<u>Lección n°5</u>: Cálculo fraccionario sobre álgebras hipercomplejas.

USFQ, 2022

Conociendo ahora el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y el cálculo fraccionario, se puede mezclar estas dos para tener cálculo fraccionario sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y una teoría de funciones anaíticas fraccionarias. La metodología usada para hacerlo es la de F. Sommen y sus colaboradores en [5, 7], que consiste en reemplazar las derivadas parciales en cada direcci 'on ortogonal por derivadas fraccionarias en sus respectivas direcciones. Esto ya se ha hecho en estructuras más estudiadas como $\mathbb{C}$ en [3], $\mathbb{BC}$ en [4] y $\mathscr{C}\ell_n$ en [3, 6, 7].

Una vez descrita la noción de funciones analíticas fraccionarias sobre cada álgebra, puede surgir la pregunta: ¿Cómo se verían funciones elementales de cada álgebra en el contexto fraccionario? Lo que nos lleva a caracterizar dichas funciones en cada álgebra. Para este curso nos limitamos a mostrar cómo se vería la familia de polinomios de la forma $\frac{z^n}{n!}$, para $n \in \mathbb{N}$, y cómo se vería una función tipo exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ análoga a la presentada en la lección anterior pero en el contexto fraccionario.

1. Polinomios fraccionarios reales

Con este enfoque en mente, para el resto de la sección vamos a considerar el dominio

$$\Omega = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset \mathbb{R}^2$$

y dos parámetros reales $\nu_0, \nu_1 \in (0, 1)$. Primero definamos una familia de polinomios reales conocidos como polinomios fraccionarios que son de utilidad para caracterizar estas funciones.

$$\Phi_t^{\nu,n} = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma((n+1)\nu)}(t-t_0)^{(n+1)\nu-1}, \tag{1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y donde $t \in [t_0, t_1]$. Se la toma así por el siguiente resultado.

Lema 1.1. *Para $\nu \in (0,1)$ se cumple que*

$$D^{\nu}_{t_0^+}\Phi_t^{v,0} = 0 \tag{2}$$

y para $n \in \mathbb{N}$:

$$D^{\nu}_{t_0^+}\Phi_t^{\nu,n} = \Phi_t^{\nu,n-1}. \tag{3}$$

Además, polinomios $\Phi_t^{\nu,n}$ son la versión fraccionaria de los polinomios reales $\frac{t^n}{n!}$ y a $\Phi_t^{\nu,0}$ como el polinomio constante para la derivada fraccionaria $D^{\nu}_{t_0^+}$. Cuando $t_0 = 0$ y $\nu \to 1^-$ en (1), se tiene que

$$\lim_{\nu\to 1^-} \Phi_t^{\nu,n} = \frac{t^{(n+1)-1}}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)} = \frac{t^n}{n!}.$$

Del mismo modo, se define la siguiente familia que simplificará la escritura posteriormente

$$\Psi_t^{\eta,m} = \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma((m+1)\eta)}(t-t_0)^{m\eta}. \tag{4}$$

Se escribirá $\Phi_x^{\nu,m}$ y $\Phi_y^{\nu,m}$ a las funciones definidas como en (1) pero sobre los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[y_0, y_1]$, respectivamente.

2. Cálculo Fraccionario sobre $\mathbb{C}$

Empezamos definiendo el operador de Cauchy-Riemann fraccionario de orden $\nu = (\nu_0, \nu_1)$:

$$D_+^\nu := D_{x_0^+}^{\nu_0} + iD_{y_0^+}^{\nu_1},$$

su conjugado estaría dado por la conjugación compleja, por lo tanto tendría la expresión

$$\overline{D_+^\nu} := D_{x_0^+}^{\nu_0} - iD_{y_0^+}^{\nu_1}.$$

Con el operador fraccionario podemos definir las funciones analíticas fraccionarias en base a la caracterización del caso ordinario.

Definición. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice ν-fraccionaria anallítica si satisface

$$D_+^\nu f = 0,$$

sobre Ω.

