Lección n°4: Cálculo fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville.

USFQ, 2022

El cálculo fraccionario tiene su origen en conversaciones mantenidas entre Leibniz y L'Hôpital en 1695. Años antes, el cálculo infiniesimal ya fue inventado y la noción de derivada de orden entero existía, por lo que Leibniz preguntó: ¿Puede el concepto de derivada de orden entero ser extendido a órdenes no enteros? a lo que L'Hôpital respondió con otra pregunta: ¿Puede ese orden ser 1/2?

Estas preguntas llamaron la atención de grandes pensadores de la época. Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Louville, Riemann, entre otros, abordaron el problema e hicieron aportaciones significativas en cuanto a la definición de derivadas e integrales fraccionarias. Siendo Lacroix el primero en dar una fórlmula para derivar polinomios de la forma $(x-a)^k$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Con las bases cimentadas, se empezó a desarrollar teoría como propiedades de los operadores fraccionarios y resultados análogos a los conocidos del cálculo infinitesimal. Pronto se encontró que estos operadores tienen una fuerte alpicación en ecuaciones diferenciales, lo que propulsó su popularidad en las últimas décadas gracias a aplicaciones en diversas ramas de la ciencia como biología, medicina, economía e ingeniería.

Para el enfoque de este curso, se va a hacer un énfasis en las definiciones propuestas por Riemann-Liouville, pero hay que recalcar que hay varias formas de abordar el cálculo fraccionario como las de Caputo y Grünwald-Letnikov.

1. Integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville

Para definir una integral fraccionaria primero nos motivamos en resultados de una integral entera. Recordemos que para una función f que es Riemann-integrable sobre el intervalo finito $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se define el operador integral como

$$I_a f(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{1}$$

para cada $x \in [a,b]$. Al aplicar este operador de manera iterada sobre una función, se logra obtener la fórmula integral de Cauchy para integrales iteradas (ver [8])

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

para cada $x \in [a,b]$. En particular, cuando $n=1$, $I_a^1 f(x)$ coincide con la expresión (1).

Ahora, recordando que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, donde Γ es la función Gamma definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^t dt,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos reescribir (2) como

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Nótese que en esta ecuación, si se intercambia n por un número real positivo ν, no surgiría ningún problema. Esto motiva la siguiente definición.

Definición. Sean $a, b, \nu \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $\nu \geq 0$, y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-Integrable sobre $[a,b]$. Se define la integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden ν de f como

$$I_{a^+}^{\nu} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \tag{3}$$

para cada $x \in [a,b]$.

Para $\nu = 0$ se fija $I_{a^+}^0$ como el operador identidad, es decir, $I_{a^+}^0 f = f$. Presentemos un ejemplo introductorio de para ver cómo funciona este operador

Ejemplo 1. Sea $\nu > 0$ un número real y consideremos la función $f(x) = (x-a)^\mu$, con $x \in [a,b]$ y $\mu > -1$. De la Definición 1 se tiene que

$$I_{a^+}^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1}(t-a)^\mu dt.$$

Tomando el cambio de variable $t = a + \xi(x-a)$ en la expresión anterior permite escribir

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(x-a)^{\mu+\nu} \int_0^1 \xi^\mu (1-\xi)^{\nu-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(x-a)^{\mu+\nu} B(\nu, \mu+1), \end{aligned} \tag{4}$$

donde $B(\cdot,\cdot)$ es la función beta usual definida como

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt,$$

para $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$. Por propiedades de esta función (véase [8]), se tiene que

$$B(\nu, \mu+1) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}.$$

Reemplazando en (4) se obtiene la expresión

$$I_{a^+}^\nu f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(x-a)^{\mu+\nu}.$$

Una pregunta natural que resulta después de definir un operador es si estÃ¡ bien definido y si es lineal. En este caso la linealidad del operador se la hereda de la linealidad de la integral, mientras que la buena definición del operador se menciona a continuación.

