Lección n°5: Propiedades de las topologías débiles

EPN, verano 2012

A) Propiedades fuertes y propiedades débiles: estudio comparativo de la topología $\sigma(E, E')$.

En todo lo que sigue utilizaremos el marco a continuación: partimos de E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología $\mathcal{T}_I$ de manera que $(E, \mathcal{T}_I)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Consideramos luego su espacio dual E' y utilizando el corchete de dualidad canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times E'}$ obtenemos la estructura topológica débil $\sigma(E, E')$ sobre E.

En este contexto tenemos dos estructuras topológicas sobre E:

- Todas las nociones relativas a la topología inicial $\mathcal{T}_I$ sobre E serán calificadas con el adjetivo "fuerte" o "fuertemente".
- Todas las nociones relativas a la topología $\sigma(E, E')$ sobre E serán calificadas con el adjetivo "débil" o "débilmente".

Es necesario aclarar y comparar las diversas particularidades que están relacionadas a estas dos estructuras topológicas. En lo que sigue haremos una pequeña lista de los conceptos más importantes y aprovecharemos para fijar algunas notaciones.

- **Vecindades**
    - Dado que $(E, \mathcal{T}_I)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, tenemos que esta topología puede ser determinada por una familia de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$. Podemos entonces caracterizar las vecindades *fuertes* V_f del origen $0 \in E$ por
    $$V_f = \{x \in E : p_{i_k}(x) < \varepsilon_k, \quad k = 1, ..., n\}$$
    en donde $p_{i_1}, ..., p_{i_n}$ es un sistema finito de semi-normas y ε_k son números reales positivos. Por traslación de estas vecindades se obtienen las vecindades de todos los puntos de E.
    - Para caracterizar las vecindades *débiles* V_d, utilizamos el corchete de dualidad canónico. En efecto, tenemos por este resultado que la topología débil $\sigma(E, E')$ es una topología de espacio localmente convexo separado caracterizada por las semi-normas $p_T(x) = |T(x)|$, de manera que podemos fijar un sistema finito de estas semi-normas para construir las vecindades débiles del origen $0 \in E$ de la siguiente manera:
    $$V_d = \{x \in E : |T_i(x)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\} \tag{1}$$
    en donde $T_i \in E'$ son formas lineales continuas y ε_i son números reales positivos.

    Nótese en particular que, por la continuidad de las aplicaciones T_i en la topología $\mathcal{T}_I$, se tiene que $|T_i(x)| \leq C p_{i_k}(x)$, de manera que toda vecindad débil está contenida en una vecindad fuerte: esto no es más que una traducción del hecho que $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$.

    Observación 1 Puesto que $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$, se tiene que todo conjunto abierto de $\sigma(E, E')$ es un abierto de $\mathcal{T}_I$. Desde el punto de vista de los conjuntos cerrados se tiene algo totalmente similar, es decir que todo conjunto débilmente cerrado es fuertemente cerrado. Evidentemente no se tiene la recíproca, para ello es necesario añadir una hipótesis adicional, ver la proposición 1 para más detalles.

    Observación 2 Una vez que se tienen identificadas las vecindades fuertes y débiles se obtiene inmediatamente todas las propiedades topológicas restantes. Sin embargo, es interesante exponer en qué manera intervienen las formas lineales continuas para la caracterización de las propiedades débiles.

- **Convergencia**

  - Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge *fuertemente* (es decir en el sentido de la topología inicial $\mathcal{T}_I$) hacia $x \in E$, si cada vecindad *fuerte* de x contiene todos los puntos x_n a partir de un n suficientemente grande. Escribiremos entonces

$$x_n \longrightarrow x, \qquad x_n \xrightarrow{f} x \quad \text{ó} \quad f - \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

    para designar la convergencia fuerte.

  - Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge *débilmente* (es decir en el sentido de la topología $\sigma(E, E'))$ hacia $x \in E$, si cada vecindad *débil* de $x \in E$ contiene todos los puntos x_n a partir de un n suficientemente grande. Escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x, \qquad x_n \xrightarrow{d} x \quad \text{ó} \quad d - \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

    para notar la convergencia débil.

    Por comodidad, conviene traducir la convergencia débil en términos del corchete de dualidad. Tenemos entonces que se tiene la convergencia débil $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si se tiene la convergencia fuerte en $\mathbb{K}$ siguiente

$$\langle x_n, T\rangle_{E\times E'} \longrightarrow \langle x, T\rangle_{E\times E'} \qquad \text{para todo } T \in E'. \tag{2}$$

    Es decir, usando el corchete de dualidad canónico, que $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ para toda forma lineal continua T.

    Observación 3 Vemos en particular con esta caracterización que la convergencia fuerte implica la convergencia débil; pero que no se tiene necesariamente la recíproca.

- **Acotación**

  - La acotación fuerte corresponde a la noción dada con respecto a la topología $\mathcal{T}_I$. Es decir, un subconjunto A de E es *fuertemente acotado*, si para toda vecindad fuerte V_f del origen de E, existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_f$ para todo $\tau > \sigma$.

  - Diremos que un subconjunto A de E es *débilmente acotado* si y solo si toda vecindad débil V_d del origen de E, existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_d$ para todo $\tau > \sigma$.
    Esto sucede si y solo si a cada forma lineal $T \in E'$ corresponde un número real $0 < \gamma < +\infty$ tal que $|T(x)| \leq \gamma$ para todo $x \in A$. Dicho de otra manera, un subconjunto A de E es débilmente acotado si y solo si toda forma lineal $T \in E'$ es una función acotada sobre A.

    Observación 4 Tenemos entonces que la acotación fuerte implica la acotación débil. Veremos un poco más tarde bajo qué condiciones estas nociones coinciden.

- **Cerradura**

  - La cerradura *fuerte* de un conjunto $A \subset E$ es la intersección de todos los conjuntos (fuertemente) cerrados que contienen A, es decir: $\overline{A}_f = \bigcap\limits_{A\subset C} C$, con C cerrado de $\mathcal{T}_I$.

  - La cerradura *débil* de un conjunto $A \subset E$ es la intersección de todos los conjuntos (débilmente) cerrados que contienen A, es decir, de la misma manera se tiene: $\overline{A}_d = \bigcap\limits_{A\subset D} D$, con D cerrado de $\sigma(E, E')$. Tenemos entonces, por la observación 1, que $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$, pero no se tiene necesariamente la inclusión recíproca.

Sin embargo, cuando se trata de la cerradura de conjuntos *convexos* se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Si $A \subset E$ es un subconjunto convexo de E entonces la cerradura fuerte de A es igual a su cerradura es débil. Es decir $\overline{A}_f = \overline{A}_d$.*

Prueba.
Empecemos con el caso cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$ Dado que se tiene siempre la inclusión $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$, solo basta verificar la inclusión recíproca y para ello vamos a mostrar que si $x_0 \notin \overline{A}_f$ entonces $x_0 \notin \overline{A}_d$.
$\Longrightarrow$ Sea pues $x_0 \notin \overline{A}_f$, por el segundo punto del teorema de separación de conjuntos convexos y usando como conjunto compacto $\{x_0\}$ y $\overline{A}_f$ como conjunto cerrado, se obtiene la existencia de una forma lineal continua $T \in E'$ y de un real c tales que

$$\Re e(T(x_0)) < c < \Re e(T(x)) \qquad \text{para todo } x \in \overline{A}_f.$$

$\Longrightarrow$ De esta manera se obtiene que el conjunto $V = \{x \in E : \Re e(T(x)) < c\}$ es una vecindad débil del punto x_0 que no intersecta A, de donde se deduce que x_0 no pertenece al conjunto $\overline{A}_d$ y esto muestra que $\overline{A}_d \subset \overline{A}_f$. ■

Corolario 1 *Sea $(E, \mathcal{T}_I)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Entonces, para todo subconjunto convexo A de E se tiene que A es cerrado si y solo si A es débilmente cerrado.*

- **Densidad**
  Recordemos que un subconjunto $A \subset E$ es fuertemente *denso* en E si $\overline{A}_f = E$; de igual forma diremos que un subconjunto A es *débilmente denso* en E si $\overline{A}_d = E$.

