Lección n°4: Dualidad

EPN, verano 2012

Motivación y construcción de topologías débiles

¿Por qué definir varias topologías sobre un mismo espacio? Para dar una respuesta a esta pregunta, es necesario ilustrar un poco los fenómenos que aparecen cuando un mismo conjunto admite varias topologías.

$\Longrightarrow$ Para empezar recordemos que ciertas propiedades, como la continuidad por ejemplo, pueden variar en función de la estructura topológica considerada. Pero éste es evidentemene solo un primer aspecto.

$\Longrightarrow$ Vemos más generalmente que si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ son dos topologías definidas sobre un mismo espacio X, entonces por un lado se tiene que $(X, \mathcal{T}_1)$ posee *menos* conjuntos abiertos que $(X, \mathcal{T}_2)$, pero se tiene por otro lado que $(X, \mathcal{T}_1)$ posee *más* conjuntos compactos (si hay menos conjuntos abiertos, será más sencillo obtener subrecubrimientos abiertos finitos) que $(X, \mathcal{T}_2)$.
Recuérdese que los conjuntos compactos poseen propiedades muy importantes[1] y a veces es más agradable (y en muchos casos indispensable) trabajar con ellos.
Esta es una de las principales razones por las cuales resulta interesante *debilitar* las topologías y éste va a ser uno de nuestros principales objetivos: obtener estructuras topológicas con mayor cantidad de compactos.

$\Longrightarrow$ Sin embargo, hay que tener un poco de cuidado en este proceso: por ejemplo, si X es un cierto espacio dotado de la topología gruesa $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, se tiene que todo subconjunto de X es compacto con respecto a esta topología puesto que se tiene solo dos conjuntos abiertos, pero esta estructura topológica es demasiado pobre para trabajar efectivamente con ella.

$\Longrightarrow$ Un último ejemplo está dado por el hecho que la topología de un espacio separado (o de Hausdorff) compacto X presenta un cierto tipo de *rigidez* en el sentido siguiente: no se puede debilitar la topología de X sin perder la propiedad de Hausdorff y no se puede fortalecer su topología sin perder la propiedad de compacidad. Esta situación se clarifica con la proposición que sigue.

Proposición 1 *Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ son dos topologías sobre un mismo conjunto X y si $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio topológico de Hausdorff y si $(X, \mathcal{T}_2)$ es un espacio compacto, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Basta verificar la inclusión $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ y para ello vamos a mostrar que si $Y \subset X$ es un subconjunto cerrado para la topología $\mathcal{T}_2$ entonces Y es cerrado para la topología $\mathcal{T}_1$.
En efecto, como X es $\mathcal{T}_2$-compacto, se tiene que Y también lo es y dado que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ se deduce que Y también es compacto para la topología $\mathcal{T}_1$ pues todo recubrimiento $\mathcal{T}_1$-abierto de Y es un recubrimiento $\mathcal{T}_2$-abierto.
$\Longrightarrow$ Como $\mathcal{T}_1$ tiene la propiedad de Hausdorff, se obtiene que Y es $\mathcal{T}_1$-cerrado: se tiene entonces que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. ■

Estos ejemplos muestran el interés y los riesgos que se tienen al debilitar una topología. Toda la dificultad se encuentra en obtener una noción de topología débil con "buenas" propiedades. *¿Cómo entonces construir topologías débiles con buenas propiedades?*

Para responder a esta pregunta vamos a utilizar el siguiente método general:

[1] en efecto, si además se trabaja sobre un espacio métrico, las nociones de compacidad y de compacidad secuencial coinciden y esto permite trabajar cómodamente con subsucesiones como lo veremos más adelante.

