Ejercicios Lección n°3: Lema de Baire y Teoremas clásicos

EPN, verano 2012

Ejercicio 1 — Cerraduras

1. Verificar que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$, que $\ell^p(\mathbb{N}) \neq c_0(\mathbb{N})$ para todo $1 \leq p < +\infty$.
2. Encontrar la cerradura de $c_0(\mathbb{N})$ en $c(\mathbb{N})$ y en $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
3. Encontrar la cerradura de $\ell^p(\mathbb{N})$ en $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Ejercicio 2 — Conjuntos densos

1. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. Encontrar todos los subespacios vectoriales $W \subseteq E$ que contienen una bola. Verificar entonces que $E = W$.
2. Un subconjunto $A \subset E$ es denso en ninguna parte si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$. Mostrar que el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ es un espacio que es denso en ninguna parte del espacio de sucesiones $c(\mathbb{N})$.

Ejercicio 3 — Uso del teorema de Bernstein

Consideremos el conjunto de funciones

$$U = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n : \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\} \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}).$$

1. Considerando la aplicación $T(a)(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ para todo $a \in \ell^1(\mathbb{N})$, verificar que $U = T(\ell^1)$.
2. Si $g(x) = \frac{1}{x+1}$, existe una sucesión $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que $T(a) = g$?
3. Deducir que T no es una aplicación sobreyectiva.
4. ¿Qué se puede decir del conjunto $T(\ell^1)$?
5. Observando que el conjunto de todas las funciones polinomiales está contenido en U, el teorema de Bernstein nos asegura que U es un conjunto denso en $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Deducir que $T(\ell^1)$ no es un conjunto abierto en $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Ejercicio 4 — Aplicación Abierta

Sea $\varphi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ y sea $A = \{f\varphi : f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})\}$.

1. Considerar la aplicación $T : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ definida por $T(f) = f\varphi$. Mostrar que T es una aplicación lineal continua.
2. Dar una condición sobre la función φ para que T sea una aplicación sobreyectiva.
3. Mostrar que A es un conjunto magro ssi existe $x \in [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 0$.

Ejercicio 5 — Multiplicadores y Grafo Cerrado

Sean p, q dos reales tales que $1 \leq p, q < +\infty$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tales que, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ se tiene $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$. Definimos el operador de multiplicación $\mathcal{M}_a : \ell^p \longrightarrow \ell^q$ dado por $\mathcal{M}_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Mostrar que $\mathcal{M}_a$ está bien definido y que es un operador lineal.
2. Mostrar que el grafo de $\mathcal{M}_a$ es cerrado.
   Indicación: considerar límites.

3. Deducir que $\mathcal{M}_a$ es un operador continuo.

Ejercicio 6 — Grafo Cerrado

Consideremos el espacio $L^p([0,1], dx)$ con $1 \leq p < +\infty$ y sea A un subconjunto cerrado de $L^p([0,1], dx)$ tal que $A \subset L^\infty([0,1], dx)$. Mostrar que el operador de inyección $i : A \longrightarrow L^\infty([0,1], dx)$ es continuo.

Ejercicio 7 — Espacios de sucesiones con pesos

Sea $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales estrictamente positivos tales que $\omega_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Para todo $1 \leq p < +\infty$, definimos los espacios de sucesiones *con peso* ω por:

$$\ell^p_\omega(\mathbb{N}) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|a\|_{\ell^p_\omega} < +\infty\},$$

en donde $\|a\|_{\ell^p_\omega} = \big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \omega_n\big)^{1/p}$.

1. Mostrar que el espacio $(\ell^p_\omega(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p_\omega})$ es un espacio de Banach.
2. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido con μ una medida positiva finita. Suponiendo que existe un recubrimiento de X por medio de conjuntos dos a dos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ tales que $\omega_n = \mu(A_n)$, mostrar que para todo $1 \leq p < q < +\infty$ no se puede tener la identificación $L^p(X, d\mu) = L^q(X, d\mu)$.

   Proceder por el absurdo: suponer que $L^p(X, d\mu) = L^q(X, d\mu)$ y utilizar para ello el hecho que la aplicación inclusión $i : \ell^p_\omega(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^q_\omega(\mathbb{N})$ sería entonces una aplicación lineal continua.
   Para ello seguir las siguientes etapas:
   a) Mostrar que la aplicación $i : \ell^p_\omega(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^q_\omega(\mathbb{N})$ está bien definida y es lineal.
   b) Utilizando el teorema del grafo cerrado, obtener una contradicción.

Ejercicio 8 — Grafo Cerrado y una aplicación que no es continua

Sea $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las funciones de clase $\mathcal{C}^1$ dotado de la norma de la convergencia uniforme del espacio $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ y consideremos el operador $D : \big(\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ definido por $D(f) = f'$.

1. Mostrar que D es un operador lineal.
2. Verificar que su grafo es cerrado.
3. Considerando las funciones $f_n(x) = x^n$ definidas sobre $[0,1]$, demostrar que el operador D no es un operador continuo.
4. ¿Hay una contradicción con el teorema del grafo cerrado?

Ejercicio 9 — Sucesiones

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales tal que para toda sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ se tiene que el producto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio $c_0(\mathbb{N})$.

1. Sea la aplicación $T : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c_0(\mathbb{N})$ definida por $T(b_n) = a_n b_n$ y sea $T_n : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c_0(\mathbb{N})$ una aplicación dada por $T_n(b_0, b_1, ...) = (a_0 b_0, ..., a_n b_n, 0, 0, ...)$. Mostrar que T_n está bien definida, y que es una aplicación lineal continua.
2. Verificar que $\|T_n\|_{c_0\to c_0} = \text{máx}(|a_0|, ..., |a_n|)$.
3. Verificar que se tiene $\|T_n(b) - T(b)\|_\infty = \sup\limits_{k\geq n+1} |a_k b_k|$ y deducir que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$.
4. Utilizando el Principio de Acotación Uniforme deducir que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$.

Ejercicio 10 — Series normalmente convergentes

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio normado y sea $T_n : E \longrightarrow F$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas.

1. Mostrar que la aplicación $H_n : c_0(E) \longrightarrow F$ definida por $H_n(x_1, x_2, ...) = T_n(x_{n+1} - x_n)$ es lineal, continua y de norma $\|H_n\|_{c_0 \to F} = 2\|T_n\|_{E \to F}$.
2. Si para toda serie normalmente convergente $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ se tiene $T_n(x_n) \longrightarrow 0$ en el sentido de $\|\cdot\|_F$, mostrar que se tiene $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{E\longrightarrow F} < +\infty$.