Lección n°3: Lema de Baire y Teorema clásicos del Análisis Funcional

EPN, verano 2012

Definición 1 (Espacio de Baire) *Sea E un espacio topológico. Diremos que E es un* espacio de Baire *si toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos en E es densa en E.*
Es decir si

$$(\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de abiertos de } E); (\forall n \in \mathbb{N} : \overline{A_n} = E), \text{ se tiene } \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = E.$$

Considerando conjuntos cerrados tenemos la caracterización equivalente siguiente: el espacio topológico E es un espacio de Baire si la unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío en E es de interior vacío en E. Es decir si

$$(\forall (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de cerrados de } E), (\forall n \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{C_n} = \emptyset), \text{ se tiene } \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}} = \emptyset.$$

Demos un ejemplo de espacio de Baire: consideremos el conjunto de los números reales del cual se quita el conjunto de números racionales, es decir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: utilizando la caracterización de los espacios de Baire que se basa sobre el interior de conjuntos cerrados, no es difícil ver que el espacio $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es efectivamente un espacio de Baire.

Definición 2 (Conjunto residual, conjunto magro) *Sean E un espacio topológico de Baire y sea A un subconjunto de E. Diremos que*

1) el conjunto A es residual *si contiene una intersección numerable de abiertos densos en E.*

2) el conjunto A es magro *si está contenido una reunión numerable de cerrados de interior vacío en E.*

Nótese que estas dos definiciones son complementarias en el sentido que un conjunto A es magro si y solo si A^c es residual.
$\Longrightarrow$ Así por ejemplo, vemos que $\mathbb{Q}$ es magro en $\mathbb{R}$ y por lo tanto se tiene que $\mathbb{Q}^c = \mathbb{I}$ es residual en $\mathbb{R}$.

Teorema 1 (Lema de Baire) *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean pues (E, d_E) un espacio métrico completo, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos densos en E y A un abierto no vacío.
$\Longrightarrow$ Se trata entonces de verificar que se tiene $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.
Vamos a construir, razonando por recurrencia, una sucesión de bolas abiertas $B_n = B(x_n, r_n)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga las siguientes condiciones:

- $\overline{B}_0 \subset A$, y $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$,
- $r_n \geq r_{n+1} > 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

$\Longrightarrow$ En efecto: dado que el abierto A no es vacío, existe una bola B_0 tal que se tenga $\overline{B}_0 \subset A$. Como A_0 es denso en E se tiene que $B_0 \cap A_0$ no es vacío y por lo tanto existe una bola B_1 tal que $\overline{B}_1 \subset B_0 \cap A_0$.
$\Longrightarrow$ De la misma manera, dado que los abiertos A_n son densos en E, el abierto $B_n \cap A_n$ no es vacío y existe una bola abierta B_{n+1} tal que $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$. Para los radios, es suficiente notar que siempre se puede fijar $r_n \geq 2r_{n+1}$ para obtener la segunda condición.
$\Longrightarrow$ De esta manera, por recurrencia, obenemos la existencia de una tal sucesión de bolas abiertas B_n. Ahora, como el espacio métrico es completo y que la sucesión $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos cuyo diámetro tiende hacia 0, se tiene que la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n$ está reducida a un punto.

En efecto, de cada uno de los conjuntos cerrados $\overline{B}_n$ se puede escoger un punto x_n tal que $x_n \in \overline{B}_n$ y tal que $x_n \notin \overline{B}_{n+1}$. De esta manera se construye una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E que es de Cauchy por la definición de los radios r_n de las bolas consideradas. Como el espacio métrico es completo, esta sucesión converge hacia un solo punto.

$\Longrightarrow$ Finalmente observamos que, por construcción, tenemos la inclusión $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \subset A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y podemos concluir que el conjunto $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ no es vacío. Hemos mostrado que la intersección de todo abierto no vacío de E tiene una intersección con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ lo que termina la demostración. ■

Corolario 1 *Sea E un espacio de Baire y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados de E tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{A}_n$ es un abierto denso en E.*

Prueba.
Consideremos el conjunto $C = E \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{A}_n)$.
$\Longrightarrow$ Se tiene entonces que C es cerrado y debemos mostrar que es de interior vacío.

