Lección n°2: Teorema de Hahn-Banach

EPN, verano 2012

1. Forma analítica

Empecemos directamente con la primera versión de este teorema.

Teorema 1 (de prolongación de Hahn-Banach) *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y p una semi-norma definida sobre E. Sean $W \subset E$ un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial y $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in W$.*

Entonces existe una forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$, definida sobre todo el espacio E, que prolonga *f en el sentido siguiente: se tiene $T(x) = f(x)$ para todo $x \in W$. Además la forma lineal T verifica la desigualdad $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Es muy importante notar la generalidad de este resultado:
$\Longrightarrow$los espacios considerados son espacios vectoriales generales, pero la estructura subyacente está concentrada en las propiedades de la semi-norma p.

Demostración. Descomponemos la demostración en dos etapas según si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

A) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$\Longrightarrow$ *Prolongación*: supongamos para empezar que el subespacio vectorial W es de codimensión 1 en E:

$$E = W + x_0\mathbb{R} = \big\{x = w + \alpha x_0 : w \in W \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

para algún vector $x_0 \neq 0$ de E. Como $x_0 \notin W$, esta representación de $x \in E$ es única y por lo tanto, para algún número real c, podemos definir

$$T(x) = T(w + \alpha x_0) = f(w) + \alpha c. \tag{1}$$

Obtenemos de esta manera una aplicación $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ -que está definida sobre todo E- que es lineal puesto que se tiene $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ para todo $x, y \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y que además es una extensión de la forma lineal f dada inicialmente sobre el subespacio W.

$\Longrightarrow$ *Estimación*: Para verificar la desigualdad $|T(x)| \leq p(x)$, es suficiente estudiar $T(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. En efecto, a partir de esta desigualdad se tiene $-p(-x) \leq -T(-x) = T(x)$ por la linealidad de la aplicación T y por las propiedades de la semi-norma p.
Concentrémonos en obtener la estimación $T(x) \leq p(x)$. Se trata entonces de escoger el real c utilizado en la definición de T dada con la fórmula (1) de manera a obtener

$$T(x) = f(w) + \alpha c \leq p(w + \alpha x_0)$$

para todo $w \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Como por hipótesis se tiene esta estimación cuando $\alpha = 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha \neq 0$. Vamos ahora a dividir ambos lados de esta desigualdad por α y obtenemos los dos puntos siguientes:

$$f\left(\frac{w}{\alpha}\right) + c \quad \leq \quad p\left(\frac{w}{\alpha} + x_0\right); \quad \text{si } \alpha > 0$$

$$f\left(\frac{w}{-\alpha}\right) - c \quad \leq \quad p\left(\frac{w}{-\alpha} - x_0\right); \quad \text{si } \alpha < 0$$

Notamos ahora $y_1 = w/\alpha$ y $y_2 = -w/\alpha$, de manera que podemos juntar estos dos puntos en uno solo y obtener

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq c \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Podemos afirmar que este número real c siempre existe puesto que se tiene la mayoración

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) = p(y_1 + x_0 + y_2 - x_0) \leq p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0).$$

Debemos finalmente escoger c entre los dos números reales

$$\sup_{y_2 \in W} \big(f(y_2) - p(y_2 - x_0)\big) \quad \text{y} \quad \inf_{y_1 \in W} \big(p(y_1 - x_0) - f(y_1)\big),$$

y esto termina la demostración en el caso cuando W es de codimensión igual a 1.

Para pasar al caso general, utilizaremos el *lema de Zorn*.
$\Longrightarrow$ Consideremos la familia $\mathcal{X}$ formada por todas las parejas (V, T) en donde V es un subespacio vectorial de E que contiene W y $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal que prolonga f tal que $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$.
$\Longrightarrow$ La familia $\mathcal{X}$ puede ser ordenada utilizando la relación siguiente: diremos que $(V_1, T_1) \prec (V_2, T_2)$ si se tiene la inclusión $V_1 \subset V_2$ y si se tiene que la restricción de T_2 a V_1 es igual a T_1, es decir si $T_{2|V_1} = T_1$.
$\Longrightarrow$ Mostremos ahora que la familia $\mathcal{X}$ es un conjunto inductivo:

- notamos que la familia $\mathcal{X}$ no es vacía pues contiene la pareja (W, f).
- si $(V_i, T_i)_{i\in I}$ es una familia totalmente ordenada de $\mathcal{X}$, se tiene que $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ es un subespacio vectorial de E que contiene W y existe una forma lineal T definida sobre V tal que $T_{|V_i} = T_i$. Se obtiene entonces que la pareja (V, T) es un mayorante de la familia $(V_i, T_i)_{i\in I}$.