  Dado que se tiene la inclusión $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$, vemos que si un conjunto es fuertemente denso, entonces es débilmente denso y en el caso de los subconjuntos convexos, se puede decir un poco más al respecto.

  Corolario 2 *Sea $(E, \mathcal{T}_I)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Entonces todo subconjunto convexo A de E es fuertemente denso si y solo si A es débilmente denso.*

  Esto es inmediato a la luz de la proposición 1 y del corolario 1 anterior.

  Observación 5 El lector debe tener mucho cuidado con estos resultados de cerradura y densidad puesto que la hipótesis de convexidad es indispensable.

Terminamos aquí el estudio comparativo de las características débiles y fuertes. Para finalizar nuestra exposición sobre la topología débil damos unos resultados que muestran algunos inconvenientes que se presentan al trabajar con esta estructura topológica.

Proposición 2 *Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado de dimensión infinita, entonces toda vecindad débil del origen contiene un subespacio de dimensión infinita.*

Prueba. Consideremos pues una vecindad débil de la forma dada en la expresión (1):

$$V_d = \{x \in E : |T_i(x)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

en donde $T_i \in E'$ son formas lineales continuas y ε_i son números reales positivos. Consideremos el conjunto $N = \{x \in E : T_1(x) = ... = T_n(x) = 0\}$. Dado que la aplicación lineal $\psi : x \longmapsto (T_1(x), ..., T_n(x))$ envía E en $\mathbb{K}^n$ y que su núcleo es igual a N, se tiene entonces que $dim(E) \leq n + dim(N)$. Dado que $N \subset V$ se obtiene el resultado buscado. ■

Este resultado es suficiente en muchos casos para mostrar que la topología débil $\sigma(E, E')$ es estríctamente más débil[1] que la topología inicial $\mathcal{T}_I$. Un ejemplo de ello es el siguiente teorema.

Teorema 1 (Problemas de normabilidad de la topología débil) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado de dimensión infinita y sea E' su espacio dual. Entonces el espacio E, dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$ no es normable.*

[1] recordar que existen casos en donde se tiene la igualdad.

Demostración.
$\Longrightarrow$ Vamos a mostrar que no existe ninguna norma continua (es decir compatible) definida sobre $(E, \sigma(E, E'))$. Sabemos que $(E, \sigma(E, E'))$ es un espacio localmente convexo separado cuyas vecindades están dadas por la expresión (1).
$\Longrightarrow$ Supongamos pues que existe una norma continua n sobre E, entonces existe un número finito de formas lineales $T_1, ..., T_n \in E'$ y un número $C > 0$ tales que

$$n(x) \leq C \sum_{i=1}^{n} |T_i(x)|, \qquad \text{para todo } x \in E.$$

$\Longrightarrow$ Como E es de dimensión infinita, existe $x \neq 0$ tal que $T_1(x) = ... = T_n(x) = 0$. Se tiene entonces que $n(x) = 0$ y por lo tanto n no puede ser una norma dado que no verifica la propiedad de separabilidad.

■

$\Longrightarrow$ Es muy importante recalcar que no hemos presentado ningún resultado de compacidad en el marco de la topología débil.
$\Longrightarrow$Además, el teorema anterior nos indica que en los casos más usuales (espacios de Fréchet o de Banach), hay una verdadera pérdida estructural al considerar esta topología débil.