Definición 1 (Topología débil generada por una familia de aplicaciones) *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico. La colección $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos de tipo $\varphi^{-1}(V)$ en donde $\varphi \in \mathscr{F}$ y V es un abierto de Y_φ es una* topología *sobre el conjunto X y es la topología* más débil *que hace que cada aplicación $\varphi \in \mathscr{F}$ sea continua.*

A esta topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ se le denomina la topología débil generada por la familia $\mathscr{F}$. *Cuando no haya confusión posible sobre la familia $\mathscr{F}$ y cuando el contexto esté claro, notaremos más simplemente $\mathcal{T}$ en vez de $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$.*

Nótese que esta manera de obtener topologías es totalmente clásica.

Observación 1

1) Es importante notar que en la definición 1 que acabamos de dar, el conjunto X no está necesariamente dotado de una topología. En este sentido, y por el momento, el adjetivo *débil* asociado a la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es parte de la definición puesto que no se lo compara con ninguna otra topología definida sobre el conjunto X.

2) La estructura topológica que se obtiene de esta manera sobre X es "arrastrada" a partir de la estructura topológica de cada espacio Y_φ por medio de la familia $\mathscr{F}$: como se puede intuir, cuanto mayor estructura se disponga sobre la colección de espacios topológicos Y_φ y si la familia de aplicaciones $\mathscr{F}$ verifica algunos puntos adicionales, más propiedades se obtendrán sobre X.

3) Si en cambio X está dotado de una estructura topológica $\mathcal{T}_I$ y si cada una de las aplicaciones φ de la familia $\mathscr{F}$ es continua para la topología $\mathcal{T}_I$, entonces por definición, se tiene que $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es más débil que $\mathcal{T}_I$. Estudiaremos este caso un poco más adelante.

Una noción que será de gran utilidad es la siguiente.

Definición 2 (Familia separadora) *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico. La familia $\mathscr{F}$ es una familia* separadora *si para todo $x \neq y \in X$ existe una aplicación $\varphi_0 \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi_0(x) \neq \varphi_0(y)$.*

Retomemos como ejemplo la construcción de la topología producto: sea $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ una familia de espacios topológicos y sea el producto cartesiano $X = \prod_{i=1}^n X_i$, se tiene que la familia $(\pi_i)_{1\leq i\leq n}$ de proyecciones canónicas

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : X = \displaystyle\prod_{i=1}^n X_i & \longrightarrow & X_i \\ x = (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

es una familia separadora. En efecto, si $x = (x_1, ..., x_n) \neq y = (y_1, ..., y_n)$, entonces existe al menos un índice $1 \leq i \leq n$ tal que $\pi_i(x) \neq \pi_i(y)$.

Esta noción es importante pues se tiene el siguiente resultado que nos da una primera información sobre el tipo de topología que se obtiene al proceder como en la definición 1.

Proposición 2 *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico separado. Si la familia $\mathscr{F}$ es una familia separadora, entonces la topología débil $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ generada por la familia $\mathscr{F}$ es una topología separada.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Sean x, y dos puntos distintos de X, dado que la familia $\mathscr{F}$ es una familia separadora, entonces existe una aplicación $\varphi_0 \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi_0(x) \neq \varphi_0(y)$. Se tiene además que los puntos $\varphi_0(x)$ y $\varphi_0(y)$ poseen vecindades U y V disjuntas en Y_{φ_0} puesto que es un espacio separado.
$\Longrightarrow$ La imágen recíproca bajo φ_0 de los conjuntos U y V son entonces conjuntos abiertos disjuntos de $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ que

contienen x y y respectivamente, de donde se deduce que la topología débil $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es separada. ■

Mostremos un ejemplo en dónde se juntan las proposiciones 1 y 2.
$\Longrightarrow$ Consideremos el producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ de espacios topológicos X_i y supongamos que cada espacio X_i es un espacio de Hausdorff compacto.
$\Longrightarrow$ Sabemos entonces que se tiene, por el teorema de Tychonov, que la topología producto $\mathcal{T}$ construida sobre X es una topología que vuelve al conjunto X compacto.
$\Longrightarrow$ Ahora, gracias a la proposición 2, se tiene que X es un espacio de Hausdorff compacto, de manera que, por la proposición 1, esta topología $\mathcal{T}$ no puede ser fortalecida sin perder la propiedad de compacidad.

