Lección n°1: Aplicaciones Lineales

EPN, verano 2012

Introducción

Algunas fechas:

- $\sim$ 1907: Noción de *Operador lineal* presente en los trabajos de F. Riesz, E. Fischer, M. Fréchet y J. Hadamard
- 1932: publicación del libro "Théorie des opérateurs linéaires" de Stefan Banach
- 1936-1953: estudio detallado de la noción de *dual topológico* por el grupo Bourbaki

Objetivo del curso: comprender la teoría relacionada a las aplicaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los espacios funcionales generales.

1. Definiciones y primeras propiedades

Las nociones que presentamos son familiares puesto que muchas de ellas provienen del álgebra lineal.

Definición 1 (Aplicación lineal) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Diremos que una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} T : D \subset E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

definida sobre un subespacio vectorial D de E a valores en F es una aplicación lineal *si se tiene la identidad*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \tag{1}$$

para todo $x, y \in D \subset E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Definición 2 (Dominio, rango y núcleo) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal.*

1) *El* dominio de definición *de T será notado $D(T)$.*
2) *Definimos el* rango *de T como el conjunto $R(T) = \{y \in F : y = T(x),\ x \in D(T)\}$.*
3) *El* núcleo *de T está determinado por el conjunto $Ker(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$.*

Definición 3 (Forma lineal real o compleja) *Sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal.*

1) *Si el rango $R(T)$ está contenido en el cuerpo escalar $\mathbb{R}$, diremos que T es una* forma lineal real *sobre $D(T)$.*
2) *Si el rango $R(T)$ está contenido en el cuerpo escalar $\mathbb{C}$, diremos que T es una* forma lineal compleja *sobre $D(T)$.*

Definición 4 (Aplicación sublineal, cuasi-lineal) *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y sea F un cuerpo totalmente ordenado.*

1) Diremos que una aplicación

$$\begin{array}{rcl} T: D \subset E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

es una aplicación sublineal *si*

(a) se tiene la identidad $T(\alpha x) = |\alpha| T(x)$ para todo $x \in D \subset E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$,

(b) se tiene la desigualdad

$$T(x+y) \leq T(x) + T(y). \tag{2}$$

para todo $x, y \in D \subset E$.

2) Si existe una constante $K > 1$ tal que se tenga

$$T(x+y) \leq K\big(T(x) + T(y)\big) \tag{3}$$

diremos entonces que la aplicación T es cuasi-lineal.

Ejemplos:

(i) Consideremos el espacio vectorial $E = M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices cuadradas $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ a coeficientes en $\mathbb{K}$. Definimos la aplicación traza T de una matriz por

$$\begin{array}{rcl} T: M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & T(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{array}$$

$\longrightarrow T$ es una forma lineal.

(ii) Sea $E = \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas y acotadas[1] definidas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} T: \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f)(x) = x^3 f(x). \end{array}$$

$\longrightarrow T$ es una aplicación lineal.

(iii) Consideremos $E = \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, dx)$ el espacio de funciones integrables con respecto a la medida de Lebesgue dx y definamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} I: \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, dx) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & I(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx. \end{array}$$

$\longrightarrow I$ es una forma lineal.

(iv) Sea ahora $E = \mathcal{C}_a^1([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas y acotadas, a derivadas continuas y acotadas[2], definidas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} S: \mathcal{C}_a^1([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & S(f)(x) = \dfrac{d}{dx} f(x). \end{array}$$

$\longrightarrow S$ es una aplicación lineal.

[1] Recordar que $\mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

[2] $\mathcal{C}_a^1([0,1], \mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_{\mathcal{C}_a^1([0,1])} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |\frac{d}{dx} f(x)|$.

(v) Sea $E = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio de Lebesgue de funciones de potencia p-eme integrables a valores en $\mathbb{K}$. Definimos la aplicación N_p por

$$\begin{array}{rcl} N_p : L^p(\mathbb{R}^n, dx) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & N_p(f) = \begin{cases} \|f\|_{L^p} = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty} = \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess|f(x)| & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \end{array}$$

$\longrightarrow N_p$ es una aplicación sublineal.

(vi) Sea $E = \mathbb{R}^n$. Para todo $0 < p < 1$ definimos la aplicación $n_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$n_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

$\longrightarrow n_p$ es una aplicación cuasi-lineal.