$\Longrightarrow$ Para ello notamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto cerrado $C \cap A_n$ es de interior vacío pues $\overbrace{C \cap A_n}^{\circ} \subset C \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$.
$\Longrightarrow$ Observamos ahora que se tiene la fórmula

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C \cap A_n = C \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = C \cap E = C,$$

y, como E es un espacio de Baire, tenemos que el conjunto C es de interior vacío. ■

Pasamos ahora a las aplicaciones del lema de Baire en el análisis funcional.

Teorema de la aplicación abierta

El primer teorema que estudiamos relaciona aplicaciones lineales continuas y aplicaciones abiertas.

Definición 3 (Aplicación abierta, Aplicación sobreyectiva) *Sean E y F dos espacios topológicos.*

1) *Una aplicación $T : E \longrightarrow F$ es* abierta *si, para todo abierto A de E se tiene que $T(A)$ es un abierto en F.*

2) *Una aplicación $T : E \longrightarrow F$ es* sobreyectiva *si todo elemento de F posee al menos un antecedente en E.*

El primer resultado que presentamos concierne las aplicaciones lineales abiertas.

Proposición 1 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales localmente convexos separados metrizables. Si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal abierta, entonces T es sobreyectiva.*

Prueba. Esto se deduce del hecho que F es el único subespacio vectorial abierto de F.
$\Longrightarrow$ En efecto, dado que T es una aplicación abierta, se tiene que el conjunto $W = T(E)$ es un abierto para la topología de F; y, como la aplicación T es lineal, se tiene además que W es un subespacio vectorial de F.
$\Longrightarrow$ Como el interior de W no es vacío, existe un punto $y_0 \in W$ tal que W es una vecindad de y_0 y por traslación se obtiene que W es también una vecindad del origen y es un conjunto absorbente en F: es decir que para todo $y \in F$ existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}y \in W$ de donde se deduce que $W = F$. ■

Recuérdese que una aplicación continua no es necesariamente abierta: basta considerar para ello una función constante $\varphi : x \longmapsto c$ definida sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, cuando se trabaja con aplicaciones lineales continuas, se tiene el importante resultado a continuación:

Teorema 2 (de la aplicación abierta) *Sean $(E,(p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio de Fréchet y $(F,(q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado metrizable. Notaremos respectivamente d_E y d_F las distancias invariantes por traslación asociadas a las topologías de espacios localmente convexos separados metrizables de E y F.*

1) *Si $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua, entonces o $T(E)$ es magro o T es una aplicación abierta.*

2) *Si F es un espacio de Baire, entonces toda aplicación lineal continua sobreyectiva $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación abierta.*

Necesitaremos el siguiente lema para la demostración de este resultado.

Lema 1 *Sean $(E,(p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio de Fréchet, $(F,(q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado metrizable y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua tal que:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[B_F(0,\delta) \subset \overline{T(B_E(0,\varepsilon))}], \tag{1}$$

entonces T es una aplicación abierta.

Prueba. Observamos para empezar que, por traslación, la hipótesis anterior se reescribe como

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in E)[B_F(a,\delta) \subset \overline{T(B_E(a,\varepsilon))}].$$

Sean $\varepsilon_0 > 0$ y $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos tales que $\sum_{n\geq 1}\varepsilon_n < \varepsilon_0$. Por la hipótesis podemos construir una sucesión $(\delta_n)_{n\geq 1}$ de números estrictamente positivos tal que, para todo $a \in E$ y todo $n \geq 1$ se tenga

$$B_F(a,\delta_n) \subset \overline{T(B_E(a,\varepsilon_n))} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0. \tag{2}$$

$\Longrightarrow$ Sea ahora $y \in B_F(0,\delta_0)$, vemos que es posible construir por recurrencia una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de E tal que $x_0 = 0$ y tal que

$$d_E(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n \quad \text{y} \quad d_F(y, T(x_{n+1})) < \delta_{n+1} \tag{3}$$