Vemos, con los resultados anteriores, que hay que tener un poco de cuidado para fijar una buena familia de aplicaciones $\mathscr{F}$ con su correspondiente colección de espacios topológicos Y_φ. En todo lo que sigue vamos a seguir la vía natural que consiste en fijar como aplicaciones las *aplicaciones lineales* (nótese que no se dice nada sobre la eventual continuidad de estas aplicaciones: por el método expuesto en la definición 1 vamos a considerar justamente una *buena* topología que las vuelva todas continuas) y en donde todos los espacios Y_φ son el cuerpo escalar $\mathbb{K}$. Es importante insistir sobre el hecho que la utilización de formas lineales no es algo fortuito: será gracias a esta familia muy particular de aplicaciones que obtendremos los resultados más importantes.

Necesitaremos el lema a continuación.

Lema 1 *Sean $T_1, ..., T_n$ y T formas lineales definidas sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y sea el conjunto $N \subset E$ definido por $N = \{x \in E : T_1(x) = ... = T_n(x) = 0\}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

1) existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que $T = \alpha_1 T_1 + ... + \alpha_n T_n$,

2) existe una constante $C > 0$ tal que $|T(x)| \leq C \max\limits_{1 \leq i \leq n} |T_i(x)|$ para todo $x \in E$,

3) se tiene $T(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Prueba. Se observa fácilmente que 1) $\Longrightarrow$ 2) y que 2) $\Longrightarrow$ 3), de manera que se tiene el lema si se demuestra que 3) $\Longrightarrow$ 1).
Supongamos pues que se tiene el punto 3). Definimos entonces una aplicación lineal ϕ por

$$\begin{array}{rcl} \phi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \phi(x) = (T_1(x), ..., T_n(x)). \end{array}$$

La hipótesis 3) significa que $\phi(x) = 0$ implica $T(x) = 0$ y por linealidad de todas estas aplicaciones se tiene en particular que $\phi(x) = \phi(y)$ implica $T(x) = T(y)$.
$\Longrightarrow$ Entonces si definimos una aplicación f por medio de la fórmula $f(\phi(x)) = T(x)$ obtenemos una forma lineal $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{K}$. Es posible entonces prolongar la forma lineal f en una forma lineal F definida sobre todo $\mathbb{K}^n$.
$\Longrightarrow$ Ahora, dado que F es una forma lineal sobre todo $\mathbb{K}^n$, esto implica la existencia de escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tales que $F(u_1, ..., u_n) = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$ para todo $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{K}^n$. De esto se obtiene que

$$T(x) = F(\phi(x)) = F(T_1(x), ..., T_n(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i(x)$$

que no es más que el primer punto, lo que termina la prueba del lema. ■

Vamos a utilizar este lema para obtener el siguiente teorema que es una primera etapa para relacionar la definición 1 con el espacio de aplicaciones lineales continuas.

Teorema 1 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ una familia separadora de formas lineales sobre E. Entonces la topología débil $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ generada por la familia $\mathscr{F}$ hace del espacio $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ un espacio topológico localmente convexo separado cuyo espacio dual es exactamente $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Empecemos verificando que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ provee al espacio E con una estructura de espacio localmente convexo separado.
Dado que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios separados, entonces por la proposición 2 se tiene que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es separada y la linealidad de los elementos de $\mathscr{F}(E,\mathbb{K})$ muestra que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es invariante por traslación. Ahora, si consideramos $T_1, ..., T_n$ una familia de formas lineales de $\mathscr{F}(E,\mathbb{K})$, si $r_i > 0$ es una familia de números reales, podemos construir los conjuntos