Definición 5 (Operaciones entre aplicaciones lineales)

1) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sean T y S dos aplicaciones lineales con $D(T), D(S) \subseteq E$ y $R(T), R(S) \subseteq F$.*

   a) *El* producto escalar *αT está dado por $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$ para todo $x \in D(T)$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.*

   b) *La* suma *$T + S$ está definida como $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ para todo $x \in D(T) \cap D(S)$.*

2) *Sean E,F,G tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ y si $S : D(S) \subset F \longrightarrow G$ son dos aplicaciones lineales, entonces la* composición *$S \circ T$ está definida por la fórmula $S \circ T(x) = S(T(x))$ para todo $x \in \{x \in E : x \in D(T) \text{ y } T(x) \in D(S)\}$.*

Proposición 1 *Las aplicaciones αT, $T + S$ y $S \circ T$ recién definidas son aplicaciones lineales.*

Observación 1 Cuidado: $S \circ T \neq T \circ S$
Tomar ejemplos (ii) y (iv). Calcular $S \circ T$ y $T \circ S$ para obtener

$$[T, S]f = (T \circ S - S \circ T)(f) = T(S(f)) - S(T(f)) \neq 0$$

Proposición 2 (Espacio de aplicaciones lineales $\mathscr{L}^\star(E, F)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. El conjunto de las aplicaciones lineales definidas sobre todo E y a valores en F es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y será notado $\mathscr{L}^\star(E, F)$.*

Definición 6 (Espacio de aplicaciones lineales continuas $\mathscr{L}(E, F)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos. Notaremos el conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F por $\mathscr{L}(E, F)$.*

Es evidente que el conjunto $\mathscr{L}(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}^\star(E, F)$.

Definición 7 (Espacio dual algebraico $E^\star$ y dual topológico E')

1) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El dual algebraico $E^\star$ de E está definido como el conjunto de formas lineales definidas sobre E. Es decir $E^\star = \mathscr{L}^\star(E, \mathbb{K})$.*

2) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. El dual topológico E' de E está definido como el conjunto de formas lineales continuas definidas sobre E. Es decir $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.*

2. Continuidad de las aplicaciones lineales

Recordemos que un espacio vectorial es un *espacio vectorial topológico* si su estructura vectorial es compatible con la estructura topológica.

Proposición 3 *Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Una aplicación lineal T definida sobre $D(T) \subseteq E$ en F es continua en todo su dominio si y solo si es continua en el vector cero.*

Prueba. Si la aplicación T es continua en todo punto es continua en el vector cero. Recíprocamente, puesto que la aplicación traslación $\psi_\tau : x \longmapsto x + \tau$ en el espacio vectorial E es continua; por composición de aplicaciones continuas deducimos que si una aplicación lineal es continua en el vector cero entonces es continua en todo su dominio. ■

Observación 2 Esta proposición muestra que en el caso muy especial de las aplicaciones lineales sobre espacios vectoriales topológicos, es suficiente estudiar su continuidad en un sólo punto. Por comodidad hemos fijado este punto como el origen, pero bien puede ser cualquier otro punto.

Corolario 1 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos, $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua si y solo si para toda vecindad W del origen de F existe una vecindad V del origen de E tal que $x_0 - x \in V$ implica $T(x_0) - T(x) \in W$. Es decir si se tiene $T(V) \subset W$.*

Prueba. Por la proposición anterior, tiene sentido estudiar la continuidad únicamente en vecindades del origen.
$\Longrightarrow$ Sea pues W una vecindad del origen de F, si T es una aplicación lineal continua, entonces por definición de continuidad en los espacios topológicos generales se tiene $T(V) \subset W$ para alguna vecindad V del origen de E.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, si $x_0 - x \in V$, la linealidad de T implica que $T(x_0) - T(x) = T(x_0 - x) \in W$. Esto muestra que la aplicación T envía la vecindad $x+V$ del vector x en la vecindad $T(x)+W$ de $T(x)$; es decir que la aplicación T es continua en el punto x. ■

A) Espacios vectoriales topológicos localmente convexos

Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ y $(F, (q_j)_{j\in J})$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos dotados cada uno de ellos de una familia de semi-normas. Recuérdese que una semi-norma $p : E \longrightarrow [0, +\infty[$ definida sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial verifica las dos propiedades

(SN.1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(SN.2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.

A partir de estas semi-normas se define las semi-bolas $B_p(0, r) = \{x \in E : p(x) < r\}$. Una vecindad del origen de un espacio vectorial topológico localmente convexo $(E, (p_i)_{i\in I})$ está dada por el conjunto

$$V = \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon_i,\ i \in K\} \tag{4}$$

en donde K es una familia finita de índices y $(\varepsilon_i)_{i\in K}$ es una familia de reales positivos.