Con esto hemos demostrado que $\mathcal{X}$ es un conjunto inductivo y podemos aplicar el lema de Zorn, obteniendo de esta forma que la familia $\mathcal{X}$ admite un elemento maximal que notaremos (V, T). Para terminar hay que verificar que $V = E$. En efecto, si $E \neq V$, existe un vector $x_0 \in E \setminus V$ y podemos definir el conjunto $V' = V + x_0\mathbb{R}$. Por la primera parte podemos prolongar T en una forma lineal T' definida sobre V'. De esta forma hemos construido un elemento (V', T') de $\mathcal{X}$ que es estrictamente más grande que (V, T), contradiciendo la maximalidad de (V, T).

B) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: para la parte compleja del teorema de Hahn-Banach, necesitaremos el lema a continuación.

Lema 1 *Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $T : E \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma lineal compleja. Entonces $S = \mathfrak{Re}(T)$ es una forma lineal real sobre E. Recíprocamente, si S es una forma lineal real sobre E, entonces existe una única forma lineal compleja T sobre E tal que $S = \mathfrak{Re}(T)$ dada por $T(x) = S(x) - iS(ix)$.*

Prueba. Vemos que la parte real de una forma lineal compleja es una forma lineal real. Recíprocamente, si $S = \mathfrak{Re}(T)$ tenemos para todo $x \in E$ que $S(x) = \mathfrak{Re}(T(x))$ y

$$S(ix) = \mathfrak{Re}(T(ix)) = \mathfrak{Re}(iT(x)) = -\mathfrak{Im}(T(x))$$

se deduce que $\mathfrak{Im}(T(x)) = -S(ix)$, es decir $T(x) = S(x) - iS(ix)$ y con esto obtenemos la unicidad de la descomposición. Para terminar debemos verificar que la aplicación T es una forma lineal compleja. Por definición se tiene que S es una forma lineal real, observamos ahora que

$$T(ix) = S(ix) - iS(-x) = iS(x) + S(ix) = iT(x)$$

de donde se obtiene la $\mathbb{C}$-linealidad de la forma lineal T. ■

Volvamos a la demostración del teorema de Hahn-Banach en su forma compleja. Tenemos por la primera parte que la parte real $S = \mathfrak{Re}(f)$ se prolonga en una forma lineal S' definida sobre todo el espacio E y verifica $|S'(x)| \leq p(x)$. Utilizamos ahora el lema 1 para obtener una forma lineal $T(x) = S'(x) - iS'(ix)$ que prolonga f a todo el espacio E. Solo nos hace falta comprobar que se tiene $|T(x)| \leq p(x)$. Fijemos un punto $x \in E$, existe entonces un real θ tal que $|T(x)| = e^{i\theta}T(x)$, por lo tanto

$$|T(x)| = \Re e(e^{i\theta}T(x)) = S'(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = p(x)$$

■

Observación 1 Es importante notar que este resultado no dice nada sobre la eventual unicidad de la aplicación T que realiza la extensión, ni sobre el método para encontrar de manera explícita esta forma lineal.
$\Longrightarrow$ Es un resultado de *existencia.*

1.1. Aplicación a las aplicaciones lineales continuas

Este resultado tiene muchísimas aplicaciones en el análisis funcional

A) Aplicaciones lineales continuas y dualidad

Teorema 2 (prolongación de la continuidad) *Sean $(E,(p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y W un subespacio vectorial de E. Entonces toda forma lineal continua $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ se prolonga en una forma lineal* continua $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Demostración. Como la forma lineal f es continua existe una familia finita de semi-normas p_i con $i \in K \subset I$ tal que $|f(x)| \leq Cp_i(x)$ para todo $x \in W$ y todo $i \in K$. Se tiene entonces que $|f(x)| \leq p(x)$ en donde $p(x) = C\max\limits_{i\in K} p_i(x)$ es una semi-norma. Aplicamos el teorema de Hahn-Banach para prolongar f a una forma lineal T definida sobre todo el espacio E y que verifica $|T(x)| \leq p(x) = C\max\limits_{i\in K} p_i(x)$ de donde se deduce la continuidad de T. ■

Este teorema es sorprendente:
$\Longrightarrow$ nos dice que es posible prolongar la continuidad de las aplicaciones lineales *casi* gratuitamente
$\Longrightarrow$ hay que tener cuidado en no generalizarlo a aplicaciones que no son lineales.