para todo $n \geq 1$. En efecto, por (2) tenemos que el punto y es un punto de adherencia de $\overline{T(B_E(0,\varepsilon_n))}$ y por lo tanto la intersección $B_F(y,\delta_1) \cap T(B_E(0,\varepsilon_0))$ no es vacía: existe entonces $x_1 \in E$ tal que $d_E(0,x_1) < \varepsilon_0$ y $d_F(y,T(x_1)) < \delta_1$ y de esta forma tenemos (3) para $n = 0$. Por recurrencia, si $d_F(y,T(x_n)) < \delta_n$, utilizando (2) con $a = x_n$ tenemos que la intersección $B_F(y,\delta_{n+1}) \cap T(B_E(x_n,\varepsilon_n))$ no es vacía de donde se obtiene un punto $x_n \in E$ que verifica (3).
$\Longrightarrow$ Observamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que acabamos de construir es una sucesión de Cauchy puesto que se tiene $d_E(x_p,x_q) \leq \sum_{n=p}^{q+p}\varepsilon_n$, y entonces, como el espacio E es un espacio de Fréchet, se tiene que el límite de esta sucesión pertenece a E y lo notaremos x. Tenemos en particular que $d_E(0,x_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k \leq 2\varepsilon_0$ y, utilizando (3) obtenemos que $d_F(y,T(x_{n+1})) < \delta_{n+1}$, por lo tanto, dado que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ se tiene que $y = T(x)$.
$\Longrightarrow$ Dicho de otra manera, para todo punto $y \in B_F(0,\delta_0)$ hemos construido un punto $x \in B_E(0,2\varepsilon_0)$ tal que $y = T(x)$. Esto prueba que, para todo $\varepsilon_0 > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B_F(0,\delta_0) \subset T(B_E(0,2\varepsilon_0))$. Para terminar consideremos A un abierto de E y $a \in A$, existe entonces $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_E(a,2\varepsilon_0) \subset A$, de donde se deduce que

$$T(A) \supset T(B_E(a,2\varepsilon_0)) = T(a) + T(B_E(0,2\varepsilon_0)) \supset T(a) + B_F(0,\delta_0)$$

lo que muestra que $T(A)$ es una vecindad de $T(a)$: se deduce que $T(A)$ es un conjunto abierto. ■

Con este resultado preliminar podemos empezar la demostración del teorema 2:

Demostración.

1) Supongamos que $T(E)$ no es magro.
$\Longrightarrow$ Debemos verificar (1) para poder aplicar el lema 1.
Sea $V = B_E(0,\varepsilon/2)$ para algún $\varepsilon > 0$, tenemos entonces que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nW$.

Como la aplicación T es lineal, se tiene $T(E) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nT(V)$ y como hemos supuesto que $T(E)$ no es magro, uno de los conjuntos $\overline{nT(V)} = n\,\overline{T(V)}$ es de interior no vacío, de donde se deduce que el conjunto $\overline{T(V)}$ es de interior no vacío: existe por lo tanto un punto $x_0 \in F$ y un real $\delta > 0$ tales que $B_F(x_0, \delta) \subset \overline{T(V)}$.
$\Longrightarrow$ Dado que estamos trabajando sobre un espacio vectorial topológico F, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : F \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longrightarrow & x - y \end{array}$$

es una aplicación continua y podemos adoptar la notación $A - B = \varphi(A, B)$ en donde $A, B \subset F$. Se tiene en particular la inclusión $B_F(0, \delta) \subset B_F(x_0, \delta) - B_F(x_0, \delta)$ puesto que todo elemento $x \in B_F(0, \delta)$ se puede escribir como $x = (x + x_0) - x_0$ en donde $x + x_0 \in B_F(x_0, \delta)$ y $x_0 \in B_F(x_0, \delta)$.
$\Longrightarrow$ De esta manera, utilizando la continuidad de la aplicación φ, podemos escribir

$$B_F(0, \delta) \subset \overline{T(V)} - \overline{T(V)} \subset \overline{T(V) - T(V)} = \overline{T(V - V)}$$

basta observar que se tiene la inclusión $V - V \subset B_E(0, \varepsilon)$ y de esta forma se tiene la inclusión buscada, es decir $B_F(0, \delta) \subset \overline{T(B_E(0, \varepsilon))}$.
$\Longrightarrow$ Podemos aplicar entonces el lema 1 y obtenemos que la aplicación T es abierta.

