Análisis Funcional

Asociación Amarun

Versión 0.0.0.1

Diego Chamorro

22 de noviembre de 2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción al análisis funcional

El principal objetivo de este capítulo es presentar algunos de los resultados más importantes del análisis funcional, en un marco relativamente general, y hacerlo de tal manera que sea posible aplicar estos conceptos y teoremas de forma directa e inmediata al estudio de los espacios de Lebesgue y de Lorentz: de esta forma podremos completar la descripción topológica de los espacios de Lebesgue iniciada en el Volumen 1 y atacar con toda comodidad el estudio de los espacios de Lorentz en el Capítulo **??**.

El análisis funcional es una rama muy extensa de las matemáticas que tiene muchas aplicaciones importantísimas, por ejemplo en el área de las ecuaciones en derivadas parciales, la fuerza de los resultados del análisis funcional permite la resolución de una gran cantidad de problemas (existencia, unicidad, regularidad de las soluciones, entre otros). Como este capítulo no es más que una introducción, ha sido necesario escoger los temas más relevantes para cumplir con este objetivo. Sin embargo, trataremos, siempre y cuando nos sea posible, de no limitarnos a una presentación orientada únicamente a estos dos espacios funcionales ni de enmarcarnos en la estructura de espacios de Banach; esperamos entonces que el grado de generalidad adoptado sea lo suficientemente amplio como para estudiar, o al menos iniciar el estudio, de otras partes, ligeramente más avanzadas, del análisis matemático y, evidentemente, permita al lector motivado de ir mucho más allá de esta corta introducción.

Recordemos que el primer volumen tiene como punto culminante -después de la construcción de medidas y de la integral de Lebesgue- el estudio de la normabilidad de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ y la presentación de dos propiedades topológicas: la completitud (si $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ son espacios de Banach) y la separabilidad (si $1 \leq p < +\infty$, los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ contienen subespacios densos que son de cardinal numerable, mientras que el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$ no es separable). El lector observará muy justamente que, para una correcta presentación de estos espacios, es imprescindible describir *muchas otras* propiedades topológicas.

Sin embargo, para poder exponer correctamente estas propiedades estructurales, es necesario introducir algunos objetos y resultados de orden general y las líneas que siguen estarán dedicadas a la presentación de estas herramientas. Hemos para ello dividido este capítulo en cinco secciones. La primera presenta las principales propiedades de las aplicaciones lineales y estudia las diversas caracterizaciones posibles de la continuidad de este tipo de aplicaciones en función del marco de trabajo; que, por simplicidad, estará reducido a los espacios localmente convexos y a los espacios normados. La segunda sección expone las versiones analíticas y geométricas del teorema de Hahn-Banach con algunas aplicaciones que serán de gran utilidad en las secciones y capítulos siguientes. La tercera sección presenta en cambio los resultados más clásicos del análisis funcional como son los teoremas de la *aplicación abierta*, del *grafo cerrado* y el *principio de acotación uniforme*. En la cuarta sección estudiaremos las diversas topologías que existen sobre los espacios de aplicaciones lineales continuas y haremos un énfasis especial en las conecciones existentes entre ciertos espacios vectoriales topológicos y sus espacios duales. Finalmente, en la última sección daremos ejemplos concretos de espacios duales y de las diferentes propiedades de las topologías estudiadas en la penúltima sección.

1.1. Aplicaciones lineales continuas

El objetivo de esta primera sección es el de presentar las definiciones y resultados más importantes que giran en torno a las aplicaciones lineales continuas pues estos objetos constituyen la herramienta de base de todo este capítulo.

En la primera subsección detallamos las propiedades más elementales de las aplicaciones lineales continuas. En la segunda subsección haremos un recuento de las diversas caracterizaciones posibles de la continuidad de estas aplicaciones en función de la estructura topológica sobre la cual se trabaja: empezaremos con espacios localmente convexos y luego pasaremos a los espacios normados. Veremos en particular que es mucho más cómodo enunciar los resultados y trabajar con ellos cuando se dispone de una estructura de espacio de Banach. Terminaremos con unos resultados relativos a las aplicaciones multilineales que serán de utilidad cuando se estudie la dualidad entre espacios vectoriales topológicos.

1.1.1. Definiciones y primeras propiedades

Las nociones matemáticas que presentamos en esta sección son seguramente familiares para el lector puesto que muchas de ellas provienen del álgebra lineal.