Lema 2 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $x_0 \in E$ un vector y p una semi-norma definida sobre E. Entonces existe una forma lineal T sobre E tal que $T(x_0) = p(x_0)$ y tal que $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Prueba. Si $x_0 = 0$ es suficiente fijar $T = 0$. Si $x_0 \neq 0$, consideramos el subespacio $W = x_0\mathbb{K}$ y definimos una aplicación sobre W escribiendo

$$\begin{aligned} f : W &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \alpha x_0 &\longmapsto \alpha p(x_0). \end{aligned}$$

Vemos entonces que la aplicación f es una forma lineal sobre W que verifica $f(x_0) = p(x_0)$ y $|f(\alpha x_0)| = |\alpha|p(x_0) = p(\alpha x_0)$, es decir $|f(x)| = p(x)$ para todo $x \in W$. Por el teorema de Hahn-Banach, esta forma lineal f se prolonga a una forma lineal T definida sobre todo el espacio E y verifica $|T(x)| \leq p(x)$. ■

Proposición 1 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y x_0 un vector no nulo de E. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) \neq 0$. En particular, si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado no reducido al conjunto $\{0\}$, entonces su espacio dual E' tampoco está reducido al conjunto $\{0\}$.*

Prueba. Sea $(p_i)_{i\in I}$ una familia de semi-normas definidas sobre E.
$\Longrightarrow$ Como el espacio E es separado, existe una semi-norma p_{i_0} tal que $p_{i_0}(x_0) \neq 0$.
$\Longrightarrow$ Utilizando el lema 2, obtenemos la existencia de una forma lineal T sobre E tal que $T(x_0) = p_{i_0}(x_0)$ y tal que $|T(x)| \leq p_{i_0}(x)$ para todo $x \in E$.

$\Longrightarrow$ Esto muestra que la forma lineal T es continua y por lo tanto pertenece al espacio dual E', lo que termina la prueba de la proposición. $\blacksquare$

Presentamos una aplicación del teorema de Hahn-Banach que será importante cuando se estudie el cardinal de los espacios duales.

Proposición 2 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y sea E' su espacio dual. Se tiene que $dim(E') \geq dim(E)$. En particular, si E es de dimensión infinita, entonces el espacio dual E' también es de dimensión infinita.*

Prueba. Sea F un subespacio de E de dimensión n.
$\Longrightarrow$ Como este espacio es separado, es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ y por lo tanto el espacio dual F' también es de dimensión finita n.
$\Longrightarrow$ Sea entonces $(T_i)_{1\leq i\leq n}$ una base de F'. Por el teorema de prolongación de Hahn-Banach, existen formas lineales $\widetilde{T_i} \in E'$ que prolongan las formas lineales T_i.
$\Longrightarrow$ Estas formas lineales $\widetilde{T_i}$ son linealmente independientes: en efecto, si no lo fueran, toda dependencia en ellas se reflejaría, por restricción a F, en una dependencia en las formas lineales T_i.
$\Longrightarrow$ Esto muestra que el espacio dual E' es de dimensión mayor o igual a n.
$\Longrightarrow$ Dado que este proceso se mantiene para todo n, se deduce que si E es de dimensión finita entonces $dim(E') \geq dim(E)$ y si E es de dimensión infinita, entonces su espacio dual E' también es de dimensión infinita. $\blacksquare$

B) Norma de aplicaciones lineales

Presentamos ciertos resultados que simplifican la expresión de las normas de las aplicaciones lineales

Proposición 3 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado, W un subespacio vectorial de E y $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua de norma*

$$\|f\|_{W'} = \sup_{\substack{\|x\|_E\leq 1\\ x\in W}} |f(x)|.$$

Entonces existe $T \in E'$ que prolonga la forma lineal f y que conserva su norma, es decir tal que $\|T\|_{E'} = \|f\|_{W'}$.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Notemos para empezar que toda prolongación T de f verifica $\|T\|_{E'} \geq \|f\|_{W'}$ puesto que sobre W se tiene que T y f coinciden y que el supremo que interviene en el cómputo de la norma $\|T\|_{E'}$ corre sobre todo el espacio E.
$\Longrightarrow$ Notamos que se tiene $|f(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\|_E$ para todo $x \in W$, de manera que podemos aplicar el teorema 1 utilizando como semi-norma $p(x) = \|f\|_{W'}\|x\|_E$.
$\Longrightarrow$ Obtenemos de esta manera una prolongación T que verifica $|T(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\|_E$.
$\Longrightarrow$ Esto muestra que la aplicación T es una forma lineal continua de norma inferior o igual a $\|f\|_{W'}$ y por la primera observación se deduce la igualdad de las normas. $\blacksquare$

Corolario 1 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado.*

1) *Para todo $x_0 \in E$ existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que se tiene $T(x_0) = \|x_0\|_E^2$ y $\|T\|_{E'} = \|x_0\|_E$.*

2) *Para todo $x_0 \in E$ existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $\|T\|_{E'} = 1$ y $T(x_0) = \|x_0\|_E$.*

Prueba. Para demostrar el primer punto, empezamos considerando $W = x_0\mathbb{K}$ y definimos la forma lineal $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|_E^2$. De esta manera se tiene

$$\|f\|_{W'} = \sup_{\|\alpha x_0\|_E\leq 1} |f(\alpha x_0)| = \sup_{|\alpha|\|x_0\|_E\leq 1} |\alpha|\|x_0\|_E^2 = \|x_0\|_E.$$

