. El resultado se sigue al notar que la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$ es en realidad un producto interno. Las propiedades de bilinealidad y simetría se siguen de la conmutatividad de \mathbb{R} . Además, como $\Delta < 0$, se tiene que para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, $\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0$. Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$ es, en efecto, un producto interno sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, y dado que

$$|z|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta}},$$

entonces $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ define una norma en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Más aún, al no existir divisores de cero entonces, es una norma. ■

Observación. La hipótesis de $\Delta < 0$ es necesaria ya que en este caso se asegura que $\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Si $\Delta \geq 0$, esta propiedad no se puede asegurar para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Esto es importante pues se tiene desigualdad triangular directamente cuando la forma bilineal es definida positiva.

■ **Números hiperbólicos**

Para los valores de α y β tales que $\Delta > 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como el álgebra de *números hiperbólicos*. El nombre viene dado por la forma de las curvas unitarias ya que al graficar $S_{\alpha,\beta}$ en el plano se obtienen hipérbolas (ver figura 3).

El caso particular cuando $\alpha = -1$ y $\beta = 0$, $\mathbb{C}_{-1,0}$ se conoce como *números dobles* o *split-complex*. Su importancia yace en la física relativista y se lo puede encontrar en [13]. Similar a los números elípticos, $\mathbb{C}_{-1,0}$ se relaciona con cualquier $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ en este caso.

Proposición 1.2. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta > 0$, se tiene*

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{-1,0}.$$

Demostración. Se denota ahora como ϵ a la unidad imaginaria de $\mathbb{C}_{-1,0}$, es decir, $\epsilon^2 = 1$. En este caso, se define la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\beta} : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{C}_{-1,0} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b \right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}b \right). \end{aligned}$$

Mostrar que esta función es un isomorfismo es análoga a la demostración de la Proposición 1.1. ■

Contrario a números elípticos, existen divisores de cero, donde se expone su forma en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta > 0$.*

1. Si $\alpha \neq 0$, entonces $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \left\{ z = x + iy : y = \frac{\beta x \pm \sqrt{\Delta}|x|}{2\alpha} \right\}$.
2. Si $\alpha = 0$, entonces $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \left\{ z = x + iy : x = 0 \text{ ó } y = \frac{x}{\beta} \right\}$.

Demostración. Sea $z = x + iy \in \text{Sing}_{\alpha,\beta}$. Así,

$$|z|_{\alpha,\beta}^2 = |x^2 - \beta xy + \alpha y^2| = 0. \tag{1}$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces se tiene la ecuación

$$\alpha y^2 - \beta xy + x^2 = 0.$$

El resultado se consigue al despejar y dejándola en función de x :

$$y = \frac{\beta x \pm \sqrt{\beta^2 x^2 - 4\alpha x^2}}{2\alpha} = \frac{\beta x \pm \sqrt{\Delta}|x|}{2\alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces la ecuación (1) se convierte en

$$\begin{aligned} x^2 - \beta xy &= 0 \\ x(x - \beta y) &= 0, \end{aligned}$$

la cual se cumple cuando $x = 0$ ó $y = \frac{x}{\beta}$. ■

Al tener divisores de cero, se sigue que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no es un cuerpo.

- **Números parabólicos** Para los valores de α y β tales que $\Delta = 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como el álgebra de *números parabólicos*. El nombre de esta álgebra viene dado por la forma de las curvas unitarias. Si se grafica en el plano el conjunto $S_{\alpha,\beta}$ se obtienen dos parábolas degeneradas (ver figura 4).

El caso particular cuando $\alpha = \beta = 0$, $\mathbb{C}_{0,0}$ se conoce como *números duales*. Similar a los anteriores casos, $\mathbb{C}_{0,0}$ se relaciona con cualquier $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ de este caso.