Supondremos siempre que la familia de semi-normas satisface el axioma de separación: la topología determinada por este tipo de vecindades es separada.

Definición 8 *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ y $(F, (q_j)_{j\in J})$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos. La función $f : E \longrightarrow F$ en un punto $x_0 \in E$ es continua si, para todo $q \in (q_j)_{j\in J}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de índices $K = \{i_1, ..., i_k\} \subset I$ tal que, para todo $x \in E$ se tiene la implicación*

$$p_{i_k}(x - x_0) \leq \delta_{i_k} \Longrightarrow q(f(x) - f(x_0)) \leq \varepsilon, \tag{5}$$

en donde $\delta_{i_k} > 0$ para todo $i_k \in K$.

Teorema 1 (Continuidad de las Aplicaciones Lineales en los e.l.c.) *Sean* $(E, (p_i)_{i\in I})$ *y* $(F, (q_j)_{j\in J})$ *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales topológicos localmente convexos separados. Entonces se tiene que una aplicación lineal* T*, definida sobre* $D(T) \subseteq E$ *a valores en* F*, es* continua *si y solo si para cada semi-norma* $q \in (q_j)_{j\in J}$ *existe una familia finita* $K \subset I$ *de índices y una constante positiva* C *tal que:*

$$q(T(x)) \leq Cp_i(x), \qquad \text{para todo } i \in K \text{ y todo } x \in D(T). \tag{6}$$

Demostración. Vemos que si se tiene (6), se obtiene inmediatamente la continuidad de la aplicación T en el origen. Supongamos ahora que T es continua en el origen y verifiquemos que se tiene (6): puesto que se tiene para toda semi-norma $q \in (q_j)_{j\in J}$ y para todo $\varepsilon > 0$, que existe una familia finita de índices $K \subset I$ tales que $p_{i_k}(x) \leq \delta_{i_k} \Longrightarrow q(T(x)) \leq \varepsilon$; utilizando la linealidad de la aplicación T y la propiedad (SN.1) de las semi-normas, vemos que esta implicación es equivalente a la condición $q(T(x)) \leq Cp_i(x)$. ■

Observación 3 La estimación (6) puede escribirse de manera equivalente como $q(T(x)) \leq C\max\limits_{i\in K} p_i(x)$ o como $q(T(x)) \leq C\sum\limits_{i\in K} p_i(x)$.

Definición 9 (Conjunto acotado en un e.v.t.) *Sea* E *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial topológico. Diremos que un subconjunto* A *de* E *es* acotado en el sentido de los espacios vectoriales topológicos*, si para toda vecindad* V *del origen de* E*, existe un número real* $\sigma > 0$ *tal que* $A \subset \tau V$ *para todo* $\tau > \sigma$*.*

- Un conjunto A es acotado en el sentido métrico si $diam(A) < C$.
- Cuando un espacio vectorial topológico E está dotado con una distancia d_E compatible con la estructura topológica, las nociones de acotación en el sentido de la definición 9 y de acotación en el sentido métrico no coinciden necesariamente.
- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado y si d_E es la distancia inducida por la norma.

Proposición 4 (Continuidad y conjuntos acotados) *Sean* $(E, (p_i)_{i\in I})$ *y* $(F, (q_j)_{j\in J})$ *dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos separados y* $T : E \longrightarrow F$ *una aplicación lineal.*

1) *Si* T *es una aplicación continua entonces la imagen por medio de* T *de todo conjunto acotado de* E *es un conjunto acotado de* F*.*
2) *Si* E *es un espacio vectorial topológico locamente convexo metrizable y si la imagen de* T *de toda sucesión convergente hacia* $0 \in E$ *es acotada, entonces la aplicación* T *es continua.*

Prueba.

1) Sea pues A un conjunto acotado de E y sea V una vecindad del origen de F. Dado que la aplicación T es continua, la preimagen $T^{-1}(V)$ de V por T es una vecindad del origen de E. Existe entonces un real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \sigma T^{-1}(V)$ y esto implica que $T(A) \subset \sigma V$, de donde se obtiene que $T(A)$ es un conjunto acotado de F.
2) Supongamos que E es metrizable pero que la aplicación T no es continua. Consideremos una sucesión decreciente de vecindades $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del origen de $0 \in E$. Entonces existe una vecindad de $0 \in F$, que podemos suponer de la forma dada por la fórmula (4), es decir $W = B_{r,q}(0)$ con $r > 0$, tal que $T(\frac{1}{n}V_n) \nsubseteq W$ para todo $n \geq 1$. Existe por lo tanto un punto $x_n \in V_n$ tal que $q_j(T(x_n)) \geq nr$. Se construye de esta forma una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E que converge hacia $0 \in E$ pero tal que la cantidad $T(x_n)$ no es acotada; de donde se obtiene una contradicción y el resultado buscado. ■