Teorema 1.1. *Sea $f \in L^1(a,b)$ y $\nu > 0$ un número real . Entonces $I_{a^+}^\nu f$ existe c.t.p. $x \in [a,b]$. Además, $I_{a^+}^\nu f \in L^1(a,b)$.*

Demostración. Véase en [2, Teo. 2.1]. ■

Ahora, se presentan algunas propiedades relevantes de este operador. Las demostraciones las pueden encontrar en [2].

Teorema 1.2. *Sea $f \in L^1(a,b)$ y $\nu, \mu > 0$ dos números reales. Entonces*

$$I_{a^+}^\nu \left(I_{a^+}^\mu f\right) = I_{a^+}^\mu \left(I_{a^+}^\nu f\right) = I_{a^+}^{\nu+\mu} f, \tag{5}$$

c.t.p. sobre $[a,b]$. Más aún, si $f \in C([a,b])$ ó $\mu + \nu \geq 1$, el resultado se cumple sobre todo $[a,b]$.

Observación. Gracias a este resultado, el conjunto $\left\{I_{a^+}^\nu : \nu \geq 0\right\}$ forma un semigrupo conmutativo respecto a la composición de operadores.

Teorema 1.3. *Sean $\nu > 0$ un número real y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre $[a,b]$ que converge uniformemente. Entonces*

$$\left(\lim_{k\to+\infty} I_{a^+}^\nu f_k\right)(x) = \left(I_{a^+}^\nu \left(\lim_{k\to+\infty} f_k\right)\right)(x), \tag{6}$$

para cada $x \in [a,b]$. En particular, $\left(I_{a^+}^\nu f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

Teorema 1.4. *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales no negativos tal que $\nu_k \longrightarrow \nu$. Entonces, para todo $f \in L^p(a,b)$*

$$\lim_{k\to+\infty} I_{a^+}^{\nu_k} f = I_{a^+}^\nu f,$$

donde la convergencia es en L^p.

Para propiedades análogas al caso no fraccionario se refiere a [2, 8, 9].

2. Derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville

Para definir de manera completa a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se debe introducir el espacio de funciones absolutamente continuas.

Definición. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si para toda familia de subintervalos de $[a,b]$, dos a dos disjuntos, $\{(a_k, b_k) : k = 1, ..., n\}$, que cumple

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| < \delta,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon.$$

Al espacio de funciones absolutamente continuas sobre $[a,b]$ se lo denota por $AC([a,b])$. Se dirá que $f \in AC^n([a,b])$, con $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)} \in AC([a,b])$ para $k = 0, \ldots, n-1$.

Nótese que bajo esta definición, $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$. Además, de manera general se tiene que $C^n([a,b]) \subset AC^n([a,b]) \subset C^{n-1}([a,b])$.

Retornando al enfoque de la derivada fraccionaria, se denotará a la derivada de orden $n \in \mathbb{N}$ por D^n. Se recuerda que, para una función $f \in C^n([a,b])$, se cumple la siguiente igualdad

$$D^n f = D^m \left(I_a^{m-n} f \right),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m > n$. Habiendo ya introducido la integral fraccionaria, se puede intercambiar n por $\nu > 0$ un número real de manera que la expresió siga teniendo sentido. Esto motiva la definición de derivada fraccionaria.

Definición. Sean $a, b, \nu \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $\nu > 0$, $s = \lceil \nu \rceil$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable sobre $[a,b]$. Se define a la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden ν de f como

$$D_{a^+}^{\nu} f(x) := D^s I_{a^+}^{s-\nu} f(x). \tag{7}$$

En esta definición, la función $\lceil \cdot \rceil$ es la función techo de un número definido como el entero más pequeño que es mayor o igual a su argumento. Nuevamente, se fija $D_{a^+}^0$ como el operador identidad.
La expresión (7) es equivalente a

$$D_{a^+}^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(s-\nu)} \frac{d^s}{dx^s} \int_a^x (x-t)^{s-\nu-1} f(t) dt. \tag{8}$$

Observación. Nótese que si $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $s = \nu$ y por tanto, en (7) se tiene que la derivada fraccionaria coincide con la derivada entera de orden ν.

Como ejemplo, calculemos nuevamente la derivada de un polinomio como en la sección anterior.

