Ejercicios Lección n°1: Aplicaciones Lineales

EPN, verano 2012

Notaciones:

- $\ell^p(\mathbb{N})$ (con $1 \leq p \leq +\infty$): espacio de sucesiones, normado por $\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p}$.
- $c_0(\mathbb{N})$: espacio de sucesiones que tienden a 0 al infinito, normado por $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.
- $c(\mathbb{N})$: espacio de sucesiones que tienen un límite finito, normado por $\|\cdot\|_\infty$.
- $L^p(X, d\mu)$ (con $1 \leq p \leq +\infty$): espacio de Lebesgue, normado por $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$.
- $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$: funciones definidas sobre X, un espacio de Hausdorff compacto, que son continuas y acotadas, normado por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

Ejercicio 1 — Aplicaciones Continuas

Dar ejemplos de:

1. una aplicación discontinua en el origen, pero continua en el resto de su dominio de definición,
2. una aplicación que es continua, pero que no es uniformemente continua,
3. una aplicación que es continua, pero que no es lipschitziana.

¿Los ejemplos producidos, son aplicaciones lineales?

Ejercicio 2 — Conjuntos acotados

Consideremos $\mathbb{R}$ dotado de la topología inducida por la norma usual $|\cdot|$. Notaremos este conjunto por $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Sea ahora $\mathbb{R}$ dotado de la distancia $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Mostrar que d es una distancia sobre $\mathbb{R}$.
2. Dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son acotados en el sentido de la distancia d, pero que no son acotados en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Mostrar que si la estructura de espacio topológico vectorial es engendrada por una distancia homogénea[1] entonces las nociones de acotación en el sentido métrico y en el sentido de los espacios vectoriales topológicos coinciden.

Ejercicio 3 — Norma de Aplicaciones (I)

1. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $T : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ una aplicación definida por $T(a)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$, para todo $x \in [0, 1]$ y toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$.
   a) Mostrar que T está bien definida, es lineal y continua
   b) Mostrar que $\|T\|_{\ell^1\to\mathcal{C}} = \sup\limits_{n\geq 0} |b_n|$.
2. Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow L^p([0, 1], dx)$ una aplicación dada por $T(b)(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[}(x)$, para todo $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y todo $x \in [0, 1]$.
   a) Mostrar que T está bien definida,
   b) Verificar que T es lineal, continua y calcular su norma.

[1] Una distancia *homogénea* sobre un e.v.t. E verifica $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$

Ejercicio 4 — Norma de Aplicaciones (II)

1. Definimos la aplicación T por
$$\begin{array}{rcl} T:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & T(f)=\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx-\int_{1/2}^1 f(x)dx. \end{array}$$
Mostrar que T es una aplicación lineal.
2. Mostrar que para todo elemento f de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ se tiene $|T(f)|\leq \|f\|_\infty$.
3. Sea $(f_n)_{n\geq 2}$ una sucesión de funciones definidas de la siguiente forma:
$$\begin{array}{rcl} f_n:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leq x\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}-nx & \text{si } \frac{1}{2}-\frac{1}{n}< x\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq x\leq 1. \end{cases} \end{array}$$
Verificar que $(f_n)_{n\geq 2}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
4. Mostrar que se tiene, para todo $n\geq 2$, $\|f_n\|_\infty=1$.
5. Demostrar que $T(f_n)=1-\frac{1}{n}$ y verificar que $\|T\|_{\mathcal{C}\to\mathbb{R}}=1$.
6. El objetivo de las siguientes preguntas es mostrar que no existe un elemento $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\|f\|_\infty=1$ y tal que $|T(f)|=1$. Vamos a proceder por el absurdo.
   a) Sea $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\|f\|_\infty=1$. Mostrar que las aplicaciones $g(x)=1-f(x)$ y $h(x)=1+f(x)$ son continuas y positivas sobre los segmentos $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ respectivamente.
   b) Verificar que se tiene la expresión $1-T(f)=\displaystyle\int_0^{1/2} g(x)dx+\int_{1/2}^1 h(x)dx=I+J.$
   c) Deducir que $1-T(f)\geq 0$ y que $1+T(f)\geq 0$.
   d) Mostrar que las integrales I y J son estrictamente positivas y deducir que $1-T(f)>0$ y $1+T(f)>0$.
   e) Mostrar que la norma $\|T\|_{\mathcal{C}\to\mathbb{R}}=1$ no es alcanzada sobre la esfera unidad del espacio vectorial normado $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio 5 — Aplicaciones positivas

Sea X,Y dos espacios de Hausdorff compactos, diremos que una aplicación $T:\mathcal{C}(X,\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}(Y,\mathbb{R})$ es *positiva* si para toda función $f\geq 0$ se tiene que $T(f)\geq 0$.