$\Longrightarrow$ Aplicamos la proposición 3 para obtener la existencia de una forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifica las dos condiciones exigidas: es decir que T coincide con f sobre W: $T(x_0) = \|x_0\|_E^2$, y además se obtiene la igualdad de las normas: $\|T\|_{E'} = \|f\|_{W'} = \|x_0\|_E$.
$\Longrightarrow$ El segundo punto se deduce de forma totalmente similar fijando $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|_E$. ∎

El siguiente resultado nos permite caracterizar la norma de un vector x en un espacio normado E utilizando el espacio dual E':

Corolario 2 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Para todo $x \in E$, se tienen las fórmulas siguientes:*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{T\in E'\\ \|T\|_{E'}\leq 1}} |T(x)| = \max_{\substack{T\in E'\\ \|T\|_{E'}\leq 1}} |T(x)| \tag{2}$$

Prueba.
$\Longrightarrow$ Notamos que, si $x \neq 0$, entonces se tiene la desigualdad $\sup\limits_{\substack{T\in E'\\ \|T\|_{E'}\leq 1}} |T(x)| \leq \|x\|_E$.
$\Longrightarrow$ Para la desigualdad recíproca vamos a utilizar el corolario 1: sabemos que existe una forma lineal $T_0 \in E'$ tal que $T_0(x) = \|x\|_E^2$ y tal que $\|T_0\|_{E'} = \|x\|_E$.
$\Longrightarrow$ Definimos ahora $T_1 = T_0/\|x\|_E$ de manera que se tiene $\|T_1\|_{E'} = 1$ y $T_1(x) = \|x\|_E$.
$\Longrightarrow$ Esto nos permite ver que se tiene la identidad buscada y que el supremo es en realidad un máximo. ∎

El lector debe tener cuidado en no confundir este resultado con la definición de la norma de una aplicación lineal continua: en este caso se estima la norma de una aplicación $T \in E'$ por medio de los vectores $x \in E$, mientras que la expresión (2) anterior permite calcular la norma de un vector $x \in E$ por medio de las formas lineales continuas $T \in E'$. Por un lado se tiene un *supremo* que no siempre es alcanzado mientras que por otro lado se tiene un *máximo*, debido a que se trabaja sobre formas lineales continuas.

1.2. Forma geométrica

Para poder enunciar con toda claridad esta versión del teorema de Hahn-Banach, será necesario recordar algunas nociones generales del álgebra lineal.

Definición 1 (Hiperplano - Hiperplano afín) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El núcleo $Ker(T)$ de una forma lineal $T \in E^\star$ no idénticamente nula es llamado un* Hiperplano *y lo notaremos $H = Ker(T)$. Un hiperplano* afín *será entonces la traslación de un hiperplano.*

Otra manera de definir un hiperplano es considerando los subespacios de un espacio vectorial que son de codimensión 1:

Lema 3 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $H = Ker(T)$ un hiperplano en E, en donde $T \in E^\star \setminus \{0\}$ es una forma lineal sobre E no idénticamente nula.*
Entonces se tiene que $H \neq E$ y, para todo vector $x_0 \in E \setminus H$, se tiene la descomposición en suma directa $E = H \oplus x_0\mathbb{K}$.
Además, una vez que se ha fijado el hiperplano H y la suma directa anterior, la forma lineal T está únicamente determinada, módulo una constante multiplicativa.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Dado que la forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ no es idénticamente nula, se tiene inmediatamente que $E \neq Ker(T) = H$.
$\Longrightarrow$ Sea $x_0 \in E \setminus H$, podemos entonces escribir todo vector $x \in E$ de la forma

$$x = \left(\frac{T(x)}{T(x_0)}\right) x_0 - h$$

en donde $h = x - \frac{T(x)}{T(x_0)}x_0$ es un elemento de H.
$\Longrightarrow$ Esta descomposición es única: si $x = \alpha x_0 + h$ con $h \in H$, se tiene necesariamente $T(x) = \alpha T(x_0) + T(h) = \alpha T(x_0)$, de donde se deduce que $\alpha = \frac{T(x)}{T(x_0)}$ y que $h = x - \frac{T(x)}{T(x_0)}x_0$.
$\Longrightarrow$ Tenemos la descomposición en suma directa $E = H \oplus x_0\mathbb{K}$.

