Lección n°7: Reflexibilidad

EPN, verano 2012

Reflexividad: consecuencias y propiedades

Del estudio anteriormente realizado, podría pensarse que la única topología sobre la cual es deseable trabajar es la topología débil-$*$.
$\Longrightarrow$ Sin embargo, y este es el punto realmente importante, cuando un espacio de Banach es *reflexivo* se tiene que la topología débil-$*$ coincide con la topología débil.
$\Longrightarrow$ Gracias a una aplicación muy especial mostraremos que existe una inyección de un espacio de Banach E en su espacio bidual E''.

Las repercusiones de esta inyección al nivel de las estructuras topológicas son muy interesantes y, adelantándonos un poco, permiten justificar plenamente el uso de la topología débil.

Necesitamos, para empezar, describir una aplicación "natural" entre un espacio de Banach E y su espacio bidual E'' que estará a la base de muchos resultados.

Definición 1 (Aplicación canónica entre un espacio de Banach y su espacio bidual) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual y $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio bidual. Construimos una aplicación, llamada la* aplicación canónica *entre E y E'', por medio de la expresión*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{J} : E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & \mathscr{J}(x) \end{array}$$

en donde $\mathscr{J}$ asocia a todo elemento $x \in E$ una forma lineal continua definida sobre E' y determinada por la fórmula $\mathscr{J}(x)(T) = T(x)$.

Hay que asegurarse que esta aplicación que acabamos de presentar está bien definida.
$\Longrightarrow$ Para ello hay que verificar que, para todo x la aplicación $\mathscr{J}(x)$ pertenece efectivamente a E'', es decir que es una forma lineal continua definida sobre E'.
$\Longrightarrow$ Vemos pues, por la fórmula $\mathscr{J}(x)(T) = T(x)$, que la aplicación $\mathscr{J}(x)$ es lineal dado que $\mathscr{J}(x)(T+S) = (T+S)(x) = T(x) + S(x) = \mathscr{J}(x)(T) + \mathscr{J}(x)(S)$ en donde $T, S \in E'$.
$\Longrightarrow$ Debemos ahora comprobar que la forma lineal $\mathscr{J}(x)$ es continua: basta verificar para todo $T \in E'$ la estimación $|\mathcal{J}(x)(T)| \leq C\|T\|_{E'}$. Pero esto es inmediato por las definiciones de $\mathcal{J}(x)(T)$ y de la norma $\|\cdot\|_{E'}$ pues esta desigualdad se reescribe como $|T(x)| \leq C \sup\limits_{\|y\|_E = 1} |T(y)|$.

Esto muestra que se tiene siempre la inclusión $\mathscr{J}(E) \subset E''$, pero es posible decir un poco más al respecto de esta aplicación canónica, en particular se tiene la propiedad siguiente.

Proposición 1 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual, $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio bidual y la $\mathscr{J}$ aplicación canónica entre E y E''. Entonces $\mathscr{J}$ es una isometría lineal de E en un subconjunto de E''.*

Prueba. Basta verificar que $\mathscr{J}$ es una isometría pues sabemos por las lineas anteriores que $\mathscr{J}$ es una aplicación lineal y que $\mathscr{J}(E) \subset E''$. Dado que se tiene que

$$\|\mathscr{J}(x)\|_{E''} = \sup_{T \in E', \|T\|_{E'} \leq 1} |T(x)| = \|x\|_E,$$

se deduce sin problema que $\mathscr{J}$ es una isometría. ■

Observación 1 Esta isometría se puede escribir con la ayuda de los corchetes de dualidad canónicos de esta manera:

$$\langle T, \mathscr{J}(x)\rangle_{E'\times E''} = \langle x, T\rangle_{E\times E'}$$

Si estudiamos lo que sucede al nivel de las topologías débiles, tenemos el resultado a continuación.