Proposición 1.4. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta = 0$, se tiene*

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{0,0}.$$

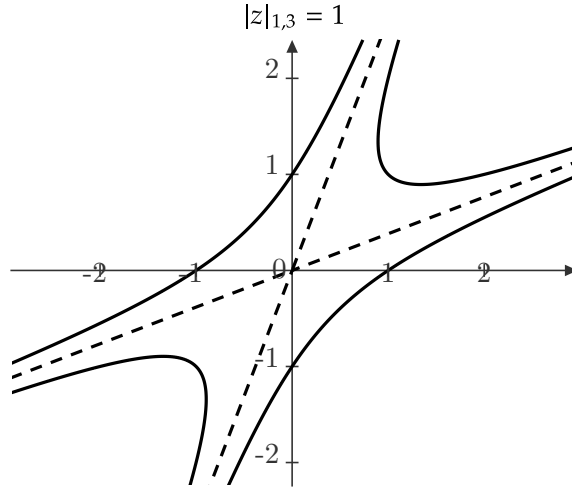


Figura 3: Hipérbolas rotadas correspondientes a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 3$. Las rectas entrecortadas representan el conjunto $\text{Sing}_{1,3}$.

Demostración. Se denota por ϵ a la unidad imaginaria en $\mathbb{C}_{0,0}$, es decir, $\epsilon^2 = 0$. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\beta}^0 : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{C}_{0,0} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b \right) + \epsilon b. \end{aligned}$$

Mostrar que esta función es un isomorfismo es análogo a la demostración de la Proposición 1.1. ■

Nuevamente, existen divisores de cero, cuya forma se expone en la siguiente proposición.

Proposición 1.5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta = 0$. Entonces

$$\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \left\{ z = x + iy : x = \frac{\beta}{2}y \right\}.$$

Demostración. Razonando de manera análoga a la demostración de la Proposición 1.3 y ya que $\beta^2 = 4\alpha$, se tiene que $z = x + iy \in \text{Sing}_{\alpha,\beta}$ es equivalente a tener la ecuación

$$x^2 - \beta xy + \frac{\beta^2}{4}y^2 = \left(x - \frac{\beta}{2}y \right)^2 = 0.$$

Se sigue directamente que $x = \frac{\beta}{2}y$, lo que muestra la proposición. ■

Consecuencia de esta proposición, se sigue que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no será un cuerpo en el caso parabólico.

Presentemos ahora un número bastante interesante en el caso de los números parabólicos.

Ejemplo 1. Considere $\beta + 2i$ y nótese que

$$(\beta + 2i)^2 = \beta^2 - 4\alpha = \Delta.$$

Es decir, en el caso parabólico,

$$(\beta + 2i)^2 = 0,$$

lo que implica que $\beta + 2i \in \text{Sing}_{\alpha,\beta}$. En los casos elíptico e hiperbólico, este número si es invertible y su inverso es $\frac{\beta+2i}{\Delta}$.

La importancia de este número es que aparece como constante en resultados análogos a los clásicos de números complejos. Esto hace que en ocasiones se tenga que excluir al caso parabólico, o resulta en resultados triviales.

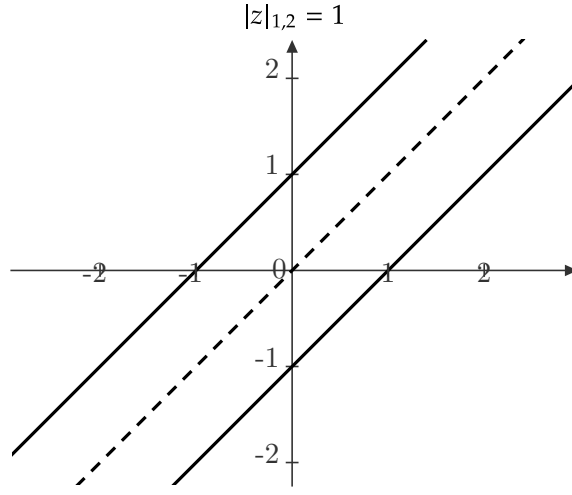


Figura 4: Parábolas degeneradas rotadas correspondientes a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. La recta entrecortadas representan el conjunto $\text{Sing}_{1,2}$.