Corolario 2 (Comparación de Topologías en los e.l.c.) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y sean $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ dos sistemas de semi-normas definidas sobre E. Entonces:*

1) *La topología definida por la familia de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ es* menos fina *que la estructura topológica determinada por la familia $(q_j)_{j\in J}$ si y solo si, para todo $i \in I$, existe una parte finita K de J y una constante $C \geq 0$ tales que*

$$p_i(x) \leq Cq_j(x), \quad \text{para todo } x \in E \text{ y para todo } j \in K. \tag{7}$$

2) *Las dos familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ son* equivalentes *si determinan la misma estructura topológica. Es decir si además de verificar (7), se tiene que para todo $j \in J$, existe una familia finita $L \subset I$ y una constante $C' > 0$ tal que*

$$q_j(x) \leq C'p_i(x), \quad \text{para todo } x \in E \text{ y para todo } i \in L.$$

Prueba.
$\Longrightarrow$ Para el primer punto empecemos notando respectivamente $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ las topologías determinadas sobre el conjunto E por las familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$. Supongamos luego que la topología $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$ y consideremos la aplicación identidad $Id : (E, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (E, \mathcal{T}_1)$. Aplicando el teorema 1 obtenemos que para toda semi-norma p_i existe una familia finita de índices $K \subset J$ y una constante $C > 0$ tales que $p_i(Id(x)) = p_i(x) \leq Cq_j(x)$ para todo $x \in E$ y todo $j \in K$, y de esta manera se obtiene la propiedad (7). Recíprocamente, si tenemos (7), esto significa que todo abierto U de la topología $\mathcal{T}_1$ está contenido en un abierto de la topología $\mathcal{T}_2$, lo que implica que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ y por lo tanto que $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$. En efecto, se tiene que una vecindad centrada en el origen U de $\mathcal{T}_1$ se escribe $U = \{x \in E : p_{i_k}(x) < \varepsilon_k, \quad k = 1, ..., n\}$ para un sistema finito de semi-normas $p_{i_1}, ..., p_{i_n}$, de manera que si se tiene (7), entonces la vecindad U está contenida en un abierto $V = \{x \in E : q_{j_k}(x) < \delta_k, \quad k = 1, ..., n\}$.
$\Longrightarrow$ El segundo punto se deduce del primero: en efecto, se tiene por un lado que todo abierto de la topología $(E, (p_i)_{i\in I})$ es un abierto para la topología $(E, (q_j)_{j\in J})$ y por otro lado que todo abierto de la topología $(E, (q_j)_{j\in J})$ es un abierto para la topología $(E, (p_i)_{i\in I})$. Se obtiene entonces que la estructura topológica engendrada por estas dos familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ es la misma. ■

Corolario 3 (Continuidad de las Formas Lineales en los e.l.c.) *Si $(E, (p_i)_{i\in I})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y si $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces T es continua si y solo si existe una familia finita de índices $K \subset I$ y una constante positiva C tales que*

$$|T(x)| \leq Cp_i(x), \quad \text{para todo } i \in K \text{ y todo } x \in D(T). \tag{8}$$

B) Espacios vectoriales normados

En este caso, los resultados son más fáciles de enunciar:

Teorema 2 (Continuidad de las Aplicaciones Lineales en los e.v.n.) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y sea T una aplicación lineal de E en F. Las cuatro propiedades siguientes son equivalentes:*

1) *la aplicación T es continua,*

2) *la aplicación T es continua en el orígen,*

3) *la aplicación T es uniformemente continua sobre $D(T)$,*

4) *existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in D(T)$ se tiene*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E. \tag{9}$$

Demostración. Por la proposición 3 se tiene *1)* $\iff$ *2)*. Es evidente que *3)* $\Longrightarrow$ *2)* y, por el teorema 1, se tiene que *2)* $\Longrightarrow$ *4)*. Solo nos queda entonces por verificar que *4)* $\Longrightarrow$ *3)* lo cual se deduce inmediatamente de la definición de continuidad uniforme y de la estimación:

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E.$$

Nótese en particular que la desigualdad anterior expresa que la aplicación T es C-lipschitziana. ■

Observación 4 Es muy importante notar que, para las aplicaciones lineales, existe *equivalencia* entre las nociones de continuidad, continuidad en el punto cero, continuidad uniforme y aplicaciones lipschitzianas. El lector debe tener mucho cuidado en no utilizar y aplicar estas equivalencias a aplicaciones que no son lineales.