$$V = \{x \in E : |T_i(x)| < r_i \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Vemos, por las propiedades de las aplicaciones lineales T_i que este tipo de conjunto V es convexo, equilibrado y pertenece a $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Tenemos entonces, por construcción, que la colección de todos los conjuntos determinados de esta manera forman una base local para $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, de donde se obtiene que $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ provee al espacio E con una topología de espacio localmente convexo separado.
$\Longrightarrow$ Verifiquemos la compatibilidad de esta topología con la estructura vectorial de E. En efecto, nótese que si el conjunto V está definido de esta forma, entonces se tiene $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$ lo que muestra que la aplicación suma de la estructura vectorial de E es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Vamos a verificar ahora la continuidad de la multiplicación por un escalar. Sea V una vecindad del origen de E, si $x - y \in rV$ con $r > 0$, entonces se tiene que $\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) \in V$ si r es tal que $r|\alpha| < 1$. De esta manera hemos verificado que la aplicación multiplicación por un escalar es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Se tiene por lo tanto que $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es una topología de espacio vectorial localmente convexo separado sobre E.
$\Longrightarrow$ Para terminar el teorema, hay que verificar que $\mathscr{F}(E,\mathbb{K})$ es el espacio dual de E. Vemos sin problema que toda forma lineal $T \in \mathscr{F}(E,\mathbb{K})$ es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Recíprocamente, sea S una forma lineal continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, entonces se tiene $|S(x)| < 1$ para todo x de cierto conjunto $V \in E$. Notamos ahora que la condición 2) del lema 1 es verificada, pues $|S(x)| \leq C \max\limits_{1 \leq i \leq n} |T_i(x)|$ en donde las formas lineales T_i definien la vecindad V, y por lo tanto se tiene que $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$. Como cada T_i pertenece al espacio $\mathscr{F}(E,\mathbb{K})$, que es un espacio vectorial, se tiene que $S \in \mathscr{F}(E,\mathbb{K})$. ■

Este resultado es interesante por varios motivos:
$\Longrightarrow$ básicamente nos dice que si partimos de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y de una familia separadora de aplicaciones lineales $\mathscr{F}$, entonces el espacio $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ posee una estructura topológica interesante (es un espacio localmente convexo) y además se tiene que el conjunto $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ de formas lineales continuas (para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$) es precisamente la familia $\mathscr{F}$ inicialmente dada (es decir $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = \mathscr{F}$).

Sin embargo, si cambiamos la familia de aplicaciones lineales $\mathscr{F}$ por otra familia $\mathscr{F}'$, se obtendrá una segunda estructura topológica $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}'})$ con propiedades totalmente similares. Procediendo de esta manera podemos tener una amplia gama de estructuras topológicas, similares pero distintas, sobre el espacio E. ¿Cómo escoger la mejor (o más adaptada) familia de aplicaciones lineales para obtener la mejor (o más adaptada) estructura topológica sobre E? La subsección que sigue responderá a esta pregunta utilizando la noción de corchete de dualidad.

Dualidad y topologías asociadas

Recuérdese que el concepto de *espacio dual* ha sido presentado como una definición. Es necesario precisar esta noción con la definición a continuación.

Definición 3 (Corchete de dualidad) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Decimos que una forma bilineal*

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F} : E \times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle_{E\times F} \end{array}$$

es un corchete de dualidad *entre los espacios E y F si se tienen los dos puntos siguientes:*

1) si $\langle x,y\rangle_{E\times F} = 0$ para todo $y \in F$, entonces se tiene $x = 0$,

2) si $\langle x,y\rangle_{E\times F} = 0$ para todo $x \in E$, entonces se tiene $y = 0$.

Decimos además que el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$ pone en dualidad *los espacios E y F.*

Notación: Cuando el contexto esté lo suficientemente claro y cuando no haya confusión entre los espacios E y F, notaremos simplemente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en vez de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$.

A partir de un corchete de dualidad se pueden obtener *dos* familias de formas lineales que poseen la importante propiedad de separación:

Lema 2 (Obtención de familias separadoras a partir del corchete de dualidad) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$. Entonces las familias de aplicaciones lineales*

$$\mathscr{E} = \{\varphi_y : x \longmapsto \langle x,y\rangle_{E\times F} : \forall y \in F\} \quad y \quad \mathscr{F} = \{\psi_x : y \longmapsto \langle x,y\rangle_{E\times F} : \forall x \in E\}$$

son familias separadoras en el sentido de la definición 2.