Estos dos hechos explican por qué la topología débil no es muy utilizada en las aplicaciones pues no cumple con las espectativas planteadas (sin embargo, veremos un poco más tarde los casos particulares en donde resulta útil trabajar con esta topología).

B) La topología débil estrella sobre un espacio dual: estudio de la topología $\sigma(E', E)$.

Partimos aqui de un espacio topológico localmente convexo separado $(E, (p_i)_{i\in I})$, consideramos su espacio dual E' y sobre este espacio arrastramos la topología $\sigma(E', E)$ como lo indica la figura 1.
$\Longrightarrow$ Vamos entonces a concentrarnos en algunas propiedades que se tienen sobre el espacio E' cuando se lo dota de la topología $\sigma(E', E)$.
$\Longrightarrow$ Indiquemos desde ya que esta topología $\sigma(E', E)$ definida sobre el espacio dual E' posee propiedades mucho más interesantes que la topología débil $\sigma(E, E')$ definida sobre E; intuitivamente, esto puede justificarse por el hecho que los elementos de E' son formas lineales continuas sobre E y no solamente puntos de un espacio vectorial.

$$\begin{tikzcd}
(E, (p_i)_{i\in I}) \arrow[r, "\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times E'}"] \arrow[dr] & E' \\
& (E', \sigma(E', E))
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Topología $\sigma(E', E)$ sobre el espacio dual.

Tenemos pues la siguiente definición:

Definición 1 (Topología débil estrella sobre E') *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. A la topología $\sigma(E', E)$ determinada sobre el espacio dual E' se la denomina la* topología débil estrella. *Por simplicidad nos referiremos a esta topología como la topología* débil-$*$.

A las propiedades relativas a esta topología se las notará con el símbolo “ -$*$ ”.

Esta topología es de vital importancia en todo el análisis matemático y el resultado fundamental de esta sección, por sus numerosas aplicaciones, está dado por el teorema 2 a continuación. Pero antes de entrar en detalles, es conveniente fijar algunas ideas:

- **Vecindades débiles-$*$**
  Utilizamos una vez más el corchete de dualidad canónico para caracterizar las vecindades de la topología débil estrella $\sigma(E', E)$. Dado que esta topología puede representarse por medio de las semi-normas $p_x(T) = |T(x)|$ con $x \in E$ y $T \in E'$, se tiene entonces que las vecindades débiles-$*$ son de la forma

  $$V_{d^*} = \{T \in E' : |T(x_i)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

  en donde x_i son elementos de E y ε_i son reales positivos.

- **Convergencia débil-$*$**
  Una vez que se tienen las vecindades débiles-$*$ se tienen las propiedades topológicas restantes, pero es necesario clarificar algunos conceptos mostrando en dónde interviene la dualidad.

  Diremos pues que una sucesión de formas lineales $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente-$*$* hacia T si se tiene la siguiente convergencia fuerte en $\mathbb{K}$:

  $$\langle x, T_n\rangle_{E\times E'} \longrightarrow \langle x, T\rangle_{E\times E'} \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{3}$$

  Dicho de otra manera, una sucesión de formas lineales continuas $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente-$*$ hacia T si $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in E$. Notaremos la convergencia débil-$*$ de la siguiente manera:

  $$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T, \qquad T_n \xrightarrow{d^*} T \quad \text{ó} \quad d^* - \lim_{n\to+\infty} T_n = T.$$

  Observación 6 El lector no debe confundir el límite (3) con la expresión (2): en el primer caso se trata de una sucesión de formas lineales $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$, mientras que en el otro se trata de una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

- **Acotación débil-$*$**
  La noción de acotación es similar: diremos que un conjunto $A \subset E'$ es débilmente-$*$ acotado si para toda vecindad débil V_{d^*} del origen de E' existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_{d^*}$ para todo $\tau > \sigma$.

Compararemos posteriormente esta topología débil-$*$ a las otras estructuras topológicas presentadas hasta aquí (recordemos que por el momento solo se dispone de esta topología sobre el espacio E').