Ahora, para asegurar existencia de las derivadas fraccionarias, se define el siguiente espacio funcional.

Definición. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ se dirá que pertenece a $AC^n(\Omega)$ si es que para cada $y \in [y_0, y_1]$, la función

$$x \mapsto f(x, y)$$

pertenece a $AC^n[x_0, x_1]$; y para cada $x \in [x_0, x_1]$ la función

$$y \mapsto f(x, y)$$

pertenece a $AC^n[y_0, y_1]$.

Se esperaría que este operador se comporte similar al caso de derivadas enteras, por lo que presentamos un par de resultados esperados.

Teorema 2.1. *Para funciones $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $f = f_0 + if_1$ y $g = g_0 + ig_1$, tales que $f_j, g_j \in AC^1(\Omega)$ para $j = 0, 1$, se tiene que $D_+^\nu f$, $D_+^\nu g$ existen y además:*

$$D_+^\nu(f + g) = D_+^\nu f + D_+^r g,$$

$$\overline{D_+^\nu}(f + g) = \overline{D_+^\nu} f + \overline{D_+^\nu} g.$$

Además, para todo $k \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se cumple que

$$D_+^\nu(kf) = kD_+^\nu(f) \qquad y \qquad \overline{D_+^\nu}(kf) = k\overline{D_+^\nu}(f).$$

Es decir, los operadores son lineales.

Demostración. La demostración se sigue directamente de la definición de los operadores D_+^ν y $\overline{D^\nu}$. ■

Proposición 2.1. *Sea $f \in AC^2(\Omega)$ tal que f_0 y f_1 cumplan las hipótesis del Teorema 2,1 de la lección 4. Entonces:*

1. $D_+^\nu \overline{f} = \overline{\overline{D_+^\nu} f}$,
2. $\overline{D_+^\nu}\, \overline{f} = \overline{D_+^\nu f}$,
3. $\overline{D_+^\nu} D_+^\nu = D_+^\nu \overline{D_+^\nu}$.

Demostración. La demostración nuevamente se sigue directamente de la definción de los operadores. La hipótesis impuesta sobre f_0 y f_1 sirve para la conmutatividad al querer demostrar 3. ■

2.1. Polinomios Fraccionarios sobre $\mathbb{C}$

Dado que se ha construido la noción de una función fraccionario analítica, es natural preguntarse qué tipo de funciones se pueden crear que cumplan serlo y tengan propiedades útiles.

Nótese, por ejemplo, que en el caso complejo, se tiene que las llamadas funciones elementales como el seno, coseno y exponencial parten de una representación por medio de series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^n}{n!},$$

donde a_k son cosntantes reales adecuadas. También se nota que los monomios

$$Z^n := \frac{z^n}{n!}$$

cumplen con ser analíticos y además $\frac{d}{dz}Z^n = Z^{n-1}$. Estas propiedades se buscan rescatar pero en el contexto fraccionario.

Los polinomios complejos de grado 0, 1 y 2 en el contexto fraccionario de Riemann-Liouville se han definido como

$$Z^{\nu,m} := \frac{1}{2^m}\begin{cases} \Phi_x^{\nu_0,0}\Phi_y^{\nu_1,0} & m=0, \\ \Phi_x^{\nu_0,1}\Phi_y^{\nu_1,0} + i\Phi_x^{\nu_0,0}\Phi_y^{\nu_1,1} & m=1, \\ \left(\Phi_x^{\nu_0,2}\Phi_y^{\nu_1,0} - \Phi_x^{\nu_0,0}\Phi_y^{\nu_1,2}\right) + i\Phi_x^{\nu_0,1}\Phi_y^{\nu_1,1} & m=2. \end{cases} \tag{5}$$

El siguiente resultado nos permite llamar a estas funciones como polinomios fraccionarios sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 2.2. *Sea $\nu = (\nu_0, \nu_1)$. Se tiene que*

$$D_+^{\nu} Z^{\nu,m} = 0,$$

para $m = 0, 1, 2$, y

$$\overline{D_+^{\nu}} Z^{\nu,m} = Z^{\nu,m-1},$$

para $m = 1, 2$.