(i) Empecemos con el punto (ii) de la página 2. Tenemos directamente la mayoración

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^3 f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

de donde se deduce la continuidad de T.

(ii) Estudiemos ahora la continuidad del ejemplo (iii) de la página 2, pero tomando $E = L^1(\mathbb{R}^n, dx)$. Dado que la mayoración

$$|I(f)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^1} \tag{10}$$

es válida para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, se obtiene la continuidad de la aplicación I.

(iii) Veamos ahora un ejemplo de una aplicación lineal que no es continua. Consideremos el espacio vectorial normado real E determinado por $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_*)$ en donde la norma $\|\cdot\|_*$ está dada por medio de la fórmula

$$\|f\|_* = \int_0^1 |f(x)|dx. \tag{11}$$

Determinamos entonces una aplicación $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $T(f) = f(0)$.
$\longrightarrow$ Verificar que T es una aplicación lineal.

Definimos ahora la sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ determinada por

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \end{array} \tag{12}$$

Nótese ahora que, para todo $n \geq 1$, se tiene $T(f_n) = f_n(0) = 1$ y que $\|f_n\|_* = \frac{1}{2n}$. De estos cálculos se deduce que la función f_n tiende hacia la función cero $f \equiv 0$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|_*$, pero que la sucesión $T(f_n)$ no converge hacia $T(f) = 0$ y por lo tanto la aplicación T no es una aplicación lineal continua sobre E. Nótese además que no se tiene desigualdad (9).

Observación 5 Más generalmente, en un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión infinita siempre existen formas lineales que no son continuas. En efecto, sea $(e_i)_{i\in I}$ una base de E y supongamos que $\|e_i\|_E = 1$. Sea ahora $(c_i)_{i\in I}$ una familia no acotada de $\mathbb{R}$ y definamos la forma lineal $T(e_i) = c_i$. Vemos entonces que no existe una constante $C > 0$ tal que $|T(e_i)| = |c_i| < +\infty$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, por el punto 3) del teorema 2 tenemos que T no es continua.

Observación 6 Es necesario tener cuidado con algunos atajos lingüísticos que pueden ser una fuente de errores: *una aplicación nunca es continua por sí misma, sino que es continua con respecto a una cierta estructura topológica.*

Para ilustrar este hecho, consideramos el ejemplo (iii) anterior. Vimos con la sucesión de funciones (12) que la aplicación lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(0)$ *no es continua* con respecto a la estructura topológica determinada por la norma $\| \cdot \|_*$.

Consideremos ahora $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Vemos entonces que

$$|T(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty,$$

de donde se deduce por el teorema 2 que la aplicación lineal T es continua con respecto a la estructura topológica generada por la norma $\| \cdot \|_\infty$. Este ejemplo muestra la *dependencia* de la continuidad con respecto a las normas consideras.

Proposición 5 *Sean $(E, \| \cdot \|_E)$ y $(F, \| \cdot \|_F)$ dos espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ es continua si y solo si la imagen de todo conjunto acotado es acotada.*

Prueba. Sabemos por la proposición 4 que si T es continua entonces la imagen de todo conjunto acotado de E es acotada en F. Para la recíproca, dado que en los espacios normados los conjuntos acotados pueden caracterizarse por las bolas determinadas por la norma correspondiente, el hecho que la imagen por medio de la aplicación T de todo conjunto acotado de E sea un conjunto acotado de F se escribe

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

que es justamente la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales en los espacios normados. ■

Observación 7 Este resultado muestra la importancia de los conjuntos acotados pues permite caracterizar la continuidad de las aplicaciones lineales. Hay que tener entonces un poco de cuidado pues, cuando se trabaja en el marco muy especial de aplicaciones lineales, la acotación es sinónimo de continuidad.

