Ejercicios Lección n°5 &6: Topologías Fuertes, Débiles y Débiles-$*$

EPN, verano 2012

Ejercicio 1 — Para terminar con la dimensión finita: Teorema de Riesz

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. Mostrar que los puntos siguientes son equivalentes

(i) E es de dimensión finita,

(ii) E es localmente compacto,

(iii) $\overline{B(0,1)}$ es un conjunto compacto,

(iv) $B(0,1)$ es un conjunto precompacto.

Ejercicio 2 — Convergencia débil de sucesiones

Sea $x \in c_0(\mathbb{N})$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$.

1. Mostrar que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ débilmente en $c_0(\mathbb{N})$ ssi la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $c_0(\mathbb{N})$ y si $\pi_k(x_n) \longrightarrow \pi_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, en donde $\pi_k : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ son las proyecciones canónicas.
2. Sea $\varphi : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideremos las sucesiones
$$x_n = \big(0, ..., 0, \varphi(\frac{n}{n}), \varphi(\frac{n+1}{n}), ..., \varphi(\frac{n+n}{n}), 0, ...\big) \in c_0(\mathbb{N})$$
Mostrar que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ débilmente y que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es normalmente convergente si y solo si $\varphi = 0$.

Ejercicio 3 — Convergencia débil

1. Sean f y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una función y una sucesión en $L^1([0,1], dx)$. Mostrar que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ débilmente ssi existe un real $M > 0$ tal que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si se tiene $\displaystyle\int_E f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f(x)dx$ para todo conjunto E Lebesgue-medible de $[0,1]$.
2. Para $1 < p < +\infty$ consideramos el espacio $L^p([0,1], dx)$.
   a) Sea f y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una función y una sucesión en $L^p([0,1], dx)$. Mostrar que $f_n \rightharpoonup f$ si y solo si $\displaystyle\int_0^t f_n(x)dx \longrightarrow \int_0^t f(x)dx$ para todo $t \in [0,1]$ y si existe un real $M > 0$ tal que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|^p dx < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores en $[0,1]$ tales que $\big(|a_n|b_n^{1/p}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión acotada y se tenga $a_n b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mostrar que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(x) = a_n \mathbb{1}_{[0,b_n]}(x)$ es débilmente convergente en $L^p([0,1], dx)$.

Ejercicio 4 — Más convergencia débil

Sea $(X, \mathscr{A}, d\mu)$ un espacio medido. Mostrar que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(X, d\mu)$ converge débilmente hacia $f \in L^p(X, d\mu)$ si y solo si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

- si $p = 1$, para todo $A \in \mathscr{A}$ se tiene $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$
- si $p > 1$, para todo $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ se tiene $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Ejercicio 5 — Convergencia débil-$*$

1. Sea $x_0 \in \ell^1(\mathbb{N})$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Mostrar que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ débilmente-$*$ si y solo si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en ℓ^1 y si para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi_k(x_n) \longrightarrow \pi_k(x_0)$, en donde π_k son las proyecciones canónicas.
2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores reales. Definimos las formas lineales $T_n \in (c_0)'$ por $T_n(x_0, ..., x_n, ...) = a_n x_n$ para todo $(x_0, ..., x_n, ...) \in c_0(\mathbb{N})$. Mostrar que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente-$*$ convergente si y solo si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Mostrar que en este caso se tiene $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ débilmente-$*$.

Ejercicio 6 — Continuidad en topologías débiles y débiles-$*$

Sea X un espacio compacto separado. Para todo $x \in X$ definimos la funcional de Dirac por

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathcal{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \delta_x(f) = f(x) \end{array}$$

1. Mostrar que $\delta_x \in (\mathcal{C}(X))'$ para todo $x \in X$.
2. Mostrar que la aplicación $\varphi : X \longrightarrow (\mathcal{C}(X))'$ determinada por $\varphi(x) = \delta_x$ es continua en la topología débil-$*$ de $(\mathcal{C}(X))'$.

Ejercicio 7 — Un poco de patologías en ℓ^1

1. Mostrar que la bola unidad $\overline{B(0,1)}$ de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es metrizable para la topología débil-$*$.
2. Sean $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ débilmente. Para $\epsilon > 0$ definimos los conjuntos B_m con $m \geq 1$ por:
$$B_m = \bigcap_{n\geq m} \big\{T \in \overline{B(0,1)}_{\ell^\infty} : |T(x_n) - T(x)| \leq \epsilon/3\big\}.$$
   a) Mostrar que B_m es un conjunto débilmente-$*$ cerrado en ℓ^∞ para todo $m \geq 1$.
   b) Verificar que $\overline{B(0,1)} = \bigcup_{m\geq 1} B_m$.
3. Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ débilmente, mostrar que se tiene $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ en la topología fuerte de ℓ^1. Deducir el teorema de Schur:

   En el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$, la convergencia de sucesiones es equivalente en la topología débil y en la topología fuerte.

   Seguir las siguientes etapas:

   a) Verificar que $\overline{B(0,1)}$ es un espacio métrico compacto.
   b) Mostrar que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{\overline{B_{m_0}}} \neq \emptyset$ y deducir que $\overset{\circ}{B}_{m_0} \neq \emptyset$.
   c) Verificar que existe entonces $T_0 \in \overline{B(0,1)}$, $a_1, ..., a_k \in \ell^1$ y $\tau > 0$ tales que
$$W_{T_0,a_1,...,a_k,\tau} \cap \overline{B(0,1)} \subset B_{m_0}.$$
   d) Mostrar que existe $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que
$$W_{T_0,e(1),...,e(j),\delta} \cap \overline{B(0,1)} \subset W_{T_0,a_1,...,a_k,\tau} \cap \overline{B(0,1)}$$
   e) Verificar que existe $m > m_0$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} |x_n^i - x^i| \leq \epsilon/3$ para todo $n \geq m$.
   f) Definiendo $T = (T_0^1, T_0^2, ..., T^j, sgn(x_n^{j+1} - x^{j+1}), ...) \in \ell^\infty$, verificar que
$$\|x_n - x\|_{\ell^1} \leq 2\sum_{i=1}^{j} |x_n^i - x^i| + |T(x_n - x)|.$$

4. Deducir entonces que $\|x_n - x\|_{\ell^1} \longrightarrow 0$.

Cuidado! La convergencia de sucesiones **no** es suficiente para caracterizar una topología: al ser $\ell^1(\mathbb{N})$ un espacio de dimensión infinita, la topología fuerte y la topología débil son realmente *distintas*. Este resultado nos dice que si nos concentramos únicamente en estudiar la convergencia de las sucesiones, entonces hay un punto de vista equivalente.