Demostración. La demostración se obtiene por cálculo directo usando las definiciones del operador de Cauchy-Riemann fraccionario, su conjugado y de los polinomios fraccionarios. ■

3. Cálculo Fraccionario sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

Siguiendo la misma idea del cálculo fraccionario sobre $\mathbb{C}$, basándonos en el operador ordinario de Cauchy-Riemann generalizado, se define el operador fraccionario de Cauchy-Riemann geenralizado, de orden $\nu := (\nu_0, \nu_1)$ en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como

$$\mathbf{D}_+^{\nu} := D_{y_0^+}^{\nu_1} - iD_{x_0^+}^{\nu_0},$$

su conjugado será

$$\overline{\mathbf{D}_+^{\nu}} := D_{y_0^+}^{\nu_1} + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} + iD_{y_0^+}^{\nu_1}.$$

Definición. Una función hipercompleja

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

se dirá *fraccionario analítica* en Ω, si es que $\mathbf{D}_+^{\nu} f$ existe y además

$$\mathbf{D}_+^{\nu} f = 0, \tag{6}$$

en Ω.

Consideremos el siguiente espacio funcional que nos permite asegurar existencia de los operadores fraccionarios.

Definición. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}$ se dirá que pertenece a $AC^n(\Omega)$ si es que para cada $y \in [y_0, y_1]$, la función

$$x \mapsto f(x, y)$$

pertenece a $AC^n[x_0, x_1]$; y para cada $x \in [x_0, x_1]$ la función

$$y \mapsto f(x, y)$$

pertenece a $AC^n[y_0, y_1]$.

Por facilidad al calcular y en las hipótesis, se asumirá en adelante que $\nu_0, \nu_1 \in (0, 1)$. Para exponentes mÃ¡s grande el tratamiento es similar pero se pedirá mayor regularidad para las funciones a los cuales se les aplique los operadores fraccionarios.

Teorema 3.1. *Para funciones $f, g : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ con $f = f_0 + if_1$ y $g = g_0 + ig_1$ tales que $f_j, g_j \in AC^1(\Omega)$ para $j = 0, 1$, se tiene que $\boldsymbol{D}^{\nu}_{+} f$, $\boldsymbol{D}^{\nu}_{+} g$ existen y además:*

$$\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}(f + g) = \boldsymbol{D}^{\nu}_{+} f + \boldsymbol{D}^{\nu}_{+} g,$$

$$\overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}}(f + g) = \overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}} f + \overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}} g.$$

Además, para todo $k \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se cumple que

$$\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}(kf) = k\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}(f) \qquad y \qquad \overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}}(kf) = k\overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}}(f).$$

Teorema 3.2. *Si es que una función hipercompleja*

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

con $f = f_0 + if_1$ satisface que para todo $j = 0, 1$ se tiene $f_j \in AC^2(\Omega)$ y para todo $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [y_0, y_1]$ se cumple

$$f_0(x, y_0) = f_1(x_0, y) = 0.$$

Entonces

$$\overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}} \boldsymbol{D}^{\nu}_{+} f = \boldsymbol{D}^{\nu}_{+} \overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}} f.$$

En particular, si f es fraccionario analítico, entonces $\overline{\boldsymbol{D}^{\eta}_{+}} f$ también lo es.

El último resultado es análogo a lo que sucede para las funciones complejas analíticas, en donde se tiene que si una función es holomorfa o analítica, entonces su derivada lo es también. Es de especial interés notar que el operador congujado $\overline{D^{\nu}_{+}}$ es, al igual que $\partial_{\overline{z}}$, un múltiplo de la derivada, y será usado posteriormente para aplicaciones.

3.1. Polinomios fraccionari analíticos sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

En el caso de complejos generalizados, se han construido los polinomios fraccionarios analíticos siempre y cuando no se esté en el caso parabólico.