Para terminar, si $H = Ker(S)$ en donde $S \in E^\star \setminus \{0\}$ es otra forma lineal distinta de T, la descomposición precedente muestra que se tiene $S(x) = \big(\frac{T(x)}{T(x_0)}\big)S(x_0)$, es decir que $S = \alpha T$ en donde $\alpha = S\big(\frac{T(x)}{T(x_0)}\big)$. ■

Cuando el hiperplano no contiene el origen, una descripción simple está dada por el resultado siguiente:

Lema 4 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T \in E^\star \setminus \{0\}$.*
Entonces el conjunto $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$ es un hiperplano que no contiene el vector 0.
Recíprocamente, si H es un hiperplano que no contiene el vector 0, entonces existe una única forma lineal T definida sobre E tal que se tenga $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$

Prueba.
$\Longrightarrow$ Sea $T \in E^\star$ una forma lineal no idénticamente nula y sea $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$, se tiene entonces que $0 \notin H$.
$\Longrightarrow$ Mostremos que H es un hiperplano. Como la forma lineal T no es idénticamente nula, existe un vector $x_0 \in E$ tal que $T(x_0) \neq 0$ y definimos $b = x_0/T(x_0)$ de tal manera que se tiene $T(b) = 1$.
$\Longrightarrow$ Entonces se tiene que $H = b + Ker(T)$.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, por el lema 3, sabemos que el hiperlano H puede escribirse de la forma $H = x_0 + Ker(S)$ en donde $S \in E^\star$. Si H no contiene el vector 0, se tiene que $S(x_0) \neq 0$ y se verifica entonces que $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$ en donde $T = S/S(x_0)$.

$\Longrightarrow$ Pasemos al estudio de la unicidad de la aplicación T: supongamos que T_1 y T_2 son dos formas lineales tales que $H = \{x \in E : T_1(x) = 1\} = \{x \in E : T_2(x) = 1\}$, entonces $T_1 = T_2$.
$\Longrightarrow$ En efecto, si existe un punto $x_0 \in E$ tal que $T_1(x_0) \neq T_2(x_0)$, se tendría $T_1(x_0) \neq 0$ y escribiendo $b = x_0/T_1(x_0)$ obtendríamos que $T_1(b) = 1$ y que $T_2(b) \neq 1$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 4 *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y T una forma lineal tal que $H = Ker(T)$. Entonces el hiperplano H es o cerrado o denso en todas partes. Además, H es cerrado si y solamente si la forma lineal T es continua.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Si el hiperplano H no es cerrado, existe un vector $x_0 \in \overline{H}\setminus H$. Por la continuidad de las operaciones vectoriales, la adherencia $\overline{H}$ del hiperplano H es un subespacio vectorial de E y se tiene que $\overline{H}$ contiene $H \oplus x_0\mathbb{K}$, de donde, por el lema 3 se tiene que $\overline{H} = E$.
$\Longrightarrow$Si la forma lineal T es continua, entonces el conjunto $\{x \in E : T(x) = 0\}$ es cerrado por ser la imagen recíproca de un cerrado.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, suponemos que H es un conjunto cerrado. La continuidad es inmediata si se tiene que T es idénticamente nula, de manera que podemos asumir que existe un punto x_0 tal que $T(x_0) = 1$, una semi-norma p y un real $r > 0$ tal que $T(x) \neq 0$ sobre la semi-bola $B_{r,p}(x_0) = \{x \in E : p(x - x_0) < r\}$.
$\Longrightarrow$ Se obtiene que $|T(x)| < 1$ sobre $B_{r,p}(x_0)$, de donde se deduce que $|T(x)| \leq r^{-1}p(x)$ y esto implica la continuidad de la forma lineal T. ■

Podemos ahora presentar la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3 (Hahn-Banach, forma geométrica) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, $B \subset E$ un conjunto abierto convexo, no vacío, y M un subespacio afín que no intersecta B, es decir $M \cap B = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano cerrado H que contiene M y que no intersecta B: se tiene $M \subset H$ y $H \cap B = \emptyset$.*

Demostración. De la misma manera que en su forma analítica, descomponemos la demostración de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach en dos partes.

A) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Por medio de una traslación podemos suponer que el conjunto convexo B contiene el origen.
$\Longrightarrow$ El subespacio afín M se escribe entonces $M = x_0 + V$ en donde V es un subespacio vectorial de E y $x_0 \in E$ es un vector que no pertenece a V puesto que el origen no pertenece a M.
$\Longrightarrow$ Consideremos el subespacio vectorial $W = V \oplus x_0\mathbb{R}$, se tiene entonces que M es un hiperlano de W y por lo tanto, aplicando el lema 4, existe una forma lineal $T : W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M = \{x \in W : T(x) = 1\}$.
$\Longrightarrow$ Una vez que tenemos esta aplicación lineal T, vamos a mayorarla por una semi-norma y para ello necesitaremos utilizar las propiedades de la funcional de Minkowski(que es una semi-norma) cuya definición recordamos: sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado, a todo conjunto $B \subset E$ convexo, abierto con $0 \in B$, se le asocia la funcional de Minkowski por: $p_B(x) = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda^{-1}x \in B\}$.