Prueba. $\Longrightarrow$ Esta propiedad de separación del corchete de dualidad no es más que una relectura de las condiciones 1) y 2) de la definición 2.
En efecto, si $x_1 \neq x_2 \in E$ se tiene que $x_1 - x_2 \neq 0$, de manera que existe por el punto 1) una aplicación $\varphi_y \in \mathscr{E}$ tal que $\varphi_y(x_1 - x_2) \neq 0$, de donde, por linealidad se obtiene que $\varphi_y(x_1) \neq \varphi_y(x_2)$. Razonando de forma totalmente similar se obtiene la propiedad separadora de la familia $\mathscr{F}$. ■

Demos ahora un ejemplo muy importante de un corchete que pone en dualidad dos espacios vectoriales.

Proposición 3 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ el dual topológico de E. Entonces la forma bilineal $\langle x,T\rangle_{E\times E'}$ definida por*

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times E'} : E \times E' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,T) & \longmapsto & \langle x,T\rangle_{E\times E'} = T(x) \end{array} \tag{1}$$

es un corchete de dualidad y pone los espacios E y E' en dualidad.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Si tenemos que $T(x) = 0$ para todo $x \in E$, se tiene entonces evidentemente que $T = 0$.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, debemos verificar que si $T(x) = 0$ para todo $T \in E'$ entonces $x = 0$. Esto es una consecuencia del teorema de Hahn-Banach puesto que si suponemos que $x \neq 0$ entonces, existe una forma lineal $S \in E'$ tal que $S(x) \neq 0$.

Hemos verificado los dos puntos exigidos por la definición 3 y obtenemos entonces que los espacios E y E'

están en dualidad. ■

Este resultado merece la definición siguiente.

Definición 4 (Corchete de dualidad canónico) *El corchete de dualidad determinado por la fórmula (1) es el* corchete de dualidad canónico *entre un espacio vectorial localmente convexo separado E y su espacio dual E'.*

Observación 2 Es importante notar que, el hecho de utilizar el corchete de dualidad canónico (1) para poner en dualidad un espacio vectorial localmente convexo separado E y su espacio dual E', no es totalmente trivial puesto que es necesario usar el teorema de Hahn-Banach.

Corolario 1 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, entonces la familia $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ de todas las formas lineales continuas definidas sobre E es una familia separadora.*

Podemos dotar a dos espacios puestos en dualidad con estructuras topológicas muy particulares:

Definición 5 (topología $\sigma(E, F)$ y topología $\sigma(F, E)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$.*

1) *Sobre el espacio E definimos la topología $\sigma(E, F)$ como la topología débil generada por la familia de formas lineales $T_y : x \longmapsto \langle x, y \rangle_{E\times F}$ para todo $y \in F$.*

   Notaremos $(E, \sigma(E, F))$ o más simplemente $E_{\sigma(E,F)}$ cuando el espacio E está dotado de esta topología.

2) *Simétricamente, sobre el espacio F definimos la topología $\sigma(F, E)$ como la topología débil generada por la familia de formas lineales $T_x : y \longmapsto \langle x, y \rangle_{E\times F}$ para todo $x \in E$.*

   De igual forma, notaremos $(F, \sigma(F, E))$ o más simplemente $F_{\sigma(F,E)}$ cuando el espacio F está dotado de esta topología.

Ilustramos este hecho con la figura a continuación.

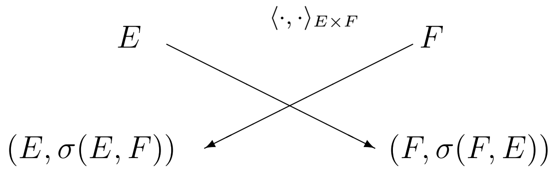

Figura 1: Corchete de dualidad y topologías asociadas.