Definición 1.1.1 (Aplicación lineal) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Diremos que una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} T : D \subset E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

definida sobre un subespacio vectorial D de E a valores en F es una aplicación lineal *si se tiene la identidad*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in D \subset E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Fijamos un poco de terminología con las dos definiciones que siguen.

Definición 1.1.2 (Dominio, rango y núcleo) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal.*

1) El dominio de definición *de T será notado $D(T)$.*

2) Definimos el rango *de T como el conjunto $R(T) = \{y \in F : y = T(x),\, x \in D(T)\}$.*

3) El núcleo *de T está determinado por el conjunto $Ker(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$.*

Definición 1.1.3 (Forma lineal real o compleja) *Sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Si el rango $R(T)$ está contenido en el cuerpo escalar $\mathbb{R}$, diremos que T es una* forma lineal real *sobre $D(T)$. Si, en cambio, el rango $R(T)$ está contenido en el cuerpo escalar $\mathbb{C}$, diremos que T es una* forma lineal compleja *sobre $D(T)$. Si esta distinción no es indispensable, hablaremos simplemente de* formas lineales.

En todo este capítulo vamos a concentrarnos principalmente en las propiedades de las aplicaciones lineales y en el desarrollo de la teoría asociada. Sin embargo, para tratar correctamente algunos temas nos será necesario relajar la Definición 1.1.1. En efecto, la identidad dada en la fórmula (1.1) puede parecer demasiado exigente en el sentido que algunas de las aplicaciones más importantes y usuales no son necesariamente lineales.

Nótese que si deseamos relajar esta identidad, y remplazarla por una desigualdad, será necesario exigir más propiedades en el rango de la aplicación. Tenemos pues las definiciones siguientes:

Definición 1.1.4 (Aplicación sublineal, cuasi-lineal) *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ y sea F un cuerpo totalmente ordenado.*

1) Diremos que una aplicación

$$\begin{array}{rcl} T : D \subset E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

es una aplicación sublineal *si*

(a) se tiene la identidad $T(\alpha x) = |\alpha| T(x)$ para todo $x \in D \subset E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$,

(b) se tiene la desigualdad

$$T(x + y) \leq T(x) + T(y). \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in D \subset E$.

2) Si existe una constante $K > 1$ tal que se tenga

$$T(x + y) \leq K\big(T(x) + T(y)\big) \tag{1.3}$$

diremos entonces que la aplicación T es cuasi-lineal.

Observación 1.1 Para poder comparar las cantidades expuestas en (1.2) y (1.3), es necesario tener una relación de orden sobre el espacio F y ésta es la hipótesis adicional exigida sobre el rango de T. En las aplicaciones se tiene por lo general $F = \mathbb{R}$ y esto es más que suficiente, nótese por el contrario que $F = \mathbb{C}$ no conviene porque el cuerpo de los números complejos solo está dotado de una estructura de orden *parcial*.

Demos ahora algunos ejemplos de aplicaciones lineales, sublineales y cuasi-lineales.

(i) Consideremos el espacio vectorial $E = M_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices cuadradas $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ a coeficientes en $\mathbb{K}$. Definimos la aplicación traza T de una matriz por

$$\begin{array}{rcl} T : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & T(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{array}$$

El lector puede verificar sin ningún problema que T es una forma lineal.

(ii) Sea $E = \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas y acotadas[1] definidas sobre $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f)(x) = x^3 f(x). \end{array}$$

La aplicación T es lineal pues se tiene $T(\alpha f + g) = \alpha x^3 f(x) + x^3 g(x) = \alpha T(f) + T(g)$.

[1] Recordar que $\mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Véase el ejemplo B) Sección 1.4.2 del Volumen 1.

(iii) Consideremos $E = \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, dx)$ el espacio de funciones integrables con respecto a la medida de Lebesgue dx y definamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} I : \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, dx) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & I(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \end{array}$$

Con la teoría desarrollada en el primer volumen, el lector no tendrá ninguna dificultad en verificar que I es efectivamente una aplicación lineal y, dado que los valores de I son reales, lo que obtenemos en realidad es una forma lineal.

(iv) Sea ahora $E = \mathcal{C}^1_a([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas y acotadas, a derivadas continuas y acotadas[2], definidas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} S : \mathcal{C}^1_a([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & S(f)(x) = \dfrac{d}{dx} f(x). \end{array}$$

La linealidad de la aplicación S es evidente y se deduce de las propiedades de la derivada $\frac{d}{dx}$.