Pasamos entonces al teorema más importante de esta sección:

Teorema 2 (de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y sea E' su espacio dual dotado de la topología débil-$*$ $\sigma(E', E)$. Si V es una vecindad del vector $0 \in E$, entonces el subconjunto $K \subset E'$ de formas lineales continuas definido por*

$$K = \{T \in E' : |T(x)| \leq 1 : \textit{ para todo } x \in V\}$$

es un conjunto débilmente-$*$ compacto.

Observación 7

1) El conjunto K se denomina el *conjunto polar* de V. Es un conjunto convexo y equilibrado en el sentido de la definición 1.3.4 del volumen 1.

2) Nótese que este es el primer resultado de compacidad que enunciamos en el marco de las topologías débiles y esto justificamente plenamente el estudio de la topología débil-$*$.

Demostración.
$\Longrightarrow$ Sea $p \in (p_i)_{i\in I}$ una semi-norma continua definida sobre E tal que la semi-bola $U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ verifique $U \subset V$. Se tiene entonces que el conjunto polar K está contenido en el conjunto K_0 definido por:

$$K_0 = \{T \in E' : |T(x)| \leq 1, \text{ para todo } x \in U\} = \{T \in E' : |T(x)| \leq p(x), \text{ para todo } x \in E\}.$$

$\Longrightarrow$ En efecto, si T es una forma lineal de K se tiene por construcción que $T \in K_0$. Observamos también que el conjunto polar K es cerrado en el conjunto K_0 dotado de la topología débil-$*$ inducida.
$\Longrightarrow$ Por estos dos puntos, lo único que queda entonces por demostrar es que el conjunto K_0 es un conjunto compacto para la topología débil-$*$. Para ello definimos el conjunto $D = \mathbb{K}^E = \{(\alpha_x)_{x\in E} : \alpha_x \in \mathbb{K},\ \text{para todo } x \in E\}$ al cual dotamos de la topología producto, es decir la topología más débil que vuelve las proyecciones canónicas continuas.
$\Longrightarrow$ Definimos ahora una aplicación $\Psi : E' \longrightarrow D$ escribiendo $\Psi(T) = (T(x))_{x\in E}$. Vemos entonces que Ψ es una aplicación lineal, inyectiva y continua de E', dotado de la topología débil-$*$, sobre D dotado de la topología producto.
$\Longrightarrow$ En efecto, si V_{d^*} es una vecindad del origen de E' y si W es una vecindad del origen de D, vemos que se tiene que si $T - S \in V_{d^*}$ entonces $\Psi(T) - \Psi(S) \in W$, de donde se obtiene la continuidad de Ψ por el corolario **??**. Por un argumento similar se tiene además que la aplicación $\Psi^{-1} : \Psi(E') \longrightarrow E'$ es continua.
$\Longrightarrow$ Basta entonces verificar que el conjunto $\Psi(K_0)$ es compacto. Para ello observamos que $\Psi(K_0) = A_1 \cap A_2$ en donde
$$A_1 = \{\alpha \in D : |\alpha_x| \leq p(x),\ \text{para todo } x \in E\} = \prod_{x\in E}[-p(x), p(x)]$$
y
$$A_2 = \{\alpha \in D : \alpha_{x+\lambda y} = \alpha_x + \lambda\alpha_y,\ \text{para todo } x, y \in E \text{ y } \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
$\Longrightarrow$ Por el teorema de Tychonov, en su versión no numerable, se tiene que el conjunto A_1 es compacto, mientras que por la continuidad de las proyecciones canónicas se obtiene que A_2 es un conjunto cerrado y de esta manera se deduce que el conjunto $\Psi(K_0)$ es compacto. Entonces, como $K \subset K_0$ es un subconjunto cerrado de un compacto, se obtiene que K es compacto para la topología débil-$*$.