Ejemplo 2. Aprovechando la expresión (4) y (7), se puede calcular directamente la derivada fraccionaria de la función $f(x) = (x-a)^{\mu}$, con $\mu > -1$:

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\nu} f(x) &= \frac{d^s}{dx^s} \left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(s-\nu+\mu+1)} (x-a)^{\mu+s-\nu} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} (x-a)^{\mu-\nu}. \end{aligned}$$

Esta expresión de aquí facilita ver que las constantes no se anulan cuando se les aplica la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville. En efecto, si se toma $\mu = 0$ en la expresión anterior, obtenemos que $f(x) = 1$ y su derivada fraccionaria vendría dada por la expresión

$$D_{a^+}^{\nu}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (x-a)^{-\nu},$$

la cual es no nula. Por linealidad del operador, se sigue que la derivada no se anula para constantes distintas de cero, contrario al caso entero.

Ejemplo 3. En cuanto al ejemplo específico planteado por L'Hôpital a Leibniz, calculemos la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de $f(x) = x$. Es decir, considerando $a = 0$, $\mu = 1$ y $\nu = \frac{1}{2}$ en el ejemplo anterior. Así

$$D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}.$$

Notemos que si aplicamos nuevamente la derivada de orden $\frac{1}{2}$ a este resultado, se obtiene

$$D_{0^+}^{\frac{1}{2}} D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(x) = D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Es decir que para $f(x) = x$, se tiene que

$$D_{0^+}^{\frac{1}{2}} D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{d}{dx}(x).$$

Más adelante se verá que esto no se cumple para cualquier función.

En cuanto a propiedades del operador, la linealidad se sigue de la linealidad de la integral fraccionaria y de la derivada de orden entero y el siguiente resultado muestra que el operador está bien definido.

Lema 2.1. *Si $\nu > 0$, $s = \lceil \nu \rceil$ y $f \in AC^s([a,b])$, entonces $D_{a^+}^{\nu} f$ existe c.t.p. en $[a,b]$. Más aún, $D_{a^+}^{\nu} f \in L^p(a,b)$ para $1 < p < \frac{1}{\nu}$ y*

$$D_{a^+}^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} \frac{d^k f}{dx^k}(a) + \frac{1}{\Gamma(s-\nu)} \int_a^x (x-t)^{s-\nu-1} \frac{d^k f}{dx^k}(t) dt.$$

Contrario a las integrales fraccionarias, la composición de derivadas fraccionarias no siempre conmuta ni resultan en otra derivada fraccionaria, es decir, no siempre se tiene

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} = D_{a^+}^{\mu} D_{a^+}^{\nu},$$

ó

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} = D_{a^+}^{\nu+\mu}.$$

Para lograr que el operador conmute hay que imponer ciertas condiciones sobre las funciones que se consideran.

Teorema 2.1. *Sean $\nu, \mu > 0$ dos números reales, $s = \lceil \nu \rceil$, $r = \lceil \mu \rceil$ y $f \in AC^m([a,b])$, donde $m = \max\{s, r\}$, tal que cumple*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(a) = 0,$$

para $k = 0, \ldots, m-1$. Entonces $D_{a^+}^{\mu+\nu} f$ existe y además:

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} f = D_{a^+}^{\mu} D_{a^+}^{\nu} f = D_{a^+}^{\nu+\mu} f.$$

Teorema 2.2. *Sean $\nu > 0$ un número real y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre $[a,b]$ que converge uniformemente. Suponga además que $D_{a^+}^{\nu} f_k$ existe para cada $k \in \mathbb{N}$ y que $\left(D_{a^+}^{\nu} f_k\right)$ converge uniformemente sobre $[a+\varepsilon, b]$, para todo $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\left(\lim_{k\to+\infty} D_{a^+}^{\nu} f_k\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\nu}\left(\lim_{k\to+\infty} f_k\right)\right)(x), \tag{9}$$

para cada $x \in (a,b]$.

Teorema 2.3. *Sea $f \in C^m([a,b])$, con $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$\lim_{\nu\to m^-} D_{a^+}^{\nu} f(x) = \frac{d^m f}{dx^m}(x),$$

para todo $x \in (a,b]$.