2. Trigonometría

Ya se mencionó la importancia de tener una representación en forma polar en números complejos. Esto se buscó generalizar para $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, de manera que se tengan propiedades similares al caso complejo. G. Fjelstad las describe en [3] pero se detallan las demostraciones aquí.

Por simplicidad se escribirá $D_{\alpha,\beta} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ si $\Delta \neq 0$.

Se define una función análoga a la exponencial compleja, para $\theta \in \mathbb{R}$, dada por la siguiente expresión

$$e^{i\theta} = \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + i\text{sen}_{\alpha,\beta}(\theta), \quad (2)$$

donde las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}$ y $\cos_{\alpha,\beta}$ están definidas a partir del seno y coseno reales:

$$\text{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \text{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta) & \text{si } \Delta < 0, \\ \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \text{senh}(D_{\alpha,\beta}\theta) & \text{si } \Delta > 0, \\ \theta & \text{si } \Delta = 0, \end{cases} \quad (3)$$

y

$$\cos_{\alpha,\beta}(\theta) = \begin{cases} \cos(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \text{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta) & \text{si } \Delta < 0, \\ \cosh(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \text{senh}(D_{\alpha,\beta}\theta) & \text{si } \Delta > 0, \\ 1 + \frac{\beta}{2}\theta & \text{si } \Delta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}$ y $\cos_{\alpha,\beta}$ se conocen como las funciones seno y coseno de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, respectivamente.

Observación. Las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}$ y $\cos_{\alpha,\beta}$ son periódicas, de periodo para $\frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}}$ cuando $\Delta < 0$. Es decir, que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$

$$\text{sen}_{\alpha,\beta}\left(\theta + \frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}}\right) = \text{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \quad \text{y} \quad \cos_{\alpha,\beta}\left(\theta + \frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}}\right) = \cos_{\alpha,\beta}(\theta).$$

Además, $\text{sen}_{1,0}$ es la función seno real y $\cos_{1,0}$ la función coseno real.

Resulta que la función $e^{i\theta}$ es una parametrización de las curvas unitarias de cada $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y por tanto se puede caracterizar la curva unitaria como en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{ ke^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}, k \in K_{\alpha,\beta} \right\},$$

donde $K_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es tal que

- $K_{\alpha,\beta} = \{1\}$, si $\Delta < 0$.
- $K_{\alpha,\beta} = \left\{1, -1, \frac{\beta+2i}{2D_{\alpha,\beta}}, -\frac{\beta+2i}{2D_{\alpha,\beta}}\right\}$, si $\Delta > 0$.
- $K_{\alpha,\beta} = \{1, -1\}$, si $\Delta = 0$.

Demostración. Se encuentra con detalle en [3]. ■

Los elementos de $K_{\alpha,\beta}$ que aparecen en los casos $\Delta \geq 0$ especifican en cual hipérbola o parábola se encuentran. A la dupla $\theta_k = (\theta, k)$ se lo conoce como el ángulo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y además la representación polar de este número viene dado por la expresión

$$z = |z|_{\alpha,\beta} e^{i\theta_k} = |z|_{\alpha,\beta} k e^{i\theta}.$$

Ahora, respecto a las funciones $\sin_{\alpha,\beta}$, $\cos_{\alpha,\beta}$ y $e^{i\theta}$, se presentan propiedades trigonométricas que generalizan a las conocidas sobre \mathbb{R} . Por simplicidad en los cálculos, usaremos que $\theta_k = (\theta, 1)$, pero los resultados se cumplen para cualquier $k \in K_{\alpha,\beta}$.

Lema 2.1. Para todo $\alpha, \beta, \theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes identidades:

1. $\sin_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) = \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1)$.
2. $\cos_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) = \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \alpha \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1)$.
3. $e^{i(\theta_0 + \theta_1)} = e^{i\theta_0} e^{i\theta_1}$.