■

$\Longrightarrow$ Con este resultado se obtiene un resultado de compacidad y el lector observará que es el primer resultado de este tipo que enunciamos en el marco de las topologías débiles.
$\Longrightarrow$ Sin embargo, en las aplicaciones prácticas es a veces útil combinar la propiedad de compacidad con la extracción de subsucesiones convergentes.
En efecto, cuando se trabaja sobre espacios métricos, se dispone de la noción de *compacidad secuencial* que es equivalente a la noción topológica de compacidad.
$\Longrightarrow$ Dado que esta propiedad de extracción de subsucesiones es la que realmente interviene en la mayoría de aplicaciones, es necesario estudiar la metrizabilidad de la topología débil-$*$ con el siguiente resultado:

Teorema 3 (Condición de metrizabilidad de la topología débil-$*$) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Entonces la topología débil-$*$ de E' es metrizable si y solo si E posee una base algébrica numerable.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Recordemos para empezar que un espacio vectorial E admite una base algébrica numerable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si cada uno de los vectores de E puede expresarse como una combinación lineal *finita* de los elementos de esta base.

$\Longrightarrow$ Supongamos que el espacio $(E', \sigma(E', E))$ admite una distancia $d_{E'}$ compatible con la estructura topológica débil-$*$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, por definición de vecindad débil-$*$, existe un subconjunto finito A_n de E tal que, si $T \in E'$ verifica $|T(x)| < 1$ para todo $x \in A_n$, entonces se tiene $T \in B(0, \frac{1}{n}) = \{S \in E' : d_{E'}(0, S) < \frac{1}{n}\}$.
$\Longrightarrow$ Consideramos el subconjunto de E, a lo sumo numerable, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ y sea $x_0 \in A$.
Existe entonces $n \in \mathbb{N}^*$ tal que si $T \in E'$ verifica $|T(x)| < 1$ para todo $x \in A_n$ entonces $|T(x_0)| < 1$.
$\Longrightarrow$ Definimos las aplicaciones $e_x : T \longmapsto T(x)$, de donde se deduce que $\bigcap_{x\in A_n} Ker(e_x) \subset Ker(e_{x_0})$. $\Longrightarrow$ Vemos entonces que e_{x_0} es combinación lineal del conjunto $\{e_x : x \in A\}$.
$\Longrightarrow$ Utilizamos ahora el hecho que E' separa los puntos de E para obtener que x_0 es una combinación lineal de los elementos de A, de manera que A es un conjunto que genera E y esto muestra que E posee una base algébrica numerable.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, si E posee una base algébrica numerable $\mathcal{B}$, la topología débil-$*$ definida sobre E' es asociada a una familia, a lo sumo numerable, de semi-normas $\{T \in E' : p_x(T) = |T(x)|, \quad x \in \mathcal{B}\}$, de donde se tiene, por la proposición 1.3.5 del volumen 1, que E' es metrizable. ■

Corolario 3 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de Fréchet de dimensión infinita. Entonces su espacio dual E' dotado de la topología débil-$*$ no es metrizable.*

Demostración.
Supongamos que E' dotado de la topología débil-$*$ es metrizable; entonces, por el teorema 3 anterior, el espacio E debe poseer una base algébrica numerable.
$\Longrightarrow$ Sea pues $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base algébrica numerable de E, entonces cada subespacio vectorial de dimensión finita de E es un conjunto cerrado y por lo tanto el conjunto $E_n = \text{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ es de interior vacío.
$\Longrightarrow$ Como hemos supuesto que E es un espacio de Fréchet, en virtud del lema de Baire, se obtendría de la reunión de todos estos subconjuntos, es decir E, también sería de interior vacío, de donde se obtiene la contradicción buscada. $\blacksquare$

El teorema 3 junto con el corolario anterior muestran que tanto con la topología débil sobre E como la topología débil-$*$ sobre E' no son metrizables si el espacio E es de dimensión infinita. En particular, sobre la topología débil-$*$ de E' esto indica que no es posible conjugar directamente la noción de compacidad secuencial con los resultados de compacidad anteriormente obtenidos.