El siguiente resultado caracteriza el núcleo del operador derivada fraccionaria.

Lema 2.2. *Sean $\nu > 0$ un número real y $s = \lceil \nu \rceil$. Se tiene que $D_{a^+}^{\nu} f = 0$ si y solo si existen constantes reales c_k, con $k = 1, \ldots, s$, tales que para todo $x \in [a,b]$ se puede escribir*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k (x-a)^{s-k}.$$

2.1. Función de Mittag-Leffler

A continuación se presenta una función *especial* para las derivadas fraccionarias, en este caso orientada a la de Riemann-Liouville.

Definición. Para dos parámetros $u > 0$ real y $v \in \mathbb{C}$, se define la función de Mittag-Leffler cómo

$$E_{u,v}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(uk+v)}, \tag{10}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

En particular, $E_{u,1} = E_u$ se conoce como la función de Mittag-Leffler de un parámetro y es considerada como la generalización de la función exponencial.
Gracias a las representaciones en series de Taylor, ver [10], para valores específicos de u y v, se obtienen funciones conocidas cómo la exponencial compleja

$$E_{1,1}(z) = e^z,$$

el coseno complejo

$$E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$$

y relacionadas a las funciones trigonométricas hiperbólicas

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z}), \quad E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

Propiedades e importancia de esta función se hacen con profundo detalle en el libro [4].
Ahora, al ser esta función una serie, es natural preguntarse sobre su convergencia. El siguiente resultado muestra que esta serie converge sobre todo $\mathbb{C}$ y por lo tanto $E_{u,v}$ es finita para cualquier valor de $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.4. *Para todo $u > 0$ real y $v \in \mathbb{C}$, la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{u,v}(z)$ converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Se deja como ejercicio al lector.
Indicación: Recuerde la fórmula de Stirling [4]:

$$\Gamma(uk+v) = \sqrt{2\pi}(uk)^{uk+v-\frac{1}{2}} e^{-uk}[1 + o(1)],$$

cuando $k \to +\infty$, en donde $o(\cdot)$ se refiere a la notación orden pequeño.

∎

Para finalizar esta sección se presenta la relación que tiene esta función, con la derivada fraccionaria.

Ejemplo 4. Consideremos $\nu, a \in \mathbb{R}$, con $\nu > 0$, y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que se tiene la siguiente expresión

$$D^{\nu}_{a^+}(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}) = \lambda(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}),$$

para $j = 0, \ldots, \lceil \nu \rceil - 1$. En efecto, gracias al Teorema 2.4, se tiene que

$$(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\nu - j)} (x-a)^{(k+1)\nu-j-1}.$$

Se aplica la derivada fraccionaria a esta expresión, la cual puede ingresar en la serie por el Teorema 2.2. Luego, del Ejemplo 2 junto con el Lema 2.2, se obtiene

$$\begin{aligned}
D^{\nu}_{a^+}(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\nu - j)} D^{\nu}_{a^+}(x-a)^{(k+1)\nu-j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k \Gamma((k+1)\nu - j)}{\Gamma((k+1)\nu - j)\, \Gamma(k\nu - j)} (x-a)^{k\nu-j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\nu - j)} (x-a)^{k\nu-j-1},
\end{aligned}$$

Con el cambio de índice $r = k - 1$, se concluye

$$\begin{aligned} D^{\nu}_{a^+}(x-a)^{\nu-j-1}E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}) &= \lambda\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma\left((r+1)\nu-j\right)}(x-a)^{(r+1)\nu-j-1} \\ &= \lambda(x-a)^{\nu-j-1}E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}). \end{aligned}$$

Observación. Del ejemplo anterior tenemos que las funciones de la forma

$$(x-a)^{\nu-j-1}E_{\nu,\nu-j}(\lambda(x-a)^{\nu}),$$

con $j = 1, \ldots, \lceil \nu \rceil$, son funciones propias de $D^{\nu}_{a^+}$. Esto es análogo al caso de la derivada entera, donde funciones exponenciales son funciones propias del operador derivada. Por esta razón, también se conoce a la función de Mittag-Leffler como la exponencial generalizada o exponencial fraccionaria.