$\Longrightarrow$ Vamos a mostrar que se tiene $T(x) \leq p_B(x)$ sobre el conjunto W.
Dado que la funcional p_B es positiva, es suficiente estudiar el conjunto de puntos $x \in W$ que verifican $T(x) > 0$. Para estos puntos definimos $y = x/T(x)$ de manera que $T(y) = 1$: se tiene por lo tanto que $y \in M$ y por hipótesis se obtiene que $y \notin B$. Se deduce entonces de la definición de la funcional de Minkowski que $p_B(y) \geq 1$; es decir que $T(x) \leq p_B(x)$.
$\Longrightarrow$ Aplicamos ahora el teorema de Hahn-Banach 1 para obtener la existencia de una forma lineal $\hat{T}$, definida sobre todo el espacio E, que prolonga la forma lineal T inicialmente definida sobre $W \subset E$ y que verifica $\hat{T}(x) \leq p_B(x)$. Entonces, el hiperlano $H = \{x \in E : \hat{T}(x) = 1\}$ es un hiperlano que contiene M y que no intersecta el convexo B puesto que $p_B(x) < 1$ para todo $x \in B$.

$\Longrightarrow$ Para terminar, debemos verificar que el hiperlano H es cerrado. Como el conjunto convexo B es abierto, el hiperplano H no es denso en E y es por lo tanto cerrado por la proposición 4.

B) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: De la misma manera, por traslación es necesario considerar únicamente el caso cuando el conjunto M contiene el origen.
$\Longrightarrow$ Por la primera parte existe una forma lineal real S tal que el hiperplano real K de ecuación $S(x) = 0$ contiene M y no intersecta B.
$\Longrightarrow$ Utilizando el lema 1 podemos construir una forma lineal compleja escribiendo $T(x) = S(x) - iS(ix)$ y de esta manera el hiperlano complejo H de ecuación $T(x) = 0$ está contenido en K y por lo tanto no intersecta B. Verifiquemos ahora que $M \subset H$. Sea $x \in M$, entonces $ix \in M$ y, dado que K contiene M, se tiene que $S(x) = S(ix) = 0$. De esto se deduce que $T(x) = 0$ y por lo tanto que $x \in H$.

$\Longrightarrow$ Finalmente, por las mismas razones expuestas en la parte A), este hiperlano no puede ser denso en todas partes y por lo tanto es un hiperplano cerrado.

■

Observación 2 La hipótesis exigida sobre el conjunto B de ser un conjunto abierto, es muy importante. En efecto si en $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto convexo cerrado $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x; 0 \leq y; z^2 \leq xy\}$ y la recta D de ecuación $x = 0$ y $z = 1$, vemos entonces que todo hiperplano que pasa por la recta D tiene una intersección no nula con B.

1.3. Aplicación a la separación de conjuntos y a un resultado de densidad

A) Separación de conjuntos convexos

Hemos visto con el lema 4 que una forma lineal permite caracterizar de forma simple los hiperplanos. Vamos a ver ahora cómo ir un paso más adelante utilizando esta caracterización.

Definición 2 (Separación de conjuntos) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. El hiperplano cerrado $H = \{x \in E : T(x) = c\}$ divide entonces el espacio E en dos subespacios $E_1 = \{x \in E : T(x) \geq c\}$ y $E_2 = \{x \in E : T(x) \leq c\}$.*

1) *Dos subconjuntos A, B de E están* separados en el sentido amplio *por un hiperplano cerrado H si A está contenido en el subespacio E_1 y B está contenido en el subespacio E_2.*

2) *Dos subconjuntos A, B de E están* separados en el sentido estricto *por un hiperplano cerrado H si existe $\varepsilon > 0$ tal que A está contenido en el subespacio $E_1' = \{x \in E : T(x) \geq c + \varepsilon\}$ y B está contenido en el subespacio $E_2' = \{x \in E : T(x) \leq c - \varepsilon\}$.*

Las figuras a continuación muestran estas dos situaciones.

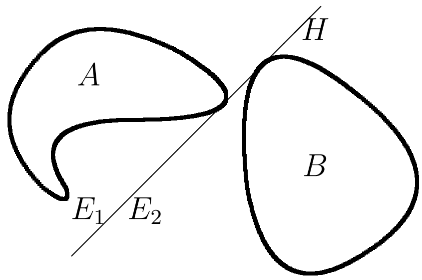

Figura 1: separación de conjuntos en el sentido amplio

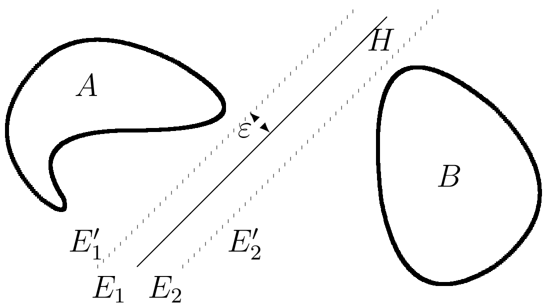

Figura 2: separación de conjuntos en el sentido estricto

Cuando los conjuntos A y B son no son convexos (como es el caso del conjunto A en las dos figuras anteriores), no siempre es posible encontrar un hiperplano que separe estos conjuntos. Sin embargo, cuando estos conjuntos son convexos podemos utilizar la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach de tal forma que *siempre* se puede exhibir un hiperplano que los separe.

