Ejercicios Lección n°2: Teorema de Hahn-Banach y Aplicaciones

EPN, verano 2012

Ejercicio 1 — Prolongaciones

1. Sea E un espacio vectorial y sea $W \subset E$ un subespacio vectorial. Mostrar que cada forma lineal $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ admite una proplongación lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$.
2. Sea E un espacio normado, $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, ..., x_n\} \in E$ una familia de vectores independientes. Mostrar que para todo $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, existe una forma lineal $T \in E'$ tal que $T(x_i) = \alpha_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

Ejercicio 2 — Algunos cálculos

1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(x, y) = x$. Mostrar que $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ determinada por $g(x, y) = x/5 + 2/5y$ es la única extensión de Hahn-Banach de f a todo el espacio $\mathbb{R}^2$ dotado de su métrica euclidea.
2. Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$ un escalar fijo. Definimos el conjunto $A = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^2$ y consideramos la aplicación $f : (A, \|\cdot\|_p) \longrightarrow \mathbb{K}$ determinada por $f(x) = \alpha x_1$.
   a) Verificar que f es una aplicación lineal y continua.
   b) Mostrar que las prolongaciones de Hahn-Banach f son:
      - para $p = 1$: $T(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ con $|\beta| \leq |\alpha|$. Observar que hay entonces una infinidad de posibles extensiones.
      - para $1 < p \leq +\infty$: $T(x_1, x_2) = \alpha x_1$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$.

Ejercicio 3 — Completitud

Sean $E \neq \{0\}$ y F dos espacios normados. Si $\mathscr{L}(E, F)$ es un espacio de Banach, mostrar que F es un espacio de Banach.

1. Sea $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\|_E = 1$. Verificar que existe $T \in E'$ tal que $\|T\|_{E'} = 1$ y tal que $T(x_0) = \|x_0\|_E = 1$.
2. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de F. Definimos las aplicaciones $A_n : E \longrightarrow F$ por $A_n(x) = T(x)y_n$. Mostrar que $A_n \in \mathscr{L}(E, F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\|A_n - A_m\|_{E\to F} = \|y_n - y_m\|_F$.
3. Deducir que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}(E, F)$ es una sucesión de Cauchy.
4. Usar la hipótesis para ver que $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ en donde $A \in \mathscr{L}(E, F)$.
5. Si fijamos $A(x_0) = y_0$, verificar que $\|y_n - y_0\|_F \leq \|A_n - A\|_{E\to F}\|x_0\|_E \longrightarrow 0$.
6. Deducir que Y es un espacio de Banach.

Ejercicio 4 — Ejemplo de unicidad

Mostrar que toda forma lineal continua definida sobre el conjunto $c_0(\mathbb{N})$ posee una única extensión de Hahn-Banach al espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ si se mantiene la norma de la forma lineal. Seguir los siguientes puntos:

1. Sea $f : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Mostrar que para todo elemento $b \in c_0(\mathbb{N})$, existe un elemento $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que $f(b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$, verificar que $\|f\|_{c_0\to\mathbb{R}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.
2. Si definimos $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $T(c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n c_n$ para toda sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, mostrar que T es una forma lineal continua, calcular sur norma y deducir que T es una extensión de Hahn-Banach de f.
3. Sea $S : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ otra extensión de Hahn-Banach de f.
   a) Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ con $\|c\|_{\ell^\infty} \leq 1$, y si definimos $y^N = (sgn(a_0), .., sgn(a_N), c_{N+1}, ...)$, verificar que $\|y^N\|_{\ell^\infty} \leq 1$.
   b) Mostrar que $y^N - c \in c_0(\mathbb{N})$, obtener que $S(y^N - c) = T(y^N - c)$.

4. Si notamos $H = S - T$ verificar que $H(y^N) = H(c)$.
   a) Mostrar que $S(y^N) = H(c)+\sum_{k=0}^{N}|a_k|+\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k c_k$ y obtener que $S(y^N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} H(c)+\|f\|_{c_0\to\mathbb{R}}$. Deducir que para todo $c \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, tal que $\|c\|_{\ell^\infty} \leq 1$, existe $y^N \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\|y^N\|_{\ell^\infty} \leq 1$ para todo $N \in \mathbb{N}$ tal que $S(y^N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} H(c) + \|f\|_{c_0\to\mathbb{R}}$.
   b) Verificar que si $c \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\|c\|_{\ell^\infty} \leq 1$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq 1$ tal que $|H(c)| = \lambda H(c)$. Deducir que entonces existe una sucesión $y^N \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\|y^N\|_{\ell^\infty} \leq 1$ y tal que $|S(y^N)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} |H(c)| + \|f\|_{c_0\to\mathbb{R}}$.
   c) Mostrar que se tiene $|S(y^N)| \leq \|S\|_{\ell^\infty\to\mathbb{R}} = \|f\|_{\ell^\infty\to\mathbb{R}}$.
5. Verificar que se tiene $|H(c)| + \|f\|_{\ell^\infty\to\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\ell^\infty\to\mathbb{R}}$.
   a) Mostrar que $H(c) = 0$ para todo $c \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\|c\|_{\ell^\infty} \leq 1$.
   b) Deducir la unicidad de la prolongación.

Ejercicio 5 — Subespacios densos

1. Definimos $A = \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 0\big\}$. Mostrar que $A \subset \ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $|a_n| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $1 < p < +\infty$. Encontrar una condición necesaria y suficiente en esta sucesión para que el subespacio $A = \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n = 0\big\}$ sea denso en $\ell^p(\mathbb{N})$.

   Indicación: A es denso en $\ell^p(\mathbb{N}) \iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell^q(\mathbb{N})$.

Ejercicio 6 — Separación o no separación?

Considerar el espacio

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e(n) : k \in \mathbb{N}, \alpha_n > 0 \right\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$$

en donde $(e(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si definimos $B = -A$ mostrar que:

1. A y B son dos conjuntos disjuntos.
2. A y B son conjuntos convexos.
3. Verificar que para toda forma lineal $T \in (\ell^2)' \setminus \{0\}$, se tiene $T(A) = T(B) = \mathbb{R}$.
4. ¿Qué se puede deducir de esto?