(v) Sea $E = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio de Lebesgue de funciones de potencia p-eme integrables a valores en $\mathbb{K}$. Definimos la aplicación N_p por

$$\begin{array}{rcl} N_p : L^p(\mathbb{R}^n, dx) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & N_p(f) = \begin{cases} \|f\|_{L^p} = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty} = \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess|f(x)| & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \end{array}$$

Por la desigualdad de Minkowski (o desigualdad triangular) se tiene inmediatamente que la aplicación N_p es una aplicación sublineal pues se tiene, para todo $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$N_p(\alpha f + g) \leq |\alpha| N_p(f) + N_p(g).$$

Nótese en particular que la aplicación N_p no verifica en toda generalidad la identidad (1.1.1).

(vi) Sea $E = \mathbb{R}^n$. Para todo $0 < p < 1$ definimos la aplicación $n_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$n_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Aplicando el Lema 4.2.1 del Volumen 1, se puede ver que n_p es una aplicación cuasi-lineal pues $n_p(x+y) \leq 2^{1/p-1}(n_p(x) + n_p(y))$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Aquí la constante K de la fórmula (1.3) es igual a $2^{1/p-1}$ y se tiene $2^{1/p-1} > 1$.

Tendremos la oportunidad de exponer algunos otros ejemplos de aplicaciones lineales o sublineales en las líneas siguientes, pero podemos decir desde ya que los ejemplos (iii) y (v) serán la fuente de muchos resultados importantes.

Notación: Se suele, por lo general, distinguir algunas aplicaciones lineales de otras llamándolas operadores lineales (como por ejemplo el operador "derivada" del ejemplo (iv)). En este capítulo no haremos tal distinción entre *aplicaciones lineales* y *operadores lineales*, de manera que estas dos terminologías serán usadas como sinónimos.

[2] $\mathcal{C}^1_a([0,1], \mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_{\mathcal{C}^1_a([0,1])} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |\frac{d}{dx} f(x)|$.

Definición 1.1.5 (Operaciones entre aplicaciones lineales)

1) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sean T y S dos aplicaciones lineales con $D(T), D(S) \subseteq E$ y $R(T), R(S) \subseteq F$.*

   a) *El* producto escalar *αT está dado por $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$ para todo $x \in D(T)$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.*

   b) *La* suma *$T + S$ está definida como $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ para todo $x \in D(T) \cap D(S)$.*

2) *Sean E,F,G tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ y si $S : D(S) \subset F \longrightarrow G$ son dos aplicaciones lineales, entonces la* composición *$S \circ T$ está definida por la fórmula $S \circ T(x) = S(T(x))$ para todo $x \in \{x \in E : x \in D(T)$ y $T(x) \in D(S)\}$.*

Proposición 1.1.1 *Las aplicaciones αT, $T + S$ y $S \circ T$ recién definidas son aplicaciones lineales.*

Prueba. La verificación de este hecho es inmediata y es dejada al lector en ejercicio. ■

Observación 1.2 Es muy importante notar que las aplicaciones $S \circ T$ y $T \circ S$ no coinciden necesariamente. Para dar un ejemplo de esta situación, tomamos las aplicaciones T y S explicitadas en los ejemplos (ii) y (iv) definidas sobre $D(T) \cap D(S)$. Vemos fácilmente que existen funciones $f \in D(T) \cap D(S)$ tales que se tiene el conmutador

$$[T, S]f = (T \circ S - S \circ T)(f) = T(S(f)) - S(T(f)) \neq 0,$$

de manera que $S \circ T \neq T \circ S$. Esto muestra que es necesario tener un poco de cuidado cuando se manipula la composición de aplicaciones lineales.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la proposición anterior y nos indica qué tipo de estructura se dispone sobre el conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en F.

Proposición 1.1.2 (Espacio de aplicaciones lineales $\mathscr{L}^\star(E, F)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. El conjunto de las aplicaciones lineales definidas sobre todo E y a valores en F es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y será notado $\mathscr{L}^\star(E, F)$.*

Prueba. Vemos sin ningún problema que la aplicación nula $T \equiv 0$ es lineal y por lo tanto pertenece al espacio $\mathscr{L}^\star(E, F)$. Sean ahora $T_1, T_2 \in \mathscr{L}^\star(E, F)$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$; se tiene por la linealidad de estas aplicaciones la identidad

$$\big(\alpha T_1 + \beta T_2\big)(x + \gamma y) = \big(\alpha T_1(x) + \beta T_2(x)\big) + \gamma\big(\alpha T_1(y) + \beta T_2(y)\big)$$

para todo $x, y \in E$, lo que muestra que su combinación lineal $\alpha T_1 + \beta T_2$ pertenece al espacio $\mathscr{L}^\star(E, F)$. ■

Definición 1.1.6 (Espacio de aplicaciones lineales continuas $\mathscr{L}(E, F)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos*[3]*. Notaremos el conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F por $\mathscr{L}(E, F)$.*

Es evidente que el conjunto $\mathscr{L}(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}^\star(E, F)$.