Corolario 4 (Comparación de Topologías en los e.v.n.) *Sea E un espacio vectorial normado y sean $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ dos normas definidas sobre E.*

1) *La topología $(E, \| \cdot \|_1)$ es* menos fina *que la topología $(E, \| \cdot \|_2)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \text{para todo } x \in E.$$

2) *Las topologías $(E, \| \cdot \|_1)$ y $(E, \| \cdot \|_2)$ son* equivalentes *si y solo si existen dos constantes $C, C' > 0$ tales que*

$$C'\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Por extensión, diremos que las normas $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ son equivalentes *y lo notaremos $\|x\|_1 \simeq \|x\|_2$.*

Definición 10 (Isometría, Isomorfismo) *Sean $(E, \| \cdot \|_E)$ y $(F, \| \cdot \|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ es*

1) *una* isometría *entre los espacios E y F si y solo si $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$,*

2) *un* isomorfismo *entre los espacios E y F si y solo si T es biyectiva y T y su inversa T^{-1} son continuas.*

Corolario 5 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal T de E en F con dominio de definición $D(T) \subseteq E$ admite una aplicación inversa continua T^{-1} si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_F \geq C\|x\|_E \qquad \text{para todo } x \in D(T). \tag{13}$$

Prueba. Si se tiene la desigualdad anterior, entonces $T(x) = 0$ implica $x = 0$. Por lo tanto, la inversa T^{-1} existe, está bien definida y la continuidad de la aplicación T^{-1} se deduce entonces del teorema 2. ■

3. Norma de una aplicación lineal

Una de las definiciones más importantes:

Definición 11 (Norma de una aplicación lineal continua) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Definimos la* norma de la aplicación lineal continua T *como la cantidad*

$$\|T\|_{E\to F} = \text{ínf}\left\{C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E\right\} \tag{14}$$

Cuando no hay confusión posible entre los espacios E y F, notaremos $\|T\|$ en vez de $\|T\|_{E\to F}$.

Verifiquemos rápidamente que la fórmula (14) define una norma: en efecto, se tiene sin mayor problema que $\|T\|_{E\to F} = 0$ si y solo si la aplicación lineal continua T es nula; mientras que la homogeneidad, así como la desigualdad triangular, se deducen directamente de las propiedades de la norma $\|\cdot\|_F$.

Observación 8 Tenemos de esta forma que, cuando los espacios E y F son espacios vectoriales normados, el espacio $(\mathscr{L}(E, F), \|\cdot\|_{E\to F})$ es también un espacio vectorial normado.

Notamos, por la linealidad de la aplicación T y por el teorema 2-4) de caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales en los espacios normados, que tenemos las identidades siguientes:

$$\|T\|_{E\to F} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}. \tag{15}$$

Nótese que en la práctica se utiliza constantemente la estimación

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{E\to F}\|x\|_E, \qquad (\forall x \in E) \tag{16}$$

en donde la cantidad $\|T\|_{E\to F}$ es la norma de T y es por definición la más pequeña constante tal que esta desigualdad es válida para todo $x \in E$.

Notación: Dado que hemos adoptado la notación clásica $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$; notaremos entonces la norma $\|\cdot\|_{E\to\mathbb{K}}$ de esta manera $\|\cdot\|_{E'}$.

Ejemplo de cálculo de la norma de una aplicación lineal.

Consideramos el espacio normado $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_*)$ en donde $\|f\|_* = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Definimos ahora una aplicación lineal $T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ por medio de la expresión $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Verificar que T es lineal es inmediato por las propiedades de la integral; vemos además que si $g = T(f)$, entonces g es la primitiva que se anula en 0 de una aplicación continua y es por lo tanto una aplicación continua. Es decir que $T(f) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Finalmente, ver que esta aplicación T es continua se obtiene por la desigualdad

$$\|T(f)\|_* = \int_0^1 |Tf(x)|dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|dtdx \leq \|f\|_*.$$

A partir de esta estimación, vemos que si $\|f\|_* = 1$ entonces $\|T(f)\|_* \leq 1$ y por la fórmula (15) se tiene que la norma de $\|T\|_{E\to E}$ verifica $\|T\|_{E\to E} \leq 1$. Vamos a ver que se tiene $\|T\|_{E\to E} = 1$. Para ello consideramos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(t) = (n + 1)(1 - t)^n$, de manera que $\|f_n\|_* = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos además que $T(f_n)(x) = 1-(1-x)^{n+1}$ y que $\|T(f_n)\|_* = 1-\frac{1}{n+2}$. De esta manera se obtiene que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T(f_n)\|_* = 1$, pero como la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto de todas las funciones de E de norma 1, se tiene $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T(f_n)\|_* \leq \sup\limits_{\|f\|_*=1} \|T(f)\|_*$, de donde se deduce que $\|T\|_{E\to E} = 1$.