Proposición 2 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. La aplicación canónica $\mathscr{J}$ es un isomorphismo de $(E, \sigma(E, E'))$ sobre el conjunto $\mathscr{J}(E) \subset E''$ dotado de la topología $\sigma(E'', E')$.*

Prueba. La topología $\sigma(E, E')$ está definida por medio de las semi-normas $p_T : x \longmapsto |T(x)|$ mientras que la topología $\sigma(E'', E')$ está dada por las semi-normas $q_T : x'' \longmapsto |x''(T)|$. A partir de esto observamos que se tiene $p_T = q_T \circ \mathscr{J}$, lo que muestra que la biyección lineal $\mathscr{J} : E \longrightarrow \mathscr{J}(E)$ es un isomorfismo para estas dos topologías. ■

Sabemos por las líneas precedentes que $\mathscr{J}(E)$ es un subconjunto de E'', pero no sabemos qué tan grande o pequeño es el conjunto $\mathscr{J}(E)$ con respecto a E''. El siguiente teorema nos da una primera respuesta al nivel de las bolas unidades.

Teorema 1 (Goldstine) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio dual y sean $\overline{B}$ y $\overline{B''}$ la bolas unidad cerradas de E y E'' respectivamente. Entonces $\mathscr{J}(\overline{B})$ es un subconjunto denso en $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$.*

Nótese que la noción de *tamaño* está dada por la propiedad de densidad del conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ en el conjunto $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$.

Demostración.
$\Longrightarrow$ Dado que $\mathscr{J}$ es una isometría de E en E'' se tiene que $\mathscr{J}(\overline{B})$ está contenido en $\overline{B''}$.
$\Longrightarrow$ Supongamos ahora que existe un punto $x''_0 \in \overline{B''}$ que no pertenece a la adherencia de $\mathscr{J}(\overline{B})$ para la topología $\sigma(E'', E')$.
$\Longrightarrow$ Como el conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ es convexo y equilibrado, entonces su adherencia también lo es.
En efecto, como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es convexo, si consideramos la aplicación $f_t : E \times E \longrightarrow E$ tal que $f_t(x, y) = tx + (1 - t)y$, se tiene que $f_t(\mathscr{J}(\overline{B}) \times \mathscr{J}(\overline{B})) \subset \mathscr{J}(\overline{B})$ para todo $0 \leq t \leq 1$.
La continuidad de f_t implica entonces que $f_t\left(\overline{\mathscr{J}(\overline{B})} \times \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}\right) \subset \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ lo que muestra que $\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ es convexo.
$\Longrightarrow$ Sea ahora la aplicación continua $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$, como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es equilibrado entonces $h_\lambda(\mathscr{J}(\overline{B})) \subset \mathscr{J}(\overline{B})$ para todo $|\lambda| \leq 1$.
$\Longrightarrow$ Como esta aplicación es continua se tiene entonces que $h_\lambda(\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}) \subset \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ si $|\lambda| \leq 1$.
$\Longrightarrow$ Tenemos pues que el conjunto $\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ es un convexo cerrado.
Podemos entonces utilizar el teorema de separación de convexos y la linealidad de las aplicaciones en juego, para obtener una forma lineal $T \in E'$ tal que $|x''(T)| \leq 1$ para todo $x'' \in \mathscr{J}(\overline{B})$ y tal que $x''_0(T) > 1$.
$\Longrightarrow$ De esto se deduce que $|T(x)| \leq 1$ para todo $x \in \overline{B}$ lo que significa que $\|T\|_{E'} \leq 1$ y por lo tanto que $|x''_0(T)| \leq 1$ lo que contradice la desigualdad $x''_0(T) > 1$. ■

Utilizando las traslaciones y homotecias se tiene el corolario siguiente:

Corolario 1 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, entonces $\mathscr{J}(E)$ es un subconjunto denso en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$.*

