Lección n°6: Dualidad en espacios de Banach

EPN, verano 2012

A) Dualidad sobre los espacios de Banach

El siguiente resultado es un primer paso en la comprensión de las propiedades de los espacios duales en el marco de los espacios de Banach.

Teorema 1 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua entonces la cantidad*

$$\|T\|_{E\to F} = \inf\left\{C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E\right\}$$

es una norma sobre el espacio vectorial $\mathscr{L}(E,F)$. Si además F es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{L}(E,F)$ es un espacio de Banach.

Demostración.
$\Longrightarrow$ Nos concentramos únicamente en demostrar que el espacio $\mathscr{L}(E,F)$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{E\to F}$. Sea pues $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|_{E\to F})$. Como se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\|_{E\to F}\|x\|_E \tag{1}$$

y como $T_n - T_m$ tiende hacia 0 si $n, m \to +\infty$, se tiene que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F para todo $x \in E$, de donde se obtiene que el límite

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

existe. Se tiene sin problema que $T : E \to F$ es lineal. Si $\varepsilon > 0$ y si n, m son suficientemente grandes, se tiene la siguiente mayoración para (1): $\|T(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$ para todo m suficientemente grande.
$\Longrightarrow$ Por lo tanto $\|T(x)\|_F \leq (\|T_m\|_{E\to F} + \varepsilon)\|x\|_E$, de manera que $T \in \mathscr{L}(E,F)$ y se tiene $\|T_n - T_m\|_{E\to F} \leq \varepsilon$, de donde se deduce que $T_m \to T$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{E\to F}$. El espacio $\mathscr{L}(E,F)$ es entonces un espacio normado completo. ■

Cuando el espacio F es el cuerpo de los escalares, tenemos el corolario a continuación:

Corolario 1 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Entonces el espacio dual E' es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_{E'}$ definida por*

$$\|T\|_{E'} = \inf\left\{C > 0 : |T(x)| \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E\right\}.$$

Es interesante observar que en las hipótesis del teorema 1, el espacio inicial E no es necesariamente un espacio completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_E$, mientras que el espacio dual E' siempre lo es con respecto a la norma dual $\|\cdot\|_{E'}$ puesto que el espacio de llegada $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach.

Esto ilustra, una vez más, que las propiedades del rango de las aplicaciones lineales consideradas son de gran importancia. Pero sobre todo, este resultado nos dice que si partimos de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ su espacio dual E' también es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{E'}$ y esto nos proporciona una topología "natural" sobre E'.

Conviene por lo tanto estudiar con más detalle las relaciones de esta topología con las otras estructuras topológicas presentadas en las líneas anteriores y esto será tratado con mayor detalle en el párrafo siguiente.

Damos ahora un resultado que relaciona el corchete de cualidad canónico con las normas de los espacios puestos en dualidad.

Proposición 1 (Continuidad fuerte del corchete de dualidad canónico) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Entonces el corchete de dualidad canónico entre E y E' es una forma bilineal continua.*

Prueba.
Se tiene la siguiente estimación: $|T(x)| \leq \|T\|_{E'}\|x\|_E$. Dado que, por definición del corchete de dualidad canónico se tiene $\langle x, T\rangle_{E\times E'} = T(x)$ podemos escribir

$$|\langle x, T\rangle_{E\times E'}| \leq \|T\|_{E'}\|x\|_E, \tag{2}$$

lo que muestra la continuidad de esta aplicación bilineal. ■

El adjetivo *fuerte* está relacionado con el hecho que la constante que interviene en la estimación (2) es exactamente igual a 1. Esto será de gran utilidad en lo que sigue.

Para terminar este primer párrafo insistimos en la pérdida estructural que se realiza al considerar la topología débil.

Teorema 2 (Problemas de metrizabilidad de la topología débil) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado de dimensión infinita y sea E' su espacio dual. Entonces el espacio E, dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$ no es metrizable.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y supongamos que $(E, \sigma(E, E'))$ puede ser metrizado por medio de una distancia d_E.
Recordemos que en esta situación la familia de semi-normas que determinan la topología de espacio localmente convexo $\sigma(E, E')$ es numerable.
$\Longrightarrow$ Ahora, si esta distancia es compatible con la estructura topológica débil, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ es posible fijar un número finito de formas lineales continuas $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : |T_{i_j}(x)| < 1\} \subset \{x \in E : d_E(0, x) < \frac{1}{n}\}.$$