Por el teorema 1 se obtienen propiedades simétricas para los espacios E y F: los espacios $E_{\sigma(E,F)}$ y $F_{\sigma(F,E)}$ son dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos separados localmente convexos; pero es posible ir un poco más lejos pues estas estructuras topológicas pueden ser caracterizadas por medio del corchete de dualidad utilizando el resultado a continuación:

Proposición 4 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$.*

1) *La topología $\sigma(E, F)$ definida sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial E es una topología separada de espacio localmente convexo que puede ser definida por las semi-normas*

$$\begin{array}{rcl} p_y : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & p_y(x) = |\langle x, y \rangle_{E\times F}| \end{array}$$

   para todo $y \in F$.

2) *Simétricamente, la topología $\sigma(F, E)$ definida sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial F es una topología separada de espacio localmente convexo que puede ser definida por las semi-normas*

$$\begin{array}{rcl} p_x : F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & p_x(y) = |\langle x, y \rangle_{E\times F}| \end{array}$$

   para todo $x \in E$.

Prueba. Basta verificar el primer punto, pues el segundo, por simetría, es totalmente similar.
$\Longrightarrow$ Empecemos verificando rápidamente que las aplicaciones p_y son efectivamente semi-normas: en efecto, por las propiedades de bilinealidad del corchete de dualidad se tiene para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ que $p_y(\alpha x) = |\alpha| p_y(x)$ y que $p_y(x_1 + x_2) \leq p_y(x_1) + p_y(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$, de manera que se obtiene sin problema que las aplicaciones p_y son semi-normas. Consideremos ahora la familia de aplicaciones $\mathscr{E} = \{T_y : x \longmapsto \langle x, y \rangle_{E\times F} : \text{ para todo } y \in F\}$. El hecho que esta familia es separadora se deduce del lema 2.
$\Longrightarrow$ Podemos entonces aplicar el teorema 1, de manera que la topología $\sigma(E, F)$ provee al espacio E con una estructura de espacio localmente convexo separado, de modo que para terminar debemos comparar los espacios topológicos $(E, (p_y)_{y\in F})$ y $(E, \sigma(E, F))$.
$\Longrightarrow$ Recuérdese que por construcción, la topología $\sigma(E, F)$ hace que cada aplicación $T_y(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle_{E\times F}$ sea continua, y dado que $|T_y(x)| = p_y(x)$ para todo $y \in F$ se obtiene sin problema que estas dos topologías son las mismas. ■

Es importante notar la utilidad del corchete de dualidad: vemos con los resultados anteriores que esta herramienta nos permite decir cuando dos espacios vectoriales están en dualidad, nos proporciona familias separadoras de aplicaciones lineales y nos dice cómo caracterizar las diversas topologías generadas por medio de semi-normas.

Proposición 5 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología $\mathcal{T}_I$ que hace de él un espacio localmente convexo separado y sea $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ el dual topológico de E. Entonces la topología $\sigma(E, E')$ es más débil que la topología $\mathcal{T}_I$, es decir que se tiene $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$.*

Hemos visto con el teorema 1 cómo, a partir de una familia de aplicaciones, es posible dotar a un espacio vectorial con una estructura topológica. Si la familia de aplicaciones proviene de un corchete de dualidad, el resultado que sigue nos dice qué relación existe entre el espacio dual E' que se obtiene de esta estructura topológica y el espacio F puesto en dualidad.

Teorema 2 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$. Consideremos el espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E, F)$ y sea E' el espacio dual del espacio vectorial $(E, \sigma(E, F))$. Entonces la aplicación $\phi : y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle_{E\times F}$ es un* isomorfismo topológico *de F sobre E' para las topologías $\sigma(F, E)$ y $\sigma(E', E)$. Además, toda forma lineal continua T definida sobre $E_{\sigma(E,F)}$ se escribe de la siguiente manera*

$$T(x) = \langle x, y \rangle_{E\times F} \quad \text{para algún } y \in F.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$Por definición del corchete de dualidad, se tiene que si $\phi(y) = 0$ entonces $y = 0$, de donde se obtiene que ϕ es inyectiva.