Demostración. Las fórmulas se van a demostrar para la función $\sin_{\alpha,\beta}$ mientras que las de $\cos_{\alpha,\beta}$ se las puede mostrar siguiendo un razonamiento similar.

Las primeras dos identidades se derivan de la definición (3) y las identidades trigonométricas reales para la suma de ángulos. Para $\Delta < 0$,

$$\begin{aligned} \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) &= \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} (\sin(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \cos(D_{\alpha,\beta}\theta_1) + \cos(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_1)) \\ &= \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \left(\cos(D_{\alpha,\beta}\theta_1) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_1) \right) \\ &\quad + \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \left(\cos(D_{\alpha,\beta}\theta_0) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \right) - \frac{\beta}{D_{\alpha,\beta}^2} \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \sin(D_{\alpha,\beta}\theta_1) \\ &= \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1). \end{aligned}$$

El caso $\Delta > 0$ se obtiene razonando de la misma manera pero con el seno y coseno hiperbólicos.

Para $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned} \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) &= \theta_0 + \theta_1 \\ &= \theta_0 + \frac{\beta}{2}\theta_0\theta_1 + \theta_1 + \frac{\beta}{2}\theta_0\theta_1 - \beta\theta_0\theta_1 \\ &= \theta_0 \left(1 + \frac{\beta}{2}\theta_1 \right) + \left(1 + \frac{\beta}{2}\theta_0 \right) \theta_1 - \beta\theta_0\theta_1 \\ &= \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1). \end{aligned}$$

Por último, la tercera identidad se deduce directamente de las primeras dos:

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_0 + \theta_1)} &= \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) + i \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) \\ &= \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \alpha \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1) \\ &\quad + i (\sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0) \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1)) \\ &= (\cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) + i \sin_{\alpha,\beta}(\theta_0)) (\cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + i \sin_{\alpha,\beta}(\theta_1)) \\ &= e^{i\theta_0} e^{i\theta_1}. \end{aligned}$$

Proposición 2.2. Para todo $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$, se cumple la identidad

$$(\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \sin_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\sin_{\alpha,\beta}(\theta))^2 = 1. \quad (5)$$

Demostración. El resultado se obtiene al desarrollar la parte izquierda de (5) reemplazando las definiciones (3) y (4). Para el caso $\Delta < 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} (\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{4\alpha - \beta^2}{4D_{\alpha,\beta}^2} \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\ &= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{-\Delta}{|\Delta|} \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\ &= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Similarmente para el caso $\Delta > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} (\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= \cosh^2(D_{\alpha,\beta}\theta) - \operatorname{senh}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Cuando $\Delta = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} (\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= 1 + \frac{\Delta}{4}\theta^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es decir, la identidad d(5) se cumple para todos los casos. ■

Lema 2.2. Para todo $\alpha, \beta, \theta, \lambda \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) = \lambda \left[\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right], \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) = \lambda \left[\frac{\beta}{2} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right], \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\lambda\theta} = \lambda \frac{\beta + 2i}{2} e^{i\lambda\theta}. \quad (8)$$

Demostración. Las expresiones (6) y (7) se obtienen directamente de las derivadas de las funciones trigonométricas ordinarias e hiperbólicas, con un poco de manipulación algebraica para rescatar las expresiones en la derecha. La expresión (8) se obtiene de (6) y (7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} e^{i\lambda\theta} &= \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \frac{d}{d\theta} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \\ &= \lambda \left[\frac{\beta}{2} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \left(\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right) \right] \\ &= \left(\frac{\beta}{2} + i \right) (\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta)) \\ &= \lambda \frac{\beta + 2i}{2} e^{i\lambda\theta}. \end{aligned}$$

Cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, es decir el caso complejo, todas las definiciones, identidades y propiedades presentadas en esta sección coinciden con las ya conocidas de las funciones trigonométricas reales. ■

3. Análisis sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

Siguiendo la línea de generalizar las nociones vistas en números complejos, se procede ahora a generalizar la teoría de funciones analíticas sobre \mathbb{C} .