$\Longrightarrow$ Entonces, para toda forma lineal continua $T \in E'$ existe n tal que $d_E(0, x) < \frac{1}{n} \Longrightarrow |T(x)| < 1$; se deduce en particular que $T_{i_1}(x) = ... = T_{i_n}(x) = 0$ implica $|T(x)| < 1$.
Reemplazando x por λx y haciendo tender $\lambda \to +\infty$ se tiene que $T_{i_1}(x) = ... = T_{i_n}(x) = 0$ implica $T(x) = 0$ y se tiene que T es una combinación lineal de las formas lineales $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$.
$\Longrightarrow$ De esta manera el subespacio F_n engendrado por $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$ es de dimensión finita, es por lo tanto un conjunto cerrado y se tiene $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Aplicando el lema de Baire al espacio E', que por el corolario 1 es un espacio métrico completo se tiene que al menos uno de los conjuntos F_n posee un punto interior. Se deduce entonces que $F_n = E'$ y por lo tanto que $dim(E') < +\infty$.
$\Longrightarrow$ Obtenemos entonces que E es de dimensión finita, lo cual es una contradicción. ■

B) Los espacios bi-duales, pre-duales y topologías asociadas

Vimos en las líneas precedentes que, si se parte de un espacio de Banach E, su espacio dual E' también es un espacio de Banach. Es posible entonces tomar como punto de partida el espacio de Banach E' y estudiar lo que sucede si se considera el espacio dual de E'. Las propiedades del *espacio dual del espacio dual* son muy útiles y, para facilitar su comprensión, es necesario fijar un poco de terminología.

Definición 1 (Espacio bidual) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. El conjunto de todas las formas lineales continuas definidas sobre el espacio dual E' es el espacio* bidual *de E y será notado E''. Los elementos x'' de E'' son entonces las aplicaciones lineales $x'' : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ que son continuas en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{E'}$.*

Definición 2 (Espacio predual) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Llamaremos* espacio predual *de E a todo espacio de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ tal que $B' = E$.*

Ilustramos esta situación de esta manera:

$$E \overset{dual}{\longrightarrow} E' \overset{dual}{\longrightarrow} E''$$

Aquí, E'' es el espacio bidual de E y se tiene que E es el espacio predual de E' mientras que E' es el espacio predual de E''.

Observación 1 Evidentemente esta terminología de espacio predual y de espacio bidual se generaliza a los espacios localmente convexos.

El corolario 1 nos da una primera información sobre las propiedades del espacio bidual. En efecto, dado que E es un espacio de Banach, E' también lo es; reaplicando este resultado se obtiene que el espacio bidual E'' es un espacio de Banach. Más precisamente se tiene el resultado a continuación

Proposición 2 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, entonces su espacio bidual E'' es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{E''}$ determinada por*

$$\|x''\|_{E''} = \sup_{\|T\|_{E'} \leq 1} \{|\langle T, x''\rangle_{E' \times E''}|\}$$

La verificación sigue exactamente las mismas líneas que las del teorema 1.

Evidentemente, si nos limitamos a estudiar el espacio bidual E'' simplemente como el dual de E' se obtienen básicamente las mismas propiedades de la sección anterior; de manera que es más interesante investigar las propiedades de E' y de E'' en función del espacio inicial E: en efecto, cuando el espacio bidual E'' entra en acción, se obtienen una serie de topologías distintas tal como lo indica el gráfico a continuación.

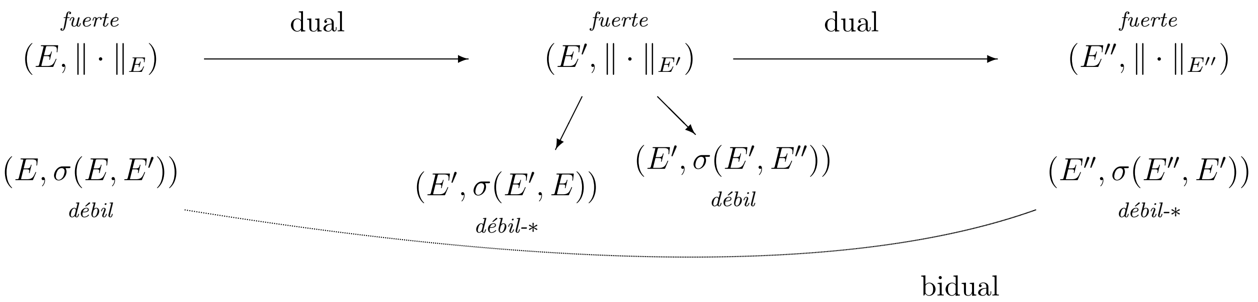

Figura 1: Topologías iniciales, débiles, débiles estrella, espacios duales y espacios biduales.