Corolario 3 (Teorema de Eidelheit) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos además que A es abierto. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E' \setminus \{0\}$ y un número real c tal que*

$$T(x) < c \leq T(y), \quad \textit{para todo } x \in A, y \in B.$$

Si los conjuntos A y B verifican las hipótesis del corolario, entonces A y B están separados en el sentido amplio por el hiperplano $H = \{x \in E : T(x) = c\}$.

Prueba. Es suficiente aplicar la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach 3 tomando como conjunto convexo abierto $A - B$ (en vez del conjunto convexo B) y como subespacio $M = \{0\}$.
$\Longrightarrow$ Se obtiene de esta manera una forma lineal continua T tal que los conjuntos $T(A)$ y $T(B)$ son disjuntos puesto que $T(A - B) \neq 0$. Modificando, de ser necesario, T en $-T$ se tiene entonces

$$\sup_{x\in A} T(x) \leq \inf_{y\in B} T(y).$$

$\Longrightarrow$ Si definimos $c = \inf\limits_{y\in B} T(y)$ se tiene en particular la estimación $T(x) \leq c \leq T(y)$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.
$\Longrightarrow$ Como los conjuntos A y B no son vacíos, tenemos que $-\infty < c < +\infty$ y, dado que el conjunto A es abierto, la desigualdad $T(x) \leq c$ se convierte en la estimación estricta buscada. ■

Corolario 4 (Teorema de Tukey) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos además que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E' \setminus \{0\}$ y dos números reales $c_1 < c_2$ tales que*

$$T(x) \leq c_1 < c_2 \leq T(y), \quad \textit{para todo } x \in A, y \in B.$$

Si los conjuntos A y B verifican las hipótesis del corolario, entonces A y B están separados en el sentido estricto por el hiperplano $H = \{x \in E : T(x) = c\}$.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Como por hipótesis el conjunto A es cerrado, cada punto y de B es el centro de semi-bolas $B_y = B_{r,p}(y)$ tales que $B_y \cap A = \emptyset$ y se tiene que la unión de este tipo de semi-bolas recubre el conjunto B.
$\Longrightarrow$ Al ser el conjunto B un conjunto compacto, se tiene

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{y_j}.$$

$\Longrightarrow$ Definimos ahora una nueva semi-norma p escribiendo $p = p_1 + ... + p_n$, en donde las semi-normas p_j son las semi-normas que sirvieron para definir las semi-bolas B_{y_j}, y fijamos $r = 2^{-1}\min\{r_1, ...r_n\}$, en donde r_j son los radios de las semi-bolas B_{y_j}.

$\Longrightarrow$ A partir de esta nueva semi-norma p formamos el conjunto $U = B_{r,p}$ de manera que los conjuntos $A+U$ y $B+U$ son dos conjuntos convexos disjuntos tales que $A \subset A+U$ y $B \subset B+U$.
$\Longrightarrow$ En este punto aplicamos el corolario anterior para obtener una forma lineal continua $T \in E'$ y un número real c tales que $T(x) < c \leq T(y)$ para todo $x \in A+U$ y $y \in B+U$.
$\Longrightarrow$ A partir de este hecho tenemos

$$T(x) + \sup_{x\in U}|T(x)| \leq c \leq T(y) - \inf_{x\in U}|T(x)|$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.
$\Longrightarrow$ Finalmente, se tiene que $r = \sup\limits_{x\in U}|T(x)| > 0$ puesto que la forma lineal T no es idénticamente nula y de esta manera se obtiene el resultado deseado con $c_1 = c - r$ y $c_2 = c + r$.

■

La versión general de estos dos resultados está dada por el siguiente teorema:

Teorema 4 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sean $A, B \subset E$ dos conjuntos disjuntos, no vacíos y convexos.*

1) *Si A es abierto, existe una forma lineal $T \in E'$ y un real c tal que*

$$\Re e(T(x)) < c \leq \Re e(T(y))$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

2) *Si adicionalmente A es compacto y B es cerrado, entonces existe una forma lineal $T \in E'$ y dos reales $c_1 < c_2$ tales que*

$$\Re e(T(x)) < c_1 < c_2 < \Re e(T(y))$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

La manipulación anunciada consiste en tomar la parte real de las formas lineales que aparecen en el teorema. En particular, la generalización está dada en el sentido que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{Re}(T) = T$ y de esta forma se obtienen los dos resultados anteriores.

Este resultado tiene como corolario un concepto que será de gran utilidad en el futuro.

Corolario 5 (Separación de puntos) *Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, entonces el conjunto de formas lineales continuas E' separa los puntos de E.*

Prueba. Sean pues $x_1, x_2 \in E$ dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$. Basta aplicar el segundo punto del teorema anterior con $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$ para obtener la existencia de una forma lineal continua T tal que $T(x_1) \neq T(x_2)$. ■

B) Problemas de aproximación

A continuación presentamos un resultado que relaciona la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach con la densidad de un subconjunto.