Hemos visto que se tiene siempre la inclusión $\mathscr{J}(E) \subset E''$ y con el resultado anterior vemos que es posible ser un poco más precisos cuando se trata de las bolas unidades. Sin embargo, la aplicación $\mathscr{J}$ no es necesariamente sobreyectiva, es decir que no hay ningún motivo para tener en toda generalidad la igualdad de conjuntos $\mathscr{J}(E) = E''$ y esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 2 (Espacio Normado Reflexivo) *Un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es* reflexivo *si la isometría canónica $\mathscr{J}$ de E en E'' es sobreyectiva. Es decir si $\mathscr{J}(E) = E''$.*

Nótese que en la práctica, para determinar si un espacio de Banach es reflexivo, es suficiente verificar que $\mathscr{J}(\overline{B}) = \overline{B''}$. Veremos posteriormente otro tipo de caracterizaciones.

Observación 2 El hecho de usar la isometría canónica $\mathscr{J}$ es esencial en esta definición. En efecto, existen espacios de Banach que no son reflexivos en el sentido de la definición anterior, pero para los cuales es posible construir una isometría sobreyectiva entre ellos y sus espacios biduales.

Tendremos la oportunidad de mostrar varios ejemplos de espacios de Banach que verifican esta propiedad. Sin embargo, antes de entrar en estos detalles, y de ver cómo caracterizar esta noción, consideramos importante anunciar directamente el principal interés de trabajar con este tipo de espacios:

Teorema 2 (Identificación de topología débil y débil-$*$) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo y sea E' su espacio dual. Entonces, sobre E' la topologías $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$ coincinden y la injección canónica $\mathscr{J}$ es un isomorfismo de E en E'' para las topologías $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$.*

Demostración. Si E es reflexivo, entonces la aplicación $\mathscr{J}$ de E en E'' es sobreyectiva. Basta entonces identificar estas dos estructuras topológicas. ■

Esta identificación de las topologías débiles y débiles-$*$ tiene muchas consecuencias:

$$\begin{tikzcd}
\text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \\
\overset{\textit{fuerte}}{(E, \|\cdot\|_E)} \arrow[r, "\text{dual}"] & \overset{\textit{fuerte}}{(E', \|\cdot\|_{E'})} \arrow[r, "\text{dual}"] & \overset{\textit{fuerte}}{(E, \|\cdot\|_E)} \\
\underset{\textit{débil}}{(E, \sigma(E, E'))} \arrow[rr, bend right, dash, "\text{bidual}"'] & \underset{\textit{débil}}{(E', \sigma(E', E))} & \underset{\textit{débil}}{(E, \sigma(E, E'))}
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Topologías iniciales y débiles en un espacio reflexivo

Cuando un espacio normado es reflexivo, al disponer de la equivalencia entre topologías débiles y débiles-$*$, se obtiene una serie de resultados interesantes. La primera proposición que damos proporciona una caracterización de los conjuntos relativamente compactos y los conjuntos acotados.

Proposición 3 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo. Un subconjunto A de E es débilmente relativamente compacto si y solo si A es un subconjunto acotado.*

Prueba. El punto de partida está dado por la identificación entre las topologías débiles y débiles-$*$ dada en el teorema 2. En efecto, sabemos que sobre un espacio de Banach no hace falta precisar en qué sentido los conjuntos son acotados. Esto implica que si un conjunto es débilmente relativamente compacto se tiene que este conjunto es débilmente acotado y es entonces fuertemente acotado. ■

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria y suficiente para obtener la reflexividad de un espacio de Banach.

Teorema 3 (Kakutani) *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ es reflexivo si y solo si su bola unidad cerrada $\overline{B}$ es débilmente compacta.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Empecemos suponiendo que E es reflexivo, se tiene entonces por definición que $\mathscr{J}(\overline{B}) = \overline{B''}$ y se tiene además que la bola $\overline{B''}$ es compacta para la topología $\sigma(E'', E')$.
Puesto que esta estructura coincide con la topología débil $\sigma(E, E')$ se tiene que $\overline{B''}$ es débilmente compacta, de donde se deduce que $\overline{B}$ es débilmente compacta.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente, si la bola $\overline{B}$ es débilmente compacta, entonces $\mathscr{J}(\overline{B})$ es compacta para la topología $\sigma(E'', E')$ por la proposición 2 y es en particular un conjunto cerrado de E''.
$\Longrightarrow$ Como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es denso en $\overline{B''}$ por el teorema de Goldstine 1, se obtiene que $\overline{B''} = \mathscr{J}(\overline{B})$. De esta manera, aplicando el corolario 1 se obtiene que $E'' = \mathscr{J}(E)$ y se deduce que E es un espacio reflexivo. ■