Respecto a la topología, tradicionalmente se dota a las álgebras hipercomplejas de la topología usual del espacio \mathbb{R}^n correspondiente. Es por esto que la convergencia sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es la misma convergencia que en \mathbb{C} o \mathbb{R}^2 . Cuando $\Delta < 0$, la convergencia se puede definir a partir de $|z_n - z^*|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow +\infty$. Cuando $\Delta \geq 0$ se puede inducir una topología a partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$, como se lo hizo en [3].

Teniendo en cuenta la topología, se puede presentar primero la noción de diferenciabilidad sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Definición. Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función y $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se dice que f es analítica en z si el límite

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha,\beta}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (9)$$

existe y es independiente de cómo h tiende a 0.

Análogo al caso complejo, se dirá que f es analítica sobre Ω si es analítica en todo $z \in \Omega$. Del mismo modo, se puede caracterizar una función analítica con un sistema de ecuaciones. Este sistema se genera de las condiciones de Scheffers que están en el contexto más general del análisis hipercomplejo (ver [9, 11]). En particular, se deduce la caracterización para números complejos generalizados.

Teorema 3.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función tal que se puede escribir como $f = f_0 + if_1$, donde f_0 y f_1 son funciones real valuadas con derivadas parciales continuas. Se dirá que f es analítica si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned} \partial_y f_0 &= -\alpha \partial_x f_1, \\ \partial_x f_0 &= \beta \partial_x f_1 + \partial_y f_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

Estas ecuaciones inducen un nuevo operador que se llamará el operador de Cauchy-Riemann generalizado, definido de la siguiente manera:

$$\partial_{\bar{z}} = \partial_y - i\partial_x, \quad (11)$$

de manera que una función será analítica si y solo si $\partial_{\bar{z}}f = 0$.

El operador conjugado se escribe como

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} = \partial_y + \beta \partial_x + i\partial_x,$$

y este también guarda una relación con la derivada de una función $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ -valuada.

Lema 3.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función analítica sobre Ω . Entonces*

$$\bar{\partial}_{\bar{z}}f(z) = (\beta + 2i)f'(z),$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Es un caso particular de [11, Cor. 3.9]. ■

Como en el caso complejo presentemos primero un ejemplo de una función analítica en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Ejemplo 2. Consideremos el polinomio $f(z) = z$, o equivalentemente $f(x, y) = x + iy$. Se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas, en efecto,

$$\begin{aligned} \partial_y f_0 &= 0 = -\alpha \partial_x f_1, \\ \partial_x f_0 &= 1 = \beta \partial_x f_1 + \partial_y f_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio de grado 1 es analítico en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, para cualquier α y β .

Observación. La razón de tomar el operador de Cauchy-Riemann generalizado de esta manera y no como el operador $\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ del caso complejo se da por la caracterización de funciones analíticas. Para valores específicos de α y β , funciones analíticas no siempre se anulan con el operador $\frac{d}{d\bar{z}}$. Por ejemplo, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ y $f(z) = z$ se tiene que

$$\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)f = \frac{1 - \alpha - \beta i}{2},$$

cuya expresión no siempre se anula para algunos valores de α y β , pero por el Ejemplo 2 sabemos que es analítica. En el caso complejo se cumple pues

$$\partial_{\bar{z}} = -i \frac{d}{d\bar{z}},$$

es decir, $\partial_{\bar{z}}$ es una rotación de $\frac{d}{d\bar{z}}$, lo cual va a preservar la propiedad de que una función sea analítica.