$\Longrightarrow$ Por el teorema 1, se tiene sobre E' una estructura de espacio vectorial localmente convexo separado. Utilizando la caracterización de la continuidad, si $T \in E'$, existe entonces una parte finita $\{y_1, ..., y_n\}$ de F y una constante $C \geq 0$ tal que

$$|T(x)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x, y_i \rangle_{E \times F}| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Se deduce de esto que $T(x) = 0$ si $\langle x, y_i \rangle_{E \times F} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.
$\Longrightarrow$ Ahora, por el lema 1, se tiene que T es una combinación lineal de las formas lineales $\langle \cdot, y_i \rangle_{E \times F}$, lo que muestra que T es de la forma $\langle x, y \rangle_{E \times F}$ en donde y es una combinación lineal de los y_i. Con esto se obtiene que ϕ es sobreyectiva.
$\Longrightarrow$ Para terminar, mostremos que ϕ es un isomorfismo topológico. Para ello usamos la proposición 4 que nos dice que la topología $\sigma(F, E)$ de F puede ser caracterizada por las semi-normas $p_x : y \longmapsto |\langle x, y \rangle_{E \times F}|$, mientras que la topología $\sigma(E', E)$ de E' está dada por las semi-normas $q_x : T \longmapsto |T(x)|$; de tal manera que para obtener el isomorfismo basta observar que $p_x = q_x \circ \phi$. ■

Este teorema tiene un corolario muy interesante.

Corolario 2 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología $\mathcal{T}_I$ que hace de él un espacio localmente convexo separado. Notamos E' el espacio dual de E con respecto a la topología $\mathcal{T}_I$. Entonces E' sigue siendo el espacio dual de E con respecto a la topología débil $\sigma(E, E')$.*

Prueba.
Notemos $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ el conjunto de formas lineales continuas con respecto a la topología inicial $\mathcal{T}_I$.
$\Longrightarrow$ Dado que por la proposición 3 se tiene que los espacios E y $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ se encuentran en dualidad por medio del corchete de dualidad canónico (1), se obtiene sobre E una estuctura de e.l.c. más débil: $(E, \sigma(E, E'))$.
$\Longrightarrow$ Notemos ahora $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$ el conjunto de formas lineales continuas con respecto a la topología débil $\sigma(E, E')$. Para obtener el corolario, basta entonces aplicar el teorema 2 con $F = E'_{[\mathcal{T}_I]}$ para obtener el isomorfismo topológico entre $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ y $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$. ■

Recapitulamos con el gráfico a continuación la situación considerada:

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathcal{T}_I) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\bigcup"] & E'_{[\mathcal{T}_I]} \cong E'_{[\sigma(E,\,E')]} \arrow[dl, shift left] \\
(E, \sigma(E, E')) \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Topología inicial, topología débil y espacios duales asociados

En el gráfico anterior, se parte de un espacio topológico localmente convexo $(E, \mathcal{T}_I)$ a partir del cual se considera el conjunto $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ todas las formas lineales continuas para la topología inicial $\mathcal{T}_I$. Dado que, por la proposición 3, estos espacios E y E' están puestos en dualidad por medio del corchete de dualidad canónico; es posible considerar la topología $\sigma(E, E')$ sobre E. Se construye luego el conjunto $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$ de todas las formas lineales continuas para la topología débil $\sigma(E, E')$, y por el corolario 2 anterior se obtiene la identificación entre $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ y $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$.

Corolario 3 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Se tiene entonces la identidad $(E_{\sigma(E,E')})_{\sigma(E,E')} = E_{\sigma(E,E')}$. Es decir que, siguiendo este proceso, la topología débil de la topología débil es igual a la topología débil.*

Prueba. En efecto, si la familia de formas lineales que permite construir la topología débil $\sigma(E, E')$ no varía, como es el caso aquí, al volver a considerar el proceso de construcción de topologías débiles usando esta familia de aplicaciones y aplicando el resultado anterior se obtiene este corolario. ■