Observación 3 Hay que tener un poco de cuidado con el enunciado de este resultado que nos dice lo siguiente: sea E un espacio normado, si E es reflexivo, entonces la bola unidad $\overline{B}$ es compacta para la topología $\sigma(E, E')$. La confusión puede aparecer cuando se considera un espacio dual E' cuya bola unidad $\overline{B'}$ *siempre* es compacta para la topología $\sigma(E', E)$: en este último caso el concepto de reflexibilidad no interviene y el lector debe tener cuidado pues la situación no es la misma.

Continuamos con nuestra presentación de las propiedades de los espacios de Banach reflexivos.

Lema 1 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo. Entonces todo subespacio cerrado F de E es reflexivo.*

Prueba.
$\Longrightarrow$ Por el teorema de prolongación de Hahn-Banach, toda forma lineal continua definida sobre F es la restricción a F de una forma lineal continua sobre E.
$\Longrightarrow$ De este hecho se tiene entonces que la topología $\sigma(E, E')$ induce sobre F la topología $\sigma(F, F')$.
$\Longrightarrow$ Por el teorema 3 se tiene que la bola unidad $\overline{B}$ de E es débilmente compacta, entonces como F es débilmente cerrado se tiene que $\overline{B} \cap F$ (es decir la bola unidad cerrada de F) es un conjunto compacto para la topología $\sigma(E, E')$ y por lo tanto es compacto para la topología inducida $\sigma(F, F')$. Aplicando una vez más el teorema 3 se tiene que F es reflexivo. ■

Proposición 4 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ es reflexivo si y solo si su espacio dual $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es reflexivo.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que E es reflexivo y sea Z un elemento del bidual de E', es decir Z es una forma lineal continua sobre el espacio de Banach E''. Se tiene entonces que $T = Z \circ \mathscr{J}$ es una forma lineal continua sobre E y que para todo $x'' \in E''$ se tiene

$$Z(x'') = (Z \circ \mathscr{J} \circ \mathscr{J}^{-1})(x'') = (Z \circ \mathscr{J})(\mathscr{J}^{-1}(x'')) = (Z \circ \mathscr{J})(x) = T(x)$$

y esto muestra que E' es reflexivo.
$\Longrightarrow$ Recíprocamente si E' es reflexivo, entonces por las líneas precedentes se tiene que E'' es reflexivo y entonces E es isométrico a un subespacio cerrado de E'', de manera que E es reflexivo por el lema 1. ■

Finalmente, uno de los resultados más utilizados en la práctica es el siguiente:

Teorema 4 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo cuyo espacio dual $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es separable. Entonces toda sucesión acotada de E contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Como el espacio E es reflexivo, se tiene por el teorema 2 que la topología débil coincide con la topología débil-$*$.
$\Longrightarrow$ Como además las nociones de conjuntos acotados coinciden para todas las topologías fuertes y débiles definidas sobre E, junto con las propiedades anteriores y la separabilidad del espacio dual, se obtiene el resultado deseado. ■

Como acabamos de ver, cuando un espacio de Banach es reflexivo, se dispone de una cierta cantidad de propiedades que son de gran utilidad, principalmente porque se conjugan las propiedades de la topología débil-$*$ con las propiedades de la topología débil, lo cual representa una economía considerable.