1. Mostrar que si la aplicación $T:\mathcal{C}(X,\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}(Y,\mathbb{R})$ es una aplicación lineal positiva, entonces T es una aplicación continua y que se tiene $\|T\|_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}}=\|T(1)\|_\infty$ en donde $1\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es la aplicación constante igual a 1.
2. Sea $\varphi(x,t):[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,+\infty[$ una función continua tal que $\partial\varphi/\partial x:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,+\infty[$ existe y es continua. Mostrar que la aplicación $T:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ determinada por la fórmula $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^1\varphi(x,t)f(t)dt$ está bien definida, es lineal, continua y de norma $\|T\|_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}}=\displaystyle\int_0^1\varphi(1,t)dt$. *(Indicación: usar la primera parte.)*

Ejercicio 6 — Norma de Aplicaciones lineales continuas

1. Si T y S son dos aplicaciones lineales continuas definidas sobre $(E,\|\cdot\|_E)$ a valores en $(F,\|\cdot\|_F)$, mostrar que se tiene
$$\|T+S\|_{E\to F}\leq\|T\|_{E\to F}+\|S\|_{E\to F},\quad \text{y}\quad \|\lambda T\|_{E\to F}=|\lambda|\|T\|_{E\to F}\quad \text{para todo escalar } \lambda.$$
2. Mostrar además que $T:(E,\|\cdot\|_E)\longrightarrow(F,\|\cdot\|_F)$ y $S:(F,\|\cdot\|_F)\longrightarrow(G,\|\cdot\|_G)$ son dos aplicaciones lineales continuas en los espacios normados E,F y G, entonces se tiene la desigualdad
$$\|S\circ T\|_{E\to G}\leq\|S\|_{F\to G}\|T\|_{E\to F}$$

3. Si $T:(E,\|\cdot\|_E)\longrightarrow(E,\|\cdot\|_E)$ es una aplicación lineal continua, mostrar que se tiene $\|T^n\|_{E\to E}\leq\|T\|_{E\to E}^n$ en donde el operador T^n se define por $T^n=T(T^{n-1})$ para todo $n\geq 1$ y con $T^0=Id$.

Ejercicio 7 — Isometrías

Sea $1\leq p<+\infty$ y sea $T:\ell^p(\mathbb{N})\longrightarrow L^p([0,+\infty[,dx)$ una aplicación determinada por $T(a)(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\mathbb{1}_{[n-1,n[}(x)$ para toda sucesión $a=(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell^p(\mathbb{N})$ y todo $x\in[0,+\infty[$. Mostrar que T es una isometría.

Ejercicio 8 — Ejemplos de espacios duales

1. **Se tiene** $(c_0(\mathbb{N}))'=\ell^1(\mathbb{N})$.
   a) Mostrar que para toda forma lineal $T\in(c_0(\mathbb{N}))'$ corresponde una única sucesión $a^T=(a_n^T)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1(\mathbb{N})$ tal que, para todo $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0(\mathbb{N})$ se tenga
   $$\|T\|_{c_0\to\mathbb{R}}=\sup_{\|x\|_\infty=1}\big|T(x)\big|=\sup_{\|x\|_\infty=1}\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}}x_na_n^T\Big|=\|a^T\|_{\ell^1}$$
   Para ello seguir los siguientes pasos:
   1 – Usando el hecho que $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}x_ne(n)=x$ en $c_0(\mathbb{N})$, en donde $(e(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de sucesiones, verificar que para todo $x\in c_0(\mathbb{N})$ y todo $T\in(c_0(\mathbb{N}))'$ se tiene $T(x)=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}x_na_n^T$ en donde $a_n^T=T(e(n))$.
   2 – Sea $\varepsilon_n=\pm1$ tal que $a_n^T=\varepsilon_n|a_n^T|$ si $a_n^T\neq0$ y $\varepsilon_n=+\infty$ sino. Definiendo $x^N\in c_0(\mathbb{N})$ por $x_n=\varepsilon_n^{-1}$ para todo $n\leq N$ y $x_n=0$ sino, mostrar que $\|x^N\|_\infty\leq1$.
   3 – Deducir que $\|T\|_{c_0\to\mathbb{R}}\geq\sum_{n=0}^{N}|a_n^T|$.
   4 – Obtener que $(a_n^T)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1(\mathbb{N})$ y que se tiene $\|a^T\|_{\ell^1}\leq\|T\|_{c_0\to\mathbb{R}}$.