Observación. Nótese que la función de Mittag-Leffler $E_{u,v}$ se puede extender sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ sin dificultad con la misma expresión pues comparte la misma topología con $\mathbb{C}$ y por tanto la misma convergencia. Esto será de ayuda para caaracterizar una función tipo exponencial fraccionaria en la siguiente sección.

3. Otras definiciones del cálculo fraccionario

En 1967, Caputo propuso de otra manera la definición de una derivada fraccionaria, usando la misma integral fraccionaria que en el sentido de Riemann-Liouville.

Definición. Sean $\nu, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\nu > 0, b > a,\ s = \lceil \nu \rceil$, y $f \in C^n([a, b])$. La derivada fraccionaria de orden ν de Caputo de una funci'on f se define como

$$D^{\nu}_{*}f(x) = I^{s-\nu}_{a^+}D^s f(x), \tag{11}$$

donde $s = \lceil \nu \rceil$.

Esta definición es equivalente a

$$D^{\nu}_{*}f(t) = \frac{1}{\Gamma(s-\nu)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\nu+1-s}}dt. \tag{12}$$

Ejemplo 5. Considere la función $f(x) = (x-a)^{\mu}$. Para la derivada fraccionaria de Caputo de esta función existen dos casos. Si $\mu = 0, \ldots, s-1$, donde $s = \lceil \nu \rceil$, entonces $D^s(x-a)^{\mu} = 0$ y por tanto $D^{\nu}_{*}(x-a)^{\mu} = 0$ por (11). Si suponemos lo contrario, se puede aprovechar los ejemplos anteriores para poder deducir la siguiente expresión:

$$D^{\nu}_{*}(x-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(x-a)^{\mu-\nu}.$$

Así, en este caso las derivadas fraccionarias de las constantes si se anulan como en el caso entero, a diferencia del caso de Riemann-Liouville.

Ejemplo 6. Nuevamente analicemos el ejemplo de L'Hôpital y Leibniz. Es decir, considerando $f(x) = x$. En este caso tenemos que $\mu = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $s = 1$. como $\mu > s-1$ entonces por el ejercicio anterior

$$D^{\frac{1}{2}}_{*}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}.$$

Nuevamente, aplicándole el operador a la expresión anterior tenemos que

$$D^{\frac{1}{2}}_{*}D^{\frac{1}{2}}_{*}x = D^{\frac{1}{2}}_{*}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

Este operador fraccionario cumple propiedades bastantes similares a las de Riemann–Liouville y se deja a las curiosidad del lector, ver [2]. Sin embargo estos operadores tienen una relación. En general se cumple:

$$D^{\nu}_{*}f(x) = D^{\nu}_{a}f(x) - \sum_{k=0}^{s-1}\frac{(x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(k+1-\nu)}f^{(k)}(a).$$

Se sigue directamente que los operadores $D^{\nu}_{a^+}$ y D^{ν}_{*} coinciden cuando $f^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, \ldots, s-1$.

Referencias

[1] Calderón, M., Rosales, J., Guzmán, R., Gonzales, A., y Álvarez, J. El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. Acta Universitaria, 25(2), 20-27, 2015.

[2] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Folland, G. B. *Real analysis : modern techniques and their applications.* Wiley, New York, 1999.

[4] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rosgosin, S.V.: Mittag−Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.

[5] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., y Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam Boston, 2006.

[6] Morillo, E., Riera, L. y Yangari, M. Una breve introducción al cálculo fraccionario. Rev. Div. Amarun, (3)27-45, 2022.

[7] Morillo, E. Estudio de funciones tipo exponencial y trigonométricas fraccionarias, y sus propiedades asociados al operador de Cauchy-Riemann fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville, sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.

[8] Podlubny, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Academic Press, San Diego, 1999.

[9] Samko, S. G., Kilbas, A. A., y Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[10] Stein, E. *Complex analysis.* Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.

[11] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.