Ejercicios Lección n°4: Dualidad

EPN, verano 2012

Ejercicio 1 — Topologías y sucesiones

En $\mathbb{R}$, consideramos una base de vecindades del origen dada por los conjuntos de tipo $]-\varepsilon,\varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, de la cual quitamos un conjunto numerable de elementos no vacíos. Consideramos luego $\mathbb{R}$ dotado de la topología de espacio vectorial dada por esta base de vecindades del origen que será notada $\mathcal{B}$.

1. Considerar el conjunto $A =]-1,1[\setminus\{0\}$. Verificar que para toda vecindad V de la base $\mathcal{B}$ se tiene $V \cap A \neq \emptyset$ y deducir que $0 \in \overline{A}$.
2. Suponer que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $x_n \longrightarrow 0$ en esta topología y obtener una contradicción.

Moraleja: una topología lineal no es necesariamente una topología secuencial.

Ejercicio 2 — Teorema de representación de Riesz

Recordamos que un *producto escalar* (real) definido sobre un espacio vectorial H es una aplicación $(\cdot|\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

i) para todo $y \in H$ la aplicación $(\cdot|y) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal,

ii) $(x|y) = (y|x)$,

iii) $(x|x) \geq 0$,

iv) $(x|x) = 0 \iff x = 0$.

Un espacio de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ es un espacio vectorial normado completo en donde la norma $\|\cdot\|_H$ está definida por medio de un producto escalar: $\|x\|_H = \sqrt{(x|x)}$ para todo $x \in H$.

1. Sea H un espacio de Hilbert, mostrar que para cada $y \in H$, la forma lineal $\varphi_y = (\cdot|y)$ es continua y que se tiene la igualdad $\|\varphi_y\|_{H\to\mathbb{R}} = \|y\|_H$.
2. Sea $\varphi \in H'$ una forma lineal continua no nula sobre H. Aceptando que $H = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp$, mostrar que $Ker(\varphi)$ es cerrado y que $Ker(\varphi)$ es de codimensión 1.
3. Verificar que la forma lineal φ se escribe de la forma $\varphi_y(x) = (x|y)$ para algún $y \in H$.

Esto muestra que toda forma lineal φ sobre un espacio de Hilbert H se representa por medio de la fórmula $\varphi_y(x) = (x|y)$ para algún $y \in H$ y que se tiene $\|\varphi\|_{H\to\mathbb{R}} = \|y\|_H$.

Ejercicio 3 — Espacios Duales

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, con μ una medida σ-finita y sean p, q tales que $1 \leq p < +\infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Sea $g \in L^q(X, d\mu)$, mostrar que la aplicación $T_g : L^p(X, d\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_g(f) = \displaystyle\int_X fgd\mu$ es una forma lineal continua.
2. Si μ es finita, mostrar que para toda forma lineal continua positiva $T \in (L^p)'$ existe una función medible $g \geq 0$ tal que para todo $f \in L^p(X, d\mu)$ se tiene $T(f) = \displaystyle\int_X fgd\mu$. Para ello, seguir los siguientes pasos:
   a) Verificar que si definimos $\lambda(A) = T(\mathbb{1}_A)$ para todo $A \in \mathscr{A}$, entonces obtenemos una medida λ finita.
   b) Definiendo $\nu = \lambda + \mu$, verificar que $\nu(A) = 0 \iff \mu(A) \Longrightarrow \lambda(A) = 0$ para todo $A \in \mathscr{A}$.
   c) Consideramos la forma lineal $T(f) = \displaystyle\int_X fd\lambda$. Mostrar que esta forma lineal está bien definida sobre $L^2(X, d\nu)$ y que se tiene:
   $$|T(f)| \leq \|f\|_{L^2(X,d\nu)}\sqrt{\lambda(X)}.$$
   d) Utilizando el teorema de representación de Riesz, mostrar que existe un elemento $h \in L^2(X, d\nu)$ tal que $\displaystyle\int_X fd\lambda = \int_X fhd\nu$.

e) Considerando $f = \mathbb{1}_{h<0}$, verificar que $h \geq 0$ en ν-casi todas partes y considerando $f = \mathbb{1}_{h\geq 1}$, verificar que $h < 1$ en ν-casi todas partes. Esto muestra que se puede escojer un representante de h tal que $0 \leq h(x) < 1$ para todo $x \in X$.

