Ejercicios Lección n°7 & 8: Reflexividad y Envolturas Convexas

EPN, verano 2012

Ejercicio 1 — Teorema de James

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Mostrar que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

- E es reflexivo,
- Toda forma lineal continua sobre E realiza su norma sobre la bola unidad cerrada de E.

Ejercicio 2 — Espacios reflexivos y espacios no reflexivos

1. Mostrar que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos.
2. Mostrar que los espacios $L^p(\mathbb{R}, dx)$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos.
3. Mostrar que los espacios $c_0(\mathbb{N})$, $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\mathcal{C}_a([a,b], \mathbb{R})$ no son reflexivos.

Ejercicio 3 — Convergencia débil en espacios reflexivos

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ una sucesión acotada de E. Para todo $n \geq 1$ notamos $K_n = \overline{co}\{x_n, x_{n+1}, ...\}$.

1. Mostrar que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \in E$ débilmente entonces $\bigcap_{n\geq 1} K_n = \{x_0\}$.
2. Mostrar que si E es un espacio reflexivo y si se tiene $\bigcap_{n\geq 1} K_n = \{x_0\}$ con $x_0 \in E$, entonces se tiene $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \in E$ débilmente.
3. Dar un contraejemplo que muestre que el segundo punto es falso si el espacio E no es reflexivo.

Ejercicio 4 — Cantor y reflexividad

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach.

1. Mostrar que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:
   - E es reflexivo,
   - Para toda sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos convexos no vacíos y cerrados de E, tales que $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ no es vacío.
2. Para todo $n \geq 1$ definimos el conjunto

$$K_n = \{x \in c_0(\mathbb{N}) : \|x\|_\infty \leq 1 \quad x_k = 1, \quad k = 1, ..., n\}.$$

   a) Mostrar que K_n es un conjunto convexo, no vacío, cerrado y acotado y que se tiene $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \geq 1$.
   b) Verificar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$.
   c) ¿Porqué no se tiene la propiedad de Cantor del primer punto?

Ejercicio 5 — Dual de ℓ^∞

1. Mostrar que para toda forma lineal continua $T \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$, existe una única medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada tal que $\mu(A) = T(\chi_A)$ para todo $A \subset \mathbb{N}$ en dónde $\chi_A = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión definida por $x_n = 1$ si $n \in A$, $x_n = 0$ sino.
2. Verificar que se tiene $|\mu|(\mathbb{N}) \leq \|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{R}}$, en dónde $|\mu|$ es la variación total de la medida μ.

3. Recíprocamente, mostrar que para toda medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, existe un único elemento $T \in (\ell^\infty)'$ tal que $\mu(A) = T(\chi_A)$ para todo $A \subset \mathbb{N}$ y que se tiene $\|T\|_{\ell^\infty \to \mathbb{R}} \leq |\mu|(\mathbb{N})$.

Ejercicio 6 — Conjuntos extremales

1. Determinar el conjunto de los puntos extremales de la bola unidad del espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$.
2. ¿Qué se puede deducir sobre el espacio $c_0(\mathbb{N})$?