Aclaremos un poco la situación.

(i) Sobre el espacio de Banach inicial E se dispone de *dos* topologías: la topología *fuerte* (o *inicial*) dada por la norma $\|\cdot\|_E$ y la topología *débil* $\sigma(E, E')$.

(ii) Sobre el espacio de Banach dual E' se dispone de *tres* topologías: la topología *fuerte* $\|\cdot\|_{E'}$ que le proporciona su estructura de espacio de Banach, la topología *débil-$*$* $\sigma(E', E)$ que proviene de la dualidad con E y la topología *débil* $\sigma(E', E'')$ proveniente de la dualidad[1] con E''.

(iii) Sobre el espacio de Banach bidual E'' se dispone de *dos* topologías: la topología *fuerte* $\|\cdot\|_{E''}$ y la topología *débil-$*$* $\sigma(E'', E')$.

Los puntos (i) y (iii) no se prestan a ningún tipo de confusión pues han sido estudiados por separado en las páginas anteriores, pero es necesario ser más precisos en el caso (ii) con la proposición a continuación.

Proposición 3 *Sea E un espacio de Banach, E' su espacio dual y E'' su espacio bidual. En la situación del gráfico 1 anterior, se tiene la siguiente relación entre las tres topologías definidas sobre el espacio dual E' de un espacio de Banach E:*

$$\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}} \tag{3}$$

en donde hemos notado $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$ la topología definida sobre E' por la norma $\|\cdot\|_{E'}$.

Prueba.
$\Longrightarrow$ Sabemos que la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$ es más fuerte que la topología debilitada $\sigma(E', E'')$, de manera que se tiene la inclusión $\sigma(E', E'') \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$.
$\Longrightarrow$ Mostremos ahora que la topología $\sigma(E', E)$ es más débil que la topología $\sigma(E', E'')$. Recordemos que se tiene que la topología $\sigma(E', E)$ puede ser caracterizada por las semi-normas

$$p_x(T) = |\langle x, T\rangle_{E\times E'}| = |T(x)|$$

en donde $x \in E$ y donde el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times E'}$ entre E y E' es el corchete de dualidad canónico.
De la misma manera, la topología $\sigma(E', E'')$ puede ser caracterizada por las semi-normas

$$p_{x''}(T) = |\langle T, x''\rangle_{E'\times E''}| = |x''(T)|$$

con $x'' \in E''$ y el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E'\times E''}$ entre E' y E'' es el corchete de dualidad canónico.
$\Longrightarrow$ Dado que existe una forma lineal $x'' \in E''$ tal que $x''(T) = T(x)$ para todo $T \in E'$, se tiene que las semi-normas $p_x(T)$ son semi-normas para la topología $\sigma(E', E'')$; de manera que se obtiene la inclusión $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'')$.
$\blacksquare$

Observación 2 Notemos que en el caso de la dimensión finita, todas estas tres topologías definidas sobre E' son equivalentes.

Notación:

- Escribiremos B, B' y B'' para designar las bolas abiertas de los espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ y $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ respectivamente.
- Como acabamos de ver, cuando un espacio de Banach E' posee un espacio predual (lo cual no siempre es el caso como lo veremos un poco más adelante) se tienen al menos tres estructuras topológicas. Distinguiremos las vecindades de estas estructuras notando V_f para la topología de espacio normado $(E', \|\cdot\|_{E'})$, V_d para la topología débil y V_{d^*} para la topología débil-$*$.

Una vez que estas notaciones han sido fijadas, vamos a concentrarnos al estudio de la parte central de la figura 1. En efecto, ya que se dispone de tres estructuras diferentes, es tiempo de sacar provecho de esta situación explicando las propiedades que se obtienen en este caso.

[1] Esta topología puede verse como la topología *debilitada* de la topología fuerte $\|\cdot\|_{E'}$.

Teorema 3 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Entonces la bola unidad cerrada $\overline{B'} = \{T \in E' : \|T\|_{E'} \leq 1\}$ es débilmente-$*$ compacta.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Este resultado fundamental es una consecuencia directa del teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki.
En efecto, sabemos que el conjunto $\{T \in E' : |T(x)| \leq 1 : \text{con } \|x\|_E \leq 1\}$ es compacto para la topología débil-$*$. Tenemos que este conjunto se escribe

$$\{T \in E' : \sup_{\|x\|_E \leq 1} |T(x)| \leq 1\} = \{T \in E' : \|T\|_{E'} \leq 1\} = \overline{B'},$$

de donde se obtiene que la bola unidad fuerte $\overline{B'}$ es compacta para la topología débil-$*$. ■

Este resultado de compacidad muestra todo el interés de trabajar sobre topologías débiles:
$\Longrightarrow$ en efecto si el espacio considerado E' es de dimensión infinita, la bola unidad cerrada $\overline{B'}$ de la topología fuerte *nunca es compacta.*
$\Longrightarrow$ Nótese además que a la luz de los resultados anteriores, la bola $\overline{B'}$ *tampoco es necesariamente compacta para la topología débil*, de manera que para obtener esta importante propiedad de compacidad es necesario debilitar aún más las estructuras topológicas considerando la topología débil-$*$.