Proposición 5 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea M un subespacio de E. Si $x_0 \in E$ no pertenece a la cerradura de M, entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) = 1$ y tal que $T(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Empecemos notando que todo subespacio vectorial es un conjunto convexo.
$\Longrightarrow$ Luego, aplicamos el segundo punto del teorema 4 con $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{M}$.
$\Longrightarrow$ Obtenemos entonces una forma lineal continua T tal que $T(x_0)$ y $T(\overline{M})$ son dos conjuntos disjuntos.
$\Longrightarrow$ Dado que M es un subespacio de E se tiene que $T(M)$ es un subespacio propio de $\mathbb{K}$ y esto implica que $T(M) = \{0\}$ y por lo tanto que $T(x_0) \neq 0$. Para obtener el resultado deseado, basta dividir la forma lineal T por la cantidad $T(x_0)$. ■

Esto muestra que, para mostrar que un punto x_0 pertenece a la cerradura de subespacio M de un espacio localmente convexo separado E, basta verificar que $T(x_0) = 0$ para toda forma lineal continua $T \in E'$ que se anula sobre M.

Definición 3 (Conjunto Ortogonal) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y sea E' su espacio dual.*

1) Sea $D \subset E$ un subconjunto, definimos el conjunto ortogonal *de D, notado $D^\perp$, como el conjunto de todas las formas lineales continuas $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que se anulan para todo punto $x \in D$, es decir*

$$D^\perp = \{T \in E' : T(x) = 0, \quad \textit{para todo } x \in D\}$$

2) Sea $\Delta \subset E'$ un subconjunto, definimos el conjunto ortogonal de Δ, notado $\Delta^\perp$, como el conjunto de los vectores $x \in E$ que anulan todas las formas lineales $T \in \Delta$, es decir

$$\Delta^\perp = \{x \in E : T(x) = 0, \quad \textit{para todo } T \in \Delta\}$$

Nótese que $D^\perp \subset E'$ y que $\Delta^\perp \subset E$.

Corolario 6 (Un resultado de densidad) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y D un subespacio de E. Entonces:*

1) La adherencia $\overline{D}$ del conjunto D coincide con el conjunto $(D^\perp)^\perp$.

2) El subespacio D es denso en E si y solo si $D^\perp = \{0\}$.

Prueba.

1) Para empezar la primera parte observamos que $(D^{\perp})^{\perp} = \{x \in E : T(x) = 0,\ \forall T \in D^{\perp} \subset E'\}$ y vamos a demostrar que $\overline{D} \subset (D^{\perp})^{\perp}$ y que $(D^{\perp})^{\perp} \subset \overline{D}$.
   $\Longrightarrow$ Para la primera inclusión fijamos un punto $x_0 \in \overline{D}$, luego, si $T \in E'$ es una forma lineal que se anula sobre D (es decir que $T \in D^{\perp}$), entonces por continuidad de T se tiene que $T(x_0) = 0$ de donde se obtiene que $x_0 \in (D^{\perp})^{\perp}$.
   $\Longrightarrow$ Para la segunda inclusión procedemos por una reducción al absurdo: sea pues $x_0 \in (D^{\perp})^{\perp}$ tal que $x_0 \notin \overline{D}$.
   $\Longrightarrow$ Consideramos entonces el subespacio vectorial $W = \overline{D} \oplus x_0\mathbb{K}$, de manera que $\overline{D}$ es un hiperplano cerrado de W.
   $\Longrightarrow$ Tenemos por el lema 3, la existencia de una forma lineal continua $T : W \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\overline{D} = Ker(T)$ y tal que $T(x_0) \neq 0$. Esta forma lineal T se prolonga en una forma lineal continua $\hat{T}$, definida sobre todo el espacio E, que verifica $\hat{T}(x_0) \neq 0$, lo cual es una contradicción con el hecho que $x_0 \in (D^{\perp})^{\perp}$.

2) La segunda parte del corolario se deduce inmediatamente del primer punto:
   $\Longrightarrow$ si $\overline{D} = E$ y si $T \in E'$ es una forma lineal que se anula sobre D, por continuidad T se anula sobre $\overline{D} = E$ y es por lo tanto idénticamente nula, es decir $D^{\perp} = \{0\}$.
   $\Longrightarrow$ Recíprocamente, si $D^{\perp} = \{0\}$ y si $x_0 \notin \overline{D}$, siguiendo las etapas explicitadas en la primera parte, se obtiene una forma lineal $\hat{T}$ definida sobre todo el espacio E tal que $\hat{T}(D) = 0$ pero tal que $\hat{T}(x_0) \neq 0$, de manera que el conjunto ortogonal de D no está reducido al elemento cero, obteniendo de esta forma la contradicción buscada. $\blacksquare$