Proposición 3.1. *Si es que $\Delta \neq 0$ y se define para todo $m \in \mathbb{N}$.*

$$Z^{\nu,m}_{\alpha,\beta} := \sum_{k=0}^{m} i^k (\beta + 2i)^{-m} \Phi^{\nu_0, m-k}_{x} \Phi^{\nu_1, k}_{y} \tag{7}$$

entonces

$$D^{\nu}_{+} Z^{\nu,m}_{\alpha,\beta} = 0,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, y

$$\overline{D^{\nu}_{+}} Z^{\nu,m}_{\alpha,\beta} = Z^{\nu,m-1}_{\alpha,\beta},$$

para $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. La demostración se obtiene por cálculo directo usando las definiciones del operador de Cauchy-Riemann fraccionario, su conjugado y de los polinomios fraccionarios. ∎

3.2. Función tipo exponencial fraccionaria sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

se puede aprovechar que la función de Mittag-Leffler interviene en las funciones propias de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville para caracterizar una función tipo exponencial.

Proposición 3.2. *Sean $\mu \in (0,1)$ y $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se tiene que*

$$D^{\mu}_{x_0^+}\left(\Phi_x^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_x^{\mu,0})\right) = \lambda\Phi_x^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_x^{\mu,0}). \tag{8}$$

Demostración. De la convergencia absoluta de la función de Mittag-Leffler sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(\mu)\,\Phi_x^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_x^{\mu,0}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\mu)}(x-x_0)^{(k+1)\mu-1}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\Phi_x^{\mu,k}.\end{aligned}$$

Aplicando la derivada fraccionaria de orden μ a esta expresión, y gracias al Teorema 2,2 de la lección 4, obtenemos

$$\begin{aligned}D^{\mu}_{x_0^+}\left(\Gamma(\mu)\,\Phi_x^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_x^{\mu,0})\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k D^{\mu}_{x_0^+}\Phi_x^{\mu,k}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda^k\Phi_x^{\mu,k-1}\\ &= \lambda\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda^j\Phi_x^{\mu,j}\\ &= \lambda\Gamma(\mu)\,\Phi_x^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_x^{\mu,0}).\end{aligned}$$

De la linealidad de la derivada fraccionaria, se obtiene el resultado. ■

Esta proposición impulsa definir una función tipo exponencial real de la siguiente manera:

$$e_{\mu}(\lambda,t) = \Phi_t^{\mu,0}E_{\mu,\mu}(\lambda\Psi_t^{\mu,0}),$$

donde $\mu \in (0,1)$. Inspirándonos en la forma de la exponencial compleja, definimos la función tipo exponencial fraccionaria como

$$\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) := e_{\nu_0}(\lambda,x)e_{\nu_1}(i\lambda,y), \tag{9}$$

donde $\nu = (\nu_0,\nu_1)$ y $z = x+iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. El siguiente resultado justifica el nombre de esta función.

Teorema 3.3. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se tiene que*

$$\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) = 0 \tag{10}$$

y

$$\overline{\boldsymbol{D}^{\nu}_{+}}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) = \lambda(\beta+2i)\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z), \tag{11}$$

para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cualquiera. Para mostrar que $\mathcal{E}_{\nu}$ es analítica, se aplican las definiciones (3) y (9) de manera que se obtiene

$$\begin{aligned}D^{\nu}_{+}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) &= \left(D^{\nu_1}_{y_0^+} - iD^{\nu_0}_{x_0^+}\right)e_{\nu_0}(\lambda,x)e_{\nu_1}(i\lambda,y)\\ &= e_{\nu_0}(\lambda,x)D^{\nu_1}_{y_0^+}e_{\nu_1}(i\lambda,y) - iD^{\nu_0}_{x_0^+}e_{\nu_0}(\lambda,x)e_{\nu_1}(i\lambda,y).\end{aligned}$$

De la Proposición 3.2, se sigue

$$D^{\nu}_{+}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) = \lambda i e_{\nu_0}(\lambda,x)e_{\nu_1}(i\lambda,y) - \lambda i e_{\nu_0}(\lambda,x)e_{\nu_1}(i\lambda,y) = 0.$$