Cuando el rango $R(T) \subset F$ de una aplicación lineal T es un subconjunto del cuerpo de los escalares $\mathbb{K}$, hemos reservado el nombre de *formas lineales* (reales o complejas) para tales aplicaciones -véase la Definición 1.1.3. De la misma manera, cuando $F = \mathbb{K}$ se dispone de una terminología especial para designar los conjuntos $\mathscr{L}^\star(E, \mathbb{K})$ y $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

[3] véase la Definición 1.3.2 del Volumen 1.

Definición 1.1.7 (Espacio dual algebraico $E^\star$) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El dual algebraico $E^\star$ de E está definido como el conjunto de formas lineales definidas sobre E. Es decir $E^\star = \mathscr{L}^\star(E, \mathbb{K})$.*

Definición 1.1.8 (Espacio dual topológico E') *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. El dual topológico*[4] *E' de E está definido como el conjunto de formas lineales continuas definidas sobre E. Es decir $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.*

En este capítulo nos concentraremos especialmente en este último tipo de espacios duales cuyas propiedades serán estudiadas en detalle en la Sección 1.4.

1.1.2. Continuidad de las aplicaciones lineales

Volvamos a nuestra exposición de las propiedades de las aplicaciones lineales y nos interesamos ahora en el estudio de la continuidad de este tipo de aplicaciones. Evidentemente, nuestra exposición de la continuidad se articulará en función de las hipótesis estructurales exigidas: empezaremos con las propiedades que se disponen sobre espacios vectoriales topológicos generales pero muy rápidamente pasaremos a los resultados disponibles sobre los espacios de Fréchet y, finalmente, estudiaremos las propiedades que son válidas en los espacios vectoriales normados.

Recordemos pues que un espacio vectorial es un *espacio vectorial topológico* si su estructura vectorial es compatible con la estructura topológica. El primer resultado que presentamos nos asegura que en el caso muy especial de las aplicaciones lineales es suficiente estudiar su continuidad en el origen:

Proposición 1.1.3 *Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. Una aplicación lineal T definida sobre $D(T) \subseteq E$ en F es continua en todo su dominio si y solo si es continua en el vector cero.*

Prueba. Si la aplicación T es continua en todo punto es evidentemente continua en el vector cero. Recíprocamente, puesto que la aplicación traslación $\psi_\tau : x \longmapsto x + \tau$ en el espacio vectorial E es continua; por composición de aplicaciones continuas deducimos que si una aplicación lineal es continua en el vector cero entonces es continua en todo su dominio. ■

Observación 1.3 Esta proposición muestra que en el caso muy especial de las aplicaciones lineales sobre espacios vectoriales topológicos, es suficiente estudiar su continuidad en un sólo punto. Por comodidad hemos fijado este punto como el origen, pero bien puede ser cualquier otro punto.

Corolario 1.1.1 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos, $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua si y solo si para toda vecindad W del origen de F existe una vecindad V del origen de E tal que $x_0 - x \in V$ implica $T(x_0) - T(x) \in W$. Es decir si se tiene $T(V) \subset W$.*

Prueba. Por la proposición anterior, tiene sentido estudiar la continuidad únicamente en vecindades del origen. Sea pues W una vecindad del origen de F, si T es una aplicación lineal continua, entonces por definición de continuidad en los espacios topológicos generales se tiene $T(V) \subset W$ para alguna vecindad V del origen de E. Recíprocamente, si $x_0 - x \in V$, la linealidad de T implica que $T(x_0) - T(x) = T(x_0 - x) \in W$. Esto muestra que la aplicación T envía la vecindad $x + V$ del vector x en la vecindad $T(x) + W$ de $T(x)$; es decir que la aplicación T es continua en el punto x. ■

En la mayoría de casos interesantes, los espacios E y F están dotados de estructuras más ricas que la de los espacios vectoriales topológicos generales. Vamos por lo tanto a concentrarnos en esta sección en dos casos particulares que corresponden a los *espacios vectoriales topológicos localmente convexos*

[4] Hay que tener cuidado con esta notación: en la literatura anglosajona, se nota el dual topológico por $E^\star$, mientras que nosotros notaremos este espacio E'.