2) Si F es un espacio de Baire y si T es una aplicación sobreyectiva, entonces $T(E) = F$ no es un conjunto magro, pues es de interior no vacío, de donde se deduce, por la primera parte que T es una aplicación abierta.
■

Conviene tener a la mano un enunciado menos general del teorema de la aplicación abierta en donde solo intervienen espacios de Banach:

Teorema 3 (de la aplicación abierta) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Si T es sobreyectiva, entonces T es una aplicación abierta.*

Este importante resultado tiene como consecuencia los siguientes puntos.

Corolario 2 (Teorema del isomorfismo de Banach)

1) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios de Fréchet. Si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua sobreyectiva, entonces $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es una aplicación continua. Dicho de otra manera, toda biyección lineal y continua de E sobre F es un isomorphismo.*

2) *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son dos espacios de Banach y si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua biyectiva, entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$C_1 \|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2 \|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

3) *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías de espacio vectorial definidas sobre un mismo espacio E tales que se tenga la inclusión $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Si $(E, \mathcal{T}_1)$ y $(E, \mathcal{T}_2)$ son dos espacios de Fréchet, entonces se tiene la identidad $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Prueba.

1) Si la aplicación $T : E \longrightarrow F$ es lineal, continua y sobreyectiva entonces por el teorema 2 es una aplicación abierta, de donde se deduce inmediatamente que la aplicación $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es una aplicación continua pues la imagen recíproca de todo abierto es un abierto.

2) Basta aplicar el punto 1) cuando E y F son espacios de Banach y utilizar la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales.

3) Por el primer punto tenemos que toda biyección lineal continua de E sobre F es un isomorphismo. Basta entonces aplicar este resultado a la aplicación identidad Id definida sobre $(E, \mathcal{T}_2)$ a valores en $(E, \mathcal{T}_1)$ para obtener la identidad entre estas dos estructuras topológicas. ■

Teorema del grafo cerrado

Vamos a presentar ahora un criterio muy sencillo para estudiar la continuidad de las aplicaciones lineales.

Definición 4 (Grafo de una aplicación) *Sean E y F dos conjuntos y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación. El* grafo *de la aplicación T es el subconjunto* Gr_T *del producto cartesiano $E \times F$ determinado por*

$$\mathrm{Gr}_T = \big\{(x, y) \in E \times F : \ y = T(x)\big\}.$$

Esta definición es bastante general y en el enunciado del teorema a continuación consideramos directamente conjuntos dotados de una estructura topológica.

Teorema 4 (del grafo cerrado) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios de Fréchet y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces T es continua si y solo si el grafo* Gr_T *de T es cerrado en $E \times F$.*

Demostración. Mostremos para empezar que si T es una aplicación continua entonces el grafo Gr_T de T es un conjunto cerrado del espacio $E \times F$ dotado de la topología producto usual.
$\Longrightarrow$ Vamos a mostrar que el complemento A en $E \times F$ del conjunto Gr_T es un conjunto abierto.
Sea pues $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene que $y_0 \neq T(x_0)$ y por lo tanto y_0 y $T(x_0)$ poseen vecindades V y W disjuntas (recuérdese que un espacio de Fréchet es un espacio métrico y por lo tanto es un espacio separado).
Como la aplicación T es continua, el punto x_0 tiene una vecindad U tal que $T(U) \subset W$.
$\Longrightarrow$ Se tiene entonces que la vecindad $U \times V$ del punto (x_0, y_0) está contenida en A, de donde se deduce que A es abierto.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, mostremos que si el grafo Gr_T de T es cerrado en $E \times F$, entonces la aplicación T es continua.
Observemos que si Gr_T es un subconjunto cerrado del espacio de Fréchet $E \times F$, entonces se tiene que Gr_T es un espacio de Fréchet.
$\Longrightarrow$ Notemos ahora que la proyección $\pi_1 : Gr_T \longrightarrow E$ induce una biyección lineal continua, y es por lo tanto un isomorfismo por el primer punto del corolario 2. Se tiene, para $x \in E$, que $\pi_1^{-1} = (x, T(x))$ de donde $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, de manera que, por composición, la aplicación T es continua. ■

Observación 1 Exigir que el grafo de la aplicación T sea cerrado es equivalente a exigir que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = y,$$

entonces se tiene la identidad $y = T(x)$.