Similarmente, aplicando $\overline{D_{+}^{\nu}}$ a $\mathcal{E}_{\nu}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{D_{+}^{\nu}}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) &= \left(D_{y_0^{+}}^{\nu_1} + \beta D_{x_0^{+}}^{\nu_0} + iD_{x_0^{+}}^{\nu_0}\right) e_{\nu_0}(\lambda, x) e_{\nu_1}(i\lambda, y) \\
&= e_{\nu_0}(\lambda, x) D_{y_0^{+}}^{\nu_1} e_{\nu_1}(i\lambda, y) + \beta D_{x_0^{+}}^{\nu_0} e_{\nu_0}(\lambda, x) e_{\nu_1}(i\lambda, y) + iD_{x_0^{+}}^{\nu_0} e_{\nu_0}(\lambda, x) e_{\nu_1}(i\lambda, y) \\
&= (i\lambda + \beta\lambda + i\lambda) e_{\nu_0}(\lambda, x) e_{\nu_1}(i\lambda, y) \\
&= \lambda(\beta + 2i)\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z),
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Observación. Para eliminar el término $\beta + 2i$ en la proposición anterior se podría considerar un reescalamiento del operador de Cauchy-Riemann generalizado fraccionario, dado de la siguiente manera

$$\overline{\mathscr{D}_{+}^{\nu}} := \frac{\beta + 2i}{\Delta}\overline{D_{+}^{\nu}}.$$

Sin embargo, este nuevo operador estaría definido siempre que $\Delta \neq 0$. Esto permite escribir de manera más familiar

$$\overline{\mathscr{D}_{+}^{\nu}}\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z) = \lambda\mathcal{E}_{\nu}(\lambda z). \tag{12}$$

La ecuación (10) se cumple para $\mathscr{D}_{+}^{\nu}$ pues el término $\frac{\beta+2i}{\Delta}$ es invertible.

Esa no es la única propiedad que se esperaría que cumpla una función que actúa como la generalizació de la exponencial en el contexto fraccionario. También se busca tener una expresión como

$$\mathcal{E}_{\nu}(\lambda(z + w)) = \mathcal{E}_{\nu}(\lambda z)\,\mathcal{E}_{\nu}(\lambda w).$$

Sin embargo, esto no siempre se cumple para cualquier elección de ν_0 y ν_1. Para ilustrar esto, basta estudiar la función e_{ν_0}, considerando $\lambda = 1$ y $x_0 = 0$. De la serie binomial se tiene

$$\begin{aligned}
e_{\nu_0}(1, x_1 + x_2) &= \frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x_1 + x_2)^{(k+1)\nu - 1}}{\Gamma((k+1)\nu_0)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{(k+1)\nu_0 - 1}{j} \frac{x_1^{(k+1)\nu_0 - (j+1)} x_2^{j}}{\Gamma((k+1)\nu_0)},
\end{aligned} \tag{13}$$

Mientras que por la fórmula de Cauchy para el producto de dos series

$$\begin{aligned}
e_{\nu_0}(1, x_1) e_{\nu_0}(1, x_2) &= \left(\frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_1^{(k+1)\nu_0 - 1}}{\Gamma((k+1)\nu_0)}\right) \left(\frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x_2^{(j+1)\nu_0 - 1}}{\Gamma((j+1)\nu_0)}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\eta_0)^4} \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{x_1^{(j+1)\nu_0 - 1}}{\Gamma((j+1)\nu_0)} \frac{x_2^{(k-j+1)\nu_0 - 1}}{\Gamma((k-j+1)\nu_0)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Las ecuaciones (13) y (14) en general no coinciden ya que en la primera aparece el término $\frac{x_1^{\nu_0 - 1}}{\Gamma(\nu_0)^3}$, mientras que en el segundo no. De aquí surge la pregunta: ¿Para qué valores de ν_0 y ν_1 podría cumplirse? Justamente se recupera esta propiedad en el caso entero, es decir cuando $\nu_0 = \nu_1 = 1$.