En [2, Sec. C.7.1] se define un operador de Cauchy-Riemann sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como

$$\partial_{\bar{z}}^* = \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2\sqrt{\Delta}} \partial_x - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_y,$$

donde $\sqrt{\Delta} = \beta + 2i$. Primero se puede notar que este operador está definido siempre que $\Delta \neq 0$, es decir solo para números elípticos e hiperbólicos, mientras que $\partial_{\bar{z}}$ se define también para números parabólicos. Más aún, es un reescalamiento de $\partial_{\bar{z}}$

$$\partial_{\bar{z}}^* = \frac{\beta + 2i}{\Delta} \partial_{\bar{z}}.$$

Una discusión más profunda entre estos dos operadores se lo hace en [11].

Otra función que se vió en el caso complejo fue la exponencial compleja. Sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se define también una función exponencial, cumpliendo propiedades análogas a su contraparte compleja. El siguiente resultado la define de manera muy familiar.

Teorema 3.2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, el límite

$$e^z := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

existe y verifica

$$e^z = e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} = e^{x - \frac{\beta}{2}y} (\cos_{\alpha,\beta}(y) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(y)). \quad (12)$$

Demostración. La demostración se enfocará para los casos $\Delta \geq 0$ pues cuando $\Delta < 0$ se puede demostrar como en el caso complejo, ver [7].

Para $\Delta > 0$, tomando $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se definen

$$z_0 = x + \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2}y, \quad z_1 = x - \frac{\sqrt{\Delta} + \beta}{2}y$$

y

$$F_0 = \frac{\sqrt{\Delta} + (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}}, \quad F_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}},$$

de manera que se puede escribir

$$z = z_0 F_0 + z_1 F_1,$$

y esto números cumplen

$$F_0 + F_1 = 1, \quad F_1 F_2 = 0 \quad \text{y} \quad F_i^2 = F_i,$$

para $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{z_0}{n}\right) F_0 + \left(1 + \frac{z_1}{n}\right) F_1\right]^n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, del Teorema binomial y de las propiedades de F_1 y F_2 , esta expresión se reduce a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z_0}{n}\right)^n F_0 + \left(1 + \frac{z_1}{n}\right)^n F_1.$$

Tomando $n \rightarrow +\infty$ en la igualdad anterior, y de la definición de la función exponencial real, se obtiene

$$\begin{aligned} e^z &= e^{z_0} F_0 + e^{z_1} F_1 \\ &= e^{x + \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2}y} \left(\frac{\sqrt{\Delta} + (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}}\right) + e^{x - \frac{\sqrt{\Delta} + \beta}{2}y} \left(\frac{\sqrt{\Delta} - (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}}\right) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} \left(\frac{e^{D_{\alpha,\beta}y} + e^{-D_{\alpha,\beta}y}}{2} + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \frac{e^{D_{\alpha,\beta}y} - e^{-D_{\alpha,\beta}y}}{2} + i \frac{1}{D} \frac{e^{D_{\alpha,\beta}y} - e^{-D_{\alpha,\beta}y}}{2}\right) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} (\cos_{\alpha,\beta}(y) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(y)) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy}. \end{aligned}$$

Similarmente, para $\Delta = 0$, se definen

$$z_2 = x - \frac{\beta}{2}y, \quad z_3 = y \quad \text{y} \quad E = \frac{\beta}{2} + i,$$

de manera que se pueda escribir z como

$$z = x + iy = z_2 + Ez_3.$$

Así, $E^2 = 0$ y en consecuencia, por el teorema binomial

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{z_2 + Ez_3}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{z_2}{n}\right)^n + Ez_3 \left(1 + \frac{z_2}{n}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \rightarrow +\infty$ en la expresión anterior

$$\begin{aligned} e^z &= e^{z_2} (1 + Ez_3) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} \left(1 + \frac{\beta}{2}y + iy\right) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} (\cos_{\alpha,\beta}(y) + i\text{sen}_{\alpha,\beta}(y)) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy}, \end{aligned}$$

lo que concluye esta demostración. ■

En el caso compleja esta función coincide con la exponencial del caso complejo cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Presentemos ahora propiedades que se esperarían que una función exponencial cumpla.