$\Longrightarrow$ Este teorema hace la verificación de la continuidad más sencilla puesto que se dispone de una hipótesis adicional: suponemos que la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
$\Longrightarrow$ Observemos que por la linealidad de la aplicación T podemos suponer que el punto límite x es el origen. En este caso, pedir que Gr_T sea cerrado se escribe: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$; entonces se tiene la identidad $y = 0$: el problema de la continuidad se resume entonces al estudio de la convergencia de una sucesión.

Teorema de Banach-Steinhaus y Principio de Acotación Uniforme

El principio de acotación uniforme nos proporciona un criterio bastante sencillo para estudiar la continuidad del límite simple una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones lineales continuas.

$\Longrightarrow$ Vamos a empezar esta subsección presentando un ejemplo en dónde la propiedad de continuidad de una familia de aplicaciones lineales se pierde al pasar al límite cuando se utiliza la convergencia simple.

$\Longrightarrow$ Sea pues E el espacio formado por todas las funciones polinomiales definidas sobre el intervalo $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$, dotado de la norma de la convergencia uniforme $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Definimos ahora, para todo $n \geq 1$, las aplicaciones $T_n(f) = n(f(1/n) - f(0))$. De esta manera obtenemos una familia $T_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de aplicaciones lineales y continuas puesto que se verifica rápidamente que

$$T_n(\alpha f + g) = \alpha T_n(f) + T_n(g) \quad \text{ y que } \quad |T_n(f)| \leq 2n\|f\|_E.$$

$\Longrightarrow$ Notemos que la sucesión $(T_n(f))_{n\geq 1}$ converge hacia la derivada $f'(0)$ de la función f evaluada en 0, se tiene entonces que la sucesión de aplicaciones lineales $(T_n)_{n\geq 1}$ *converge simplemente* hacia la forma lineal $T : f \longrightarrow f'(0)$.
$\Longrightarrow$ Sin embargo, vamos a verificar que esta forma lineal no es continua.
En efecto, consideremos la sucesión de polinomios determinada por $f_k(x) = kx(1-x)^k$; se tiene que $f_k'(x) = k(1-x)^{k-1}(1-x-kx)$.
La función f_k admite un máximo en el punto $x = (1+k)^{-1}$, de donde se deduce que $0 \leq f_k(x) \leq (k/(1+k))^{k+1} \leq 1$.
Obtenemos entonces que $\|f_k\|_E \leq 1$ mientras que $f_k'(0) = k$. A partir de estos hechos vemos que no existe una constante $C > 0$ tal que $|f_k'(0)| \leq C\|f_k\|_E$ para todo $k \geq 1$ y que por lo tanto la forma lineal T no es continua.

$\Longrightarrow$ Este ejemplo nos indica que el límite de aplicaciones lineales continuas no es necesariamente continuo y que es por lo tanto necesario exigir una hipótesis adicional para recuperar la continuidad al pasar al límite.

Definición 5 (Familia equicontinua) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos y*

$$\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$$

una familia de aplicaciones lineales definidas sobre E a valores en F. Diremos que la familia Λ es equicontinua *si para cada vecindad W del origen de F, existe una vecindad V del origen de E tal que $T_i(V) \subset W$ para todo $T_i \in \Lambda$.*

Nótese que si el conjunto Λ está reducido a una sola aplicación lineal, esta definición corresponde exactamente a la definición de continuidad. Se tiene entonces que la noción de equicontinuidad indica que cada una de las aplicaciones es continua y que además sus variaciones son relativamente equivalentes.

Cuando se dispone de mayor estructura sobre los espacios E y F es posible caracterizar la propiedad de equicontinuidad de la siguiente manera:

Proposición 2 (Caracterización de la equicontinuidad)

1) Si $(E,(p_i)_{\in I})$ y $(F,(q_j)_{\in J})$ son dos $\mathbb{K}$-espacios localmente convexos separados, entonces una familia $\Lambda \subset \mathscr{L}(E,F)$ es equicontinua si y solo si, para todo $j \in J$, existe una parte finita K de I, y una constante $C > 0$ tales que

$$q_j(T(x)) \leq Cp_i(x) \tag{4}$$

para todo $i \in K$, $x \in E$ y $T \in \Lambda$.