Vamos ahora a estudiar las relaciones existentes entre conjuntos acotados y la propiedad de compacidad. Por homotecia de la bola unidad cerrada, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2 *Sea E un espacio de normado y sea E' su espacio dual. Entonces todo conjunto fuertemente acotado en el espacio $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es débilmente-$*$ relativamente compacto.*

Prueba.
En efecto, si $A \subset E'$ es un conjunto fuertemente acotado, existe $\tau > 0$ tal que $\overline{A} \subset \tau\overline{B'}$ de donde se deduce por el teorema 3 anterior que A es débilmente-$*$ relativamente compacto. ■

Este resultado nos proporciona una caracterización de los conjuntos acotados con la proposición a continuación.

Proposición 4 (Caracterización de los conjuntos acotados) *Sean E un espacio de Banach, E' su espacio dual y sea A una parte de E'. Se tienen las equivalencias siguientes:*

1) A es débilmente-$*$ acotado,

2) A es fuertemente acotado,

3) A es débilmente-$*$ relativamente compacto.

Prueba.
La implicación 1) $\Longrightarrow$ 2) es una consecuencia del principio de acotación uniforme.
En efecto, el hecho que el subconjunto $A \subset E'$ sea débilmente-$*$ acotado, significa que $\sup\limits_{T \in A} |T(x)| < +\infty$ para todo $x \in E$. Aplicando este teorema se tiene que $\sup\limits_{T \in A} \|T\|_{E'} < +\infty$, es decir que A es fuertemente acotado.
Para obtener la implicación recíproca 2) $\Longrightarrow$ 1), basta ver que si A es fuertemente acotado en $(E', \|\cdot\|_{E'})$ al existir más semi-normas continuas sobre $(E', \sigma(E', E))$ se tiene que A es débilmente-$*$ acotado. La implicación 2) $\Longrightarrow$ 3) se tiene directamente por el corolario anterior. Finalmente 3) $\Longrightarrow$ 1) se deduce del hecho que todo conjunto compacto es un conjunto acotado. ■

Observación 3 Cabe mencionar aquí que, cuando se trabaja sobre un espacio E' que es el espacio dual de un espacio de Banach E, entonces las nociones de acotación fuerte y débil-$*$ coinciden. Además por la proposición 3, se tiene gracias a la proposición anterior que las nociones de acotación coinciden en las tres topologías definidas sobre E': no es por lo tanto necesario precisar en qué sentido estos conjuntos son acotados. Esto muestra la utilidad de trabajar con este tipo de conjuntos.

Para finalizar, damos una caracterización de la convergencia débil-$*$ en el marco de los espacios de Banach:

Proposición 5 *Sea E un espacio de Banach y E' su espacio dual. Una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$ converge débilmente-$*$ si y solo si, para todo $x \in E$ la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite. La sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces acotada y si notamos T su límite se tiene*

$$\|T\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{E'}.$$

Además, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ que converge hacia un límite $x \in E$, la sucesión $(T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $T(x)$.

Prueba.

$\Longrightarrow$ Si la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite para todo $x \in E$, el principio de acotación uniforme nos dice que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente-$*$ hacia un elemento $T \in E'$.

$\Longrightarrow$ Notamos ahora que $|T_n(x)| \leq \|T_n\|_{E'}\|x\|_E$ para todo $x \in E$, de donde se obtiene que

$$|T(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{E'}\|x\|_E.$$

$\Longrightarrow$ Dado que la sucesión $(\|T_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, esto muestra, por el principio de acotación uniforme que T es una aplicación continua que verifica

$$\|T\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{E'}.$$

■

Con este resultado terminamos nuestra exposición sobre las diferentes propiedades que se obtienen al estudiar las propiedades que aparecen en un espacio de Banach E' en función de su espacio dual E'' y de su espacio predual E, tal como lo muestra la figura 1. Nótese en particular que en dimensión infinita, la única estructura que tiene propiedades interesantes al nivel de la compacidad es la topología débil-$*$.