Corolario 3.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se tiene

$$e^{z+w} = e^z e^w. \quad (13)$$

Demostración. Sean $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$ números complejos generalizados. Del Lema 2.1, el resultado se sigue directamente:

$$e^{z+w} = e^{z_0 - \frac{\beta}{2}z_1} e^{iz_1} e^{w_0 - \frac{\beta}{2}w_1} e^{iw_1} = e^z e^w. \quad \blacksquare$$

Lema 3.2. Para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se tiene

$$\overline{\partial_z} e^z = (\beta + 2i)e^z.$$

Demostración. Aplicando $\overline{\partial_z}$ a la ecuación (12) se calcula directamente

$$\begin{aligned} \overline{\partial_z} e^z &= (\partial_y + \beta\partial_x + i\partial_x) e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\ &= -\frac{\beta}{2} e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} + \frac{\beta + 2i}{2} e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} + \beta e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} + i e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\ &= \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta + 2i}{2} + i\right) e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\ &= (\beta + 2i)e^z. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Por último, presentamos un resultado análogo al del Teorema de Cauchy-Hadamard pero para estudiar el módulo de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ de una serie de potencias. Para ello, definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} B_+(a, R) &= \{z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} : |z - a|_{\alpha,\beta} < R \text{ y } \langle z - a, z - a \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0\}, \\ B_+^c(a, R) &= \{z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} : |z - a|_{\alpha,\beta} \geq R \text{ y } \langle z - a, z - a \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.3. Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - a)^k$, donde $z, a \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $c_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $0 < R \leq +\infty$ dada por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}},$$

tal que

1. Si $z \in B_+(a, R)$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \right|_{\alpha, \beta} < +\infty.$$

2. Si $z \in B_+^c(a, R)$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \right|_{\alpha, \beta} = +\infty.$$

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos de la demostración del Teorema de Cauchy-Hadamard (radio de convergencia) que se puede encontrar en [10]. Lo que nos permite recrear esta demostración es la condición

$$\langle z-a, z-a \rangle_{\alpha, \beta} \geq 0$$

en $B_+(a, R)$ y $B_+^c(a, R)$, pues gracias a esto, tendremos que el módulo cumple la desigualdad triangular. ■

Habiendo ya descrito una teoría sólida de funciones analíticas sobre $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, se busca dar un siguiente paso y pasar estos resultados a un contexto fraccionario. Actualmente, esta es una línea de investigación con bastante acogida; el tomar un álgebra hipercompleja con noción de funciones analíticas y generalizarlo a funciones analíticas fraccionarias reemplazando las derivadas parciales por derivadas fraccionarias en algún sentido. Esto ya se ha hecho sobre otras álgebras como \mathbb{C} , $\mathcal{C}\ell_n$ y $\mathbb{B}\mathbb{C}$. Para poder entrar en detalle sobre esto, primero debemos conocer sobre el cálculo fraccionario y cómo funcionan estas derivadas fraccionarias en la siguiente lección.

Referencias

- [1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*. Birkhäuser Boston, 2004.
- [2] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time*. Birkhäuser Basel, 2008.
- [3] Fjelstad, P. y Gal, S. G. Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11(1):81-107, 2001.
- [4] Harkin A.A., Harkin J.B.: Geometry of generalized complex numbers. *Math. Mag.* **77**(2), 118-129, 2004.
- [5] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions*. Springer International Publishing, 2015.
- [6] Morillo, E. Estudio de funciones tipo exponencial y trigonométricas fraccionarias, y sus propiedades asociados al operador de Cauchy-Riemann fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville, sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.
- [7] Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 1998.
- [8] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. On holomorphic hypercomplex connections. 23(1):179-207, 2012.
- [9] Scheffers, G. *Sur la généralisation des fonctions analytiques*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 116:1114-1117, 1893.
- [10] Stein, E. *Complex analysis*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.
- [11] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.
- [12] Wegert, E. *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*. Birkhäuser, Basel, 2012.
- [13] Yaglom, I. Three types of complex numbers. En *Complex Numbers in Geometry*, págs. 1-25. Elsevier, 1968.