f) Mostrar que para toda función escalonada μ-medible f se tiene

$$T(f) = \int_X f d\lambda = \int_X fh d\mu + \int_X fh d\lambda \qquad \text{y} \qquad T(f(1-h)) = \int_X fh d\mu.$$

Deducir que esto es válido para toda función $f \in L^p(X, d\mu)$ tal que $f \geq 0$.

g) Sea $f \in L^p(X, d\mu)$ tal que $f \geq 0$. Mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\inf(f/(1-h), k) \in L^p$ y deducir

$$T\big(\inf(f/(1-h,k))\big) = \int_X \inf(f/(1-h), k) h d\mu.$$

h) Haciendo $k \to +\infty$ mostrar que

$$T(f) = \int_X f \frac{h}{1-h} d\mu.$$

por lo tanto $g = \frac{h}{1-h}$ conviene.

3. Demostrar en el caso general (es decir sin suponer que μ es finita) que si $T \in (L^p)'$ entonces existe una función g μ-medible tal que $T(f) = \displaystyle\int_X fg d\mu$, para todo función positiva $f \in L^p(X, d\mu)$. Para ello seguir los pasos siguientes:

   a) Utilizando la σ-finitud de la medida μ, mostrar que toda función $f \in L^p(X, d\mu)$ se puede escribir como $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f \mathbb{1}_{K_n}$ en donde $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de X.

   b) Notemos μ_n la restricción de μ a los conjuntos K_n. Si $f \in L^p(K_n, d\mu_n)$ y si $\overline{f}$ es la prolongación por 0 de f a todo el conjunto $X \setminus K_n$, verificar que para la forma lineal $T : f \longmapsto T(\overline{f})$ existe una función g_n medible y positiva sobre K_n tal que $T(\overline{f}) = \displaystyle\int_X f g_n d\mu_n$.

   c) Si notamos g la función que es igual a cada g_n sobre K_n, mostrar que $T(f) = \displaystyle\int_X fg d\mu$.

4. Mostrar que para toda forma lineal $T \in (L^p)'$, existe $g \in L^q$ tal que $\|g\|_{L^q} \leq \|T\|_{L^p \to \mathbb{R}}$.

   a) En el caso $p = 1$ proceder por el absurdo.
      1 − Mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $A = \{|g| > \|T\|_{L^1 \to \mathbb{R}} + \epsilon\}$ sea de medida no nula.
      2 − Si $\psi = |g|/g$ si $g \neq 0$ y 0 sino, mostrar que por un lado $T(\psi \mathbb{1}_{A\cap K_n}) \geq \big(\|T\|_{L^1\to\mathbb{R}} + \epsilon\big)\mu(A \cap K_n)$ y que se tiene por otro lado que $T(\psi \mathbb{1}_{A\cap K_n}) \leq \|T\|_{L^1\to\mathbb{R}}\mu(A \cap K_n)$.
      3 − Deducir que $\|T\|_{L^1\to\mathbb{R}} + \epsilon \leq \|T\|_{L^1\to\mathbb{R}}$ y obtener la contradicción buscada.

   b) En el caso $1 < p < +\infty$.
      1 − Considerando la misma función ψ, definimos $B_n = K_n \cap \{|g| < n\}$ y $f_n = \mathbb{1}_{B_n}\psi|g|^{q-1}$. Mostrar que se tiene $\displaystyle\int_{B_n} |g|^q d\mu = T(f_n)$.
      2 − Verificar que

$$\int_{B_n} |g|^q d\mu \leq \|T\|_{L^p\to\mathbb{R}} \left(\int_{B_n} |g|^q d\mu\right)^{1/p}$$

      3 − Deducir el resultado deseado pasando al límite.

5. Suponiendo que $g \in L^q(X, d\mu)$ y que $T_g = 0$, mostrar que $g = 0$ en μ-casi todas partes.

Hemos identificado el espacio dual de L^p al espacio L^q. Más precisamente hemos mostrado que, para toda forma lineal $T \in (L^p)'$, existe $g \in L^q$ tal que $T = T_g$ y $\|T\|_{L^p\to\mathbb{R}} = \|g\|_{L^q}$.