Vemos además que con el teorema 3 de Kakutani y con la proposición 4 tenemos dos maneras distintas de verificar si un espacio de Banach es reflexivo. Sin embargo, estos dos resultados no siempre son muy fáciles de aplicar en la práctica y es por esto que vamos a presentar ahora un concepto que permite verificar de forma relativamente rápida y sencilla cuando un espacio de Banach tiene la propiedad de reflexividad. En particular vamos ver cómo un resultado de naturaleza métrica puede influir, de forma sorprendente, en un resultado de naturaleza topológica. Para ello necesitaremos la definición siguiente

Definición 3 (Espacio uniformemente convexo) *Un espacio vectorial normado* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es* uniformemente convexo *si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left[\forall x, y \in E \ : \ \|x\|_E \leq 1, \|y\|_E \leq 1, \|x-y\|_E > \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_E < 1 - \delta \right]$$

$\Longrightarrow$ Esta definición significa que las bolas correspondientes a las normas deben ser relativamente *redondas*.

El principal interés de trabajar con espacios uniformemente convexos es que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5 (Milman-Pettis) *Si* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach uniformement convexo entonces* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Vamos a proceder por el absurdo suponiendo que E es un espacio uniformemente convexo pero que no es reflexivo, es decir que podemos suponer que existe un elemento x'' de la bola unidad cerrada $\overline{B''}$ tal que $\|x''\|_{E''} = 1$ y tal que la distancia de x'' a $\mathscr{J}(\overline{B})$ sea igual a $2\varepsilon > 0$.
$\Longrightarrow$ Dado que por el teorema 1 de Goldstine se tiene que el conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ es denso en $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$, se tiene que para toda vecindad W_{d^*} de x'' existe un $x \in \overline{B}$ tal que $\mathscr{J}(x) \in W_{d^*}$.
$\Longrightarrow$ Dicho de otra manera, para toda vecindad débil W_{d^*} de x'' se tiene que x'' pertenece a la cerradura débil-$*$ del conjunto $W_{d^*} \cap \mathscr{J}(\overline{B})$.
$\Longrightarrow$ Ahora, para este $\varepsilon > 0$ fijado, le corresponde un $\delta > 0$ en la definición de convexidad uniforme. Podemos entonces considerar una forma lineal $T \in E'$ tal que $\|T\|_{E'} = 1$ con $|x''(T) - 1| < \delta$ y podemos definir el conjunto $W = \{y'' \in E'' : |y''(T) - 1| < \delta\}$.
$\Longrightarrow$ De esta manera, si consideramos $y'', z'' \in W \cap \mathscr{J}(\overline{B})$, se tiene que si $|y''(T) + z''(T)| > 2 - 2\delta$ entonces $\|y'' + z''\|_{E''} > 2 - 2\delta$, pero por la isometría de la aplicación $\mathscr{J}$ y por la definición de convexidad uniforme se obtiene entonces que $\|y'' - z''\|_{E''} < \varepsilon$.
$\Longrightarrow$ Si fijamos z'' se tiene entonces que $W \cap \mathscr{J}(\overline{B}) \subset z'' + \varepsilon\overline{B''}$.
Dado que el conjunto $z'' + \varepsilon\overline{B''}$ es débilmente-$*$ cerrado, se obtiene que si x'' pertenece a la cerradura débil-$*$ de $W \cap \mathscr{J}(\overline{B})$ entonces $x'' \in z'' + \varepsilon\overline{B''}$, lo que contradice el hecho que el punto x'' se encuentra a una distancia mayor de 2ε de $\mathscr{J}(\overline{B})$. $\blacksquare$

Observación 4 Este teorema da una condición necesaria para obtener la reflexividad, pero no es una condición suficiente: existen espacios de Banach reflexivos para los cuales no existe ninguna norma equivalente uniformemente convexa. Sin embargo este es un criterio bastante cómodo que será muy utilizado en la práctica.

Con este resultado terminamos nuestra exposición sobre los espacios de Banach reflexivos. Insistimos sobre la gran utilidad de estos espacios que permiten obtener en una sola estructura todas las propiedades de las topologías débiles y débiles-$*$.