Sin embargo, cuando se trabaja sobre ciertos subconjuntos del espacio dual E' y, si se añade una hipótesis de separabilidad, se obtiene el siguiente resultado importante:

Teorema 4 (Metrizabilidad del conjunto polar en la topología débil-$*$) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separable y sea K el conjunto polar de E'. Entonces K es metrizable para la topología débil-$*$.*

Demostración.
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto numerable denso en E.
$\Longrightarrow$ Consideremos la aplicación $f_n(T) = T(x_n)$ para todo $T \in E'$.
Por definición de la topología débil-$*$ se tiene que cada aplicación f_n es débil-$*$ continua. Además, si $f_n(T) = f_n(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T(x_n) = S(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde se deduce que $T = S$ pues ambas formas lineales son continuas sobre E y coinciden sobre un subconjunto denso.
$\Longrightarrow$ De esta manera se obtiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de aplicaciones continuas que separan los puntos de E'. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|f_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$Construimos ahora una distancia sobre K de la siguiente manera

$$d(T, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-1}|f_n(T) - f_n(S)|.$$

Esta funcional es efectivamente una distancia pues las aplicaciones f_n separan los puntos. Notaremos $\mathcal{T}_d$ la topología definida sobre K por esta distancia.
$\Longrightarrow$ Notamos que cada aplicación f_n es débil-$*$ continua y que la serie anterior converge uniformemente sobre $K \times K$, se tiene pues que d es una función débil-$*$ continua sobre $K \times K$ y entonces las bolas $B(T, r) = \{S \in K : d(T, S) < r\}$ son conjuntos débilmente-$*$ abiertos, de manera que $\mathcal{T}_d \subset \sigma(E', E)$.
$\Longrightarrow$ Dado que esta topología $\mathcal{T}_d$ está generada por una distancia, se tiene que $\mathcal{T}_d$ es una topología separada.
$\Longrightarrow$ Finalmente aplicamos ahora una proposición de la lección anterior para obtener la identidad entre $\mathcal{T}_d$ y $\sigma(E', E)$ sobre el conjunto K. $\blacksquare$

Este resultado de metrizabilidad tiene como inmediata consecuencia práctica el corolario siguiente

Corolario 4 (Compacidad secuencial) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separable y sea E' su espacio dual. Si V es una vecindad del origen de E y si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas de E' tal que $|T_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in V$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una subsucesión $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una aplicación lineal continua $T \in E'$ tal que*

$$T(x) = \lim_{k\to+\infty} T_{n_k}(x) \qquad \textit{para todo } x \in E.$$

Dicho de otra manera, el conjunto polar de V es secuencialmente compacto en la topología débil-$*$.

Prueba. Basta conjugar el teorema de Banach-Aloaglu-Bourbaki 2 con el teorema 4 y aplicar el teorema 1.2.3 del volumen 1 para obtener que el conjunto polar de V es secuencialmente compacto; es decir que de toda sucesión se puede extraer una subsucesión convergente. ■

Observación 8 Nótese que la hipótesis de separabilidad es esencial para poder considerar una distancia compatible con la topología débil-$*$.

Este resultado es totalmente esencial en muchísimas aplicaciones y justifica por sí solo el uso de la topología débil-$*$.

Es importante, para finalizar, notar la gran diferencia existente entre la topología débil -que posee finalmente pocas propiedades- y la topología débil-$*$ que permite tener un número considerable de resultados interesantes. Es por esta razón que siempre se prefiere trabajar sobre una topología débil-$*$. ¿Debe descartarse por este motivo la topología débil? Evidentemente no, y vamos a ver que en ciertos casos particulares, que son en realidad los más utilizados, se tiene que estas dos topologías coinciden.