2) Si $(E,\|\cdot\|_E)$ y $(F,\|\cdot\|_F)$ son dos $\mathbb{K}$-espacios normados, se tiene que una familia $\Lambda \subset \mathscr{L}(E,F)$ es equicontinua si y solo si Λ es una parte acotada del espacio normado $\mathscr{L}(E,F)$; es decir si se tiene

$$\sup_{T\in\Lambda} \|T\|_{E\to F} < +\infty$$

en donde $\|T\|_{E\to F}$ es la norma de la aplicación lineal continua T.

Prueba.

1) Supongamos que Λ es una familia equicontinua y sea $W = B_{q_j}(0,1)$ una semi-bola abierta.

$\Longrightarrow$ Entonces existe una vecindad del origen de E, que podemos suponer de la forma $B_{p_{i_k}}(0,r)$ en donde $K=\{i_1,...,i_k\}$ es una parte finita de I y $r>0$, tal que se tenga $T(B_{p_{i_k}}(0,r))\subset B_{q_j}(0,1)$ para todo $T\in\Lambda$. De esta situación se tiene que $p_{i_k}(x)\leq r$ para todo $i_k\in K$ implica que $q_j(T(x))\leq 1$, de donde se obtiene que $q_j(T(x))\leq r^{-1}p_{i_k}(x)$.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, sea una vecindad W de 0 de F que contiene una semi-bola cerrada $B_{q_{j_\ell}}(0,\varepsilon)$ en donde $L=\{j_1,...,j_\ell\}$ es una parte finita de J. Entonces existe una parte finita K de la familia I y una constante positiva $c\geq 0$ tales que $q_{j_\ell}(T(x))\leq cp_{i_k}(x)$ para todo $j_\ell\in L$ y $i_k\in K$.
$\Longrightarrow$ De donde se deduce que

$$T(B_{p_{i_k}}(0,\delta))\subset B_{q_{j_\ell}}(0,\varepsilon)\subset W$$

siempre y cuando $c\delta\leq\varepsilon$. Es decir, por la definición 5, se obtiene que la familia Λ es equicontinua.

2) Cuando los espacios E y F son normados, la condición (4) significa $\|T(x)\|_F\leq C\|x\|_E$, es decir que $\|T\|_{E\to F}<C$ para todo $T\in\Lambda$, de donde se obtiene que Λ es una parte acotada del espacio $\mathscr{L}(E,F)$. ■

Veamos ahora cómo interviene el concepto de acotación con la equicontinuidad:

Proposición 3 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos y sea*

$$\Lambda=\{T_i:E\longrightarrow F:i\in I\}$$

una familia equicontinua de aplicaciones lineales definidas sobre E a valores en F. Sea A un subconjunto acotado de E. Entonces existe un subconjunto acotado Y de F tal que $T_i(A)\subset Y$ para todo $T_i\in\Lambda$.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Sea Y la unión de los conjuntos $T_i(A)$ con $T_i\in\Lambda$ y sea W una vecindad del origen de F.
Como la familia Λ es equicontinua, existe una vecindad V del origen de E tal que $T_i(V)\subset W$ para todo $T_i\in\Lambda$.
$\Longrightarrow$ Dado que el conjunto A es acotado, se tiene que $A\subset\alpha V$ para todo α suficientemente grande, de manera que, para estos escalares α se tiene

$$T_i(A)\subset T_i(\alpha V)=\alpha T_i(V)\subset\alpha W$$

de donde se deduce que $F\subset\alpha W$ y por lo tanto que F es acotado. ■

Podemos ahora enunciar el siguiente resultado que nos proporciona un criterio para verificar la equicontinuidad de ciertas familias de aplicaciones lineales.

Teorema 5 (de Banach-Steinhaus) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos, sea $\Lambda=\{T_i:E\longrightarrow F:i\in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Definimos el conjunto B como la colección de puntos $x\in E$ tales que la cantidad*

$$\Lambda(x)=\{T_i(x):T_i\in\Lambda\}$$

sea acotada en F. Si el conjunto B es residual en E en el sentido de la definición 2, entonces se tiene que $B=E$ y la familia Λ es equicontinua.