Proposición 3.3. *Sean $z, w, \lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y considere $x_0 = y_0 = 0$. Entonces*

$$\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda(z + w)) = \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z)\,\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda w).$$

Demostración. Suponga que $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$. Basta mostrar que

$$e_1(\lambda, z_0 + w_0) = e_1(\lambda, z_0) e_1(\lambda, w_0). \tag{15}$$

Puesto que

$$e_1(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!},$$

entonces

$$e_1(\lambda, z_0 + w_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (z_0 + w_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{z_0^{k-j} w_0^j}{k!}.$$

Por otro lado,

$$e_1(\lambda, z_0) e_1(\lambda, w_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j \lambda^{k-j} z_0^j w_0^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{z_0^j w_0^{k-j}}{k!}.$$

Estas expresiones coinciden, lo que muestra (15). En consecuencia, se tiene lo buscado

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda(z+w)\right) &= e_1(\lambda, z_0 + w_0) e_1(\lambda i, z_1 + w_1) \\ &= e_1(\lambda, z_0) e_1(\lambda i, z_1) e_1(\lambda, w_0) e_1(\lambda i, w_1) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right) \mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda w\right). \end{aligned}$$

■

Corolario 3.1. *Sean $z, \lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y considere $x_0 = y_0 = 0$. Entonces*

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right)^n = \mathcal{E}_{(1,1)}\left(n \lambda z\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. El resultado se demuestra por inducción. el caso $n = 1$ es trivial y el caso $n = 2$ se cumple por la Proposición 3.3. Suponga que se cumple para $n > 2$, es decir

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right)^n = \mathcal{E}_{(1,1)}\left(n \lambda z\right).$$

Para $n + 1$ se tiene que

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right)^{n+1} = \left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right) \left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right)^n,$$

por hipótesis de inducción y de la Proposición 3.3

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right)^{n+1} &= \left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(\lambda z\right)\right) \left(\mathcal{E}_{(1,1)}\left(n \lambda z\right)\right) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}\left((n+1) \lambda z\right). \end{aligned}$$

Lo que demuestra el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

El trabajo en este ámbito no se ha terminado. Por ejemplo, un siguiente paso a tomar serÃa buscar caracterizar ahora funciones polianalíticas, es decir que se anulen cuando se les aplique el operador D_+^ν de manera iterada, similar a como se hizo sobre $\mathbb{BC}$ en [4]. Otro paso que podría ser pensar en expansiones en series de Taylor usando la familia de polinomios $Z_{\alpha,\beta}^{\nu,m}$. Inlcusive se puede recrear estas ideas para otras álgebras hipercomplejas que tengan relevancia o sobre las cuales no esté nada hecho todavía.

Referencias

[1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications.* Birkhäuser Boston, 2004.

[2] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time.* Birkhäuser Basel, 2008.

[3] Ceballos, J., Coloma, N., Teodoro, A. D., y Ochoa-Tocachi, D. Generalized fractional Cauchy-Riemann operator associated with the fractional Cauchy-Riemann operator. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(5), 2020.

[4] Coloma, N., Teodoro, A. D., Ochoa-Tocachi, D., y Ponce, F. Fractional elementary bicomplex functions in the Riemann-Liouville sense. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 31(4), 2021.

[5] Delanghe, R., Sommen, F., y Souček, V. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions.* Springer Netherlands, 1992.

[6] Ferreira, M. y Vieira, N. Eigenfunctions and fundamental solutions of the fractional laplace and dirac operators: The Riemann-Liouville case. 10(5):1081-1100, 2016.

[7] Kähler, U. y Vieira, N. Fractional clifford analysis. págs. 191-201. Springer International Publishing, 2013.

[8] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions.* Springer International Publishing, 2015.

[9] Morillo, E. Estudio de funciones tipo exponencial y trigonométricas fraccionarias, y sus propiedades asociados al operador de Cauchy-Riemann fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville, sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.

[10] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. On holomorphic hypercomplex connections. 23(1):179-207, 2012.

[11] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.