   b) Mostrar que, recíprocamente, cada sucesión $y\in\ell^1(\mathbb{N})$ define una forma lineal $T_y\in(c_0(\mathbb{N}))'$ tal que, para todo $x\in c_0(\mathbb{N})$ se tiene
   $$\|T_y\|_{c_0\to\mathbb{R}}=\|y\|_{\ell^1}.$$
2. **Se tiene** $(c(\mathbb{N}))'=\ell^1(\mathbb{N})$.
   a) Mostrar que para toda forma lineal $T\in(c(\mathbb{N}))'$ corresponde una única sucesión $b^T=(b_n^T)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1(\mathbb{N})$ tal que, para todo $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c(\mathbb{N})$ se tenga
   $$\|T\|_{c\to\mathbb{R}}=\sup_{\|x\|_\infty=1}\big|T(x)\big|=\sup_{\|x\|_\infty=1}\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}}x_nb_n^T\Big|=\|b^T\|_{\ell^1}$$
   Para ello seguir los siguientes pasos:
   1 – Mostrar que se tiene $x=x_0e_0+\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}(x_n-x_0)e(n)$ en donde $x_0=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ y $e_0=(1,1,1,1,...)$.
   2 – Deducir que, para toda forma lineal $T\in(c(\mathbb{N}))'$ se tiene $T(x)=x_0b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_0)b_n$ en donde $b_0=T(e_0)$ y $b_n=T(e_n)$ para todo $n\geq1$.
   3 – Sea $\varepsilon_n=\pm1$ tal que $b_n^T=\varepsilon_n|b_n^T|$ si $b_n^T\neq0$ y $\varepsilon_n=+\infty$ sino. Consideramos una sucesión x^N definida por $x_n=\varepsilon_n^{-1}$ si $n\leq N$ y $x_n=\varepsilon_0^{-1}$ sino. Verificar que se tiene
   $$\|x^N\|_\infty\leq1,\quad x_0=\lim_{n\to+\infty}x_n=\varepsilon_0^{-1},\quad T(x^N)=|b_0^T|+\sum_{n=1}^{N}|b_n^T|+\varepsilon_0^{-1}\sum_{n=N+1}^{+\infty}b_n^T.$$

y deducir que $|b_0^T| + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n^T| \leq \|T\|_{c_0 \to \mathbb{R}}$.

b) Recíprocamente, si $b \in \ell^1(\mathbb{N})$, mostrar que la aplicación $T_b(x) = b_0 \times \lim\limits_{n \to +\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n b_n$ en donde $x \in c(\mathbb{N})$, define una forma lineal continua T_b sobre $c(\mathbb{N})$ tal que $\|T_b\|_{c \to \mathbb{R}} \leq \|b\|_{\ell^1}$.

Moraleja: Esto muestra que dos espacios distintos pueden tener el mismo espacio dual.

Ejercicio 9 — Isometrías y dualidad

Para $1 < p < +\infty$ consideramos el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ de sucesiones a valores reales $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Sea ℓ_F el espacio de sucesiones finitas, es decir el conjunto de sucesiones $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que se anulan a partir de cierto rango $j \in \mathbb{N}$.

1. Mostrar que ℓ_F es un subespacio denso de $\ell^p(\mathbb{N})$. Este resultado de extiende a $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$?
2. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : \ell_F \times \ell_F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n. \end{array}$$

   a) Verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una aplicación bilineal y que se tiene $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|_{l^p} \|b\|_{l^q}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   b) Mostrar que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ puede prolongarse al espacio $\ell^p \times \ell^q$.
   c) Sea $T : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$ definida por $T(b) = \langle a, b \rangle$ con $a \in \ell^p(\mathbb{N})$. Verificar que T es una aplicación lineal continua y mostrar que $\sup\limits_{\|a\|_{\ell^p}=1} |\langle a, b \rangle| \leq \|b\|_{\ell^q}$.
3. Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$ una sucesión cualquiera. Definimos $a_n = b_n |b_n|^{q-2}$ si $b_n \neq 0$ y $a_n = 0$ sino.
   a) Obtener que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ y que $\langle a, b \rangle = \|b\|_{\ell^q}^q$.
   b) Utilizando el hecho que $\langle a, b \rangle \leq \|a\|_{\ell^p} \|b\|_{(\ell^p)'}$ y la sucesión recién definida, mostrar que $\|b\|_{\ell^q}^q \leq \|b\|_{\ell^q}^{q/p} \|b\|_{(\ell^p)'}$ y deducir que la aplicación T es una isometría de $\ell^q(\mathbb{N})$ en $(\ell^p(\mathbb{N}))'$.
4. Sea $\varphi : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua y definimos b_n tal que $b_n = \varphi(e(n))$ en donde $(e(n))_{n \in \mathbb{N}}$ es la base canónica de las sucesiones.
   a) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión finita, verificar que esta sucesión puede escribirse $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e(n)$ y que se tiene $\varphi(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$. ¿Qué relación une b_n y φ?
   b) Sea M un entero, notamos $a_n^{(M)} = b_n |b_n|^{q-2}$ si $b_n \neq 0$ y $n \leq M$, $a_n^{(M)} = 0$ sino. Utilizando la notación $c^{(M)}$ para decir que $c_n = 0$ si $n > M$, mostrar que $\varphi(a^{(M)}) = \|b^{(M)}\|_{\ell^q}^q$ y que $\|a^{(M)}\|_{\ell^p} = \|b^{(M)}\|_{\ell^q}^{q/p}$.
   c) Mostrar que para todo $c \in \ell^p(\mathbb{N})$ se tiene $|\varphi(c)| \leq A \|c\|_{\ell^p}$ y que $\|b^{(M)}\|_{\ell^q}^q = |\varphi(a^{(M)})| \leq A \|b^{(M)}\|_{\ell^q}^{q/p}$. Deducir que $b \in \ell^q(\mathbb{N})$ y que $\varphi(a) = \langle a, b \rangle$ para todo $a \in \ell^p(\mathbb{N})$.

Hemos construido una isometría sobreyectiva de ℓ^q en $(\ell^p)'$, de manera que podemos identificar el espacio dual de ℓ^p al espacio de sucesiones ℓ^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.