Demostración.
$\Longrightarrow$ Sean W y U dos vecindades del origen de F equilibradas tales que $U+\overline{U}\subset W$.
$\Longrightarrow$ Definamos el subconjunto X de E por

$$X=\bigcap_{T\in\Lambda}T^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x\in B$, entonces $\Lambda(x)\subset nU$ para algún n de manera que $x\in nX$.
Por lo tanto se tiene la inclusión

$$B\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}nX.$$

$\Longrightarrow$ Como B es un conjunto residual en E, se tiene que al menos uno de los conjuntos nX es residual en E. Ahora como la aplicación $x \longmapsto nx$ es un homeomorfismo de E en E, se tiene que el conjunto X es residual en E.
$\Longrightarrow$ Pero además se tiene que X es cerrado pues cada aplicación T es continua y por lo tanto X contiene un punto interior x y entonces $x - X$ contiene una vecindad V del origen E y se tiene

$$T(V) \subset T(x) - T(X) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

para toda aplicación $T \in \Lambda$.
$\Longrightarrow$ Esto prueba que la familia Λ es equicontinua.
Aplicamos la proposición 3 para obtener que Λ es uniformemente acotada.
$\Longrightarrow$ En particular se tiene que cada conjunto $\Lambda(x)$ es acotado en F, de donde se obtiene que $B = E$. ∎

En lo que sigue, la hipótesis de *residualidad* será consecuencia de las propiedades de los conjuntos que entran en acción. Así tenemos, utilizando el teorema 1, el resultado a continuación.

Corolario 3 *Si Λ es una colección de aplicaciones lineales continuas definidas sobre un espacio de Fréchet $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ a valores en un espacio vectorial topológico F y si los conjuntos*

$$\Lambda(x) = \{T_i(x) : T_i \in \Lambda\}$$

son acotados en F para todo $x \in E$, entonces Λ es una familia equicontinua.

En el caso en que los espacios considerados estén dotados de una norma, tenemos el Principio de Acotación Uniforme que nos dice que una acotación puntual de una familia de aplicaciones lineales continuas implica una acotación uniforme. Más precisamente:

Teorema 6 (Principio de Acotación Uniforme) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach. Sea $(T_i)_{i\in I}$ una familia, no necesariamente numerable, de aplicaciones lineales continuas de E en F. Supongamos que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E. \tag{5}$$

Entonces existe una constante C tal que

$$\|T_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \qquad \forall x \in E,\ \forall i \in I.$$

Es decir, se tiene

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{E\to F} < +\infty.$$

Demostración.
La verificación de este hecho es inmediata y se reduce a reescribir la hipótesis y la conclusión con las notaciones anteriores.
$\Longrightarrow$ En efecto, notemos $\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$ la familia de aplicaciones lineales consideradas. La hipótesis (5) expresa que los conjuntos

$$\Lambda(x) = \{T_i(x) : T_i \in \Lambda\}$$

son acotados en F para todo $x \in E$.
$\Longrightarrow$ Podemos entonces aplicar el corolario 3 anterior para obtener que la familia Λ es equicontinua, finalmente por la caracterización de la equicontinuidad dada en la proposición 2 tenemos que

$$\sup_{T\in\Lambda} \|T\|_{E\to F} < +\infty.$$

∎

Vemos cláramente en esta demostración cómo interviene el concepto de equicontinuidad que acabamos de presentar en las líneas precedentes.

Utilizando estos teoremas, podemos decir algo sobre la continuidad del límite de sucesiones de aplicaciones lineales continuas.

Teorema 7 *Si* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de aplicaciones lineales continuas definidas sobre un espacio de Fréchet* $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *a valores en un espacio topológico* F *y si el límite siguiente*

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

existe para todo $x \in E$, *entonces la aplicación lineal* T *es continua.*

Prueba.
El corolario 3 nos asegura que la familia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, por lo tanto si W es una vecindad del origen de F, tenemos $T_n(V) \subset W$ para todo n, para una vecindad V del origen de E.
$\Longrightarrow$ Se obtiene entonces que $T(V) \subset \overline{W}$ y por lo tanto, la aplicación T es continua. ■

Observación 2 Como acabamos de ver, los teoremas 6 y 7 se deducen de los resultados anteriores relativos a la equicontinuidad. Sin embargo, es muy útil disponer de estas dos versiones anteriores que son mucho más sencillas de aplicar y de recordar.