(e.l.c.) y a los *espacios vectoriales normados* (e.v.n) y veremos cómo el hecho de disponer de diferentes tipos de estructuras ayudan en el enunciado y la demostración de los resultados a continuación.

A) Espacios vectoriales topológicos localmente convexos

Empecemos considerando $(E, (p_i)_{i\in I})$ y $(F, (q_j)_{j\in J})$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos dotados cada uno de ellos de una familia de semi-normas. Recuérdese que una semi-norma $p : E \longrightarrow [0, +\infty[$ definida sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial verifica las dos propiedades[5]

(SN.1) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(SN.2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.

A partir de estas semi-normas se define las semi-bolas $B_p(0, r) = \{x \in E : p(x) < r\}$. Recuérdese además que una vecindad del origen de un espacio vectorial topológico localmente convexo $(E, (p_i)_{i\in I})$ está dada por el conjunto

$$V = \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon_i,\ i \in K\} \tag{1.4}$$

en donde K es una familia finita de índices y $(\varepsilon_i)_{i\in K}$ es una familia de reales positivos. De ahora en adelante supondremos siempre que la familia de semi-normas satisface el axioma de separación, es decir que la topología determinada por este tipo de vecindades es separada.

Gracias a las familias de semi-normas que proporcionan la estructura de espacio localmente convexo separado, se define la continuidad de una función $f : E \longrightarrow F$ en un punto $x_0 \in E$ exigiendo que, para todo $q \in (q_j)_{j\in J}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de índices $K = \{i_1, ..., i_k\} \subset I$ tal que, para todo $x \in E$ se tiene la implicación

$$p_{i_k}(x - x_0) \leq \delta_{i_k} \Longrightarrow q(f(x) - f(x_0)) \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

en donde $\delta_{i_k} > 0$ para todo $i_k \in K$.

Presentamos ahora el teorema siguiente que nos permite caracterizar la continuidad de las aplicaciones lineales $T : E \longrightarrow F$ en términos de las familias de semi-normas que determinan las topologías de espacio localmente convexo separado de E y de F:

Teorema 1.1.1 (Continuidad de las Aplicaciones Lineales en los e.l.c.) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ y $(F, (q_j)_{j\in J})$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos localmente convexos separados. Entonces se tiene que una aplicación lineal T, definida sobre $D(T) \subseteq E$ a valores en F, es* continua *si y solo si para cada semi-norma $q \in (q_j)_{j\in J}$ existe una familia finita $K \subset I$ de índices y una constante positiva C tal que:*

$$q(T(x)) \leq Cp_i(x), \qquad \textit{para todo } i \in K \textit{ y todo } x \in D(T). \tag{1.6}$$

Demostración. Por la Proposición 1.1.3 no hace falta estudiar la continuidad en todo el dominio de definición, basta hacerlo en el origen de E. Vemos, gracias a la definición de la continuidad de las funciones en espacios localmente convexos separados dada en (1.5), que si se tiene (1.6), se obtiene inmediatamente la continuidad de la aplicación T en el origen.

Supongamos ahora que T es continua en el origen y verifiquemos que se tiene (1.6): puesto que se tiene para toda semi-norma $q \in (q_j)_{j\in J}$ y para todo $\varepsilon > 0$, que existe una familia finita de índices $K \subset I$ tales que $p_{i_k}(x) \leq \delta_{i_k} \Longrightarrow q(T(x)) \leq \varepsilon$; utilizando la linealidad de la aplicación T y la propiedad (SN.1) de las semi-normas, vemos que esta implicación es equivalente a la condición $q(T(x)) \leq Cp_i(x)$. ■

[5]es por lo tanto una aplicación sublineal.

Observación 1.4 La estimación (1.6) puede escribirse de manera equivalente como $q(T(x)) \leq C \max_{i\in K} p_i(x)$ o como $q(T(x)) \leq C \sum_{i\in K} p_i(x)$.

Observación 1.5 El lector debe tener cuidado en aplicar el Teorema 1.1.1 únicamente a las aplicaciones lineales; en el caso general se debe utilizar la definición (1.5).

Veremos un poco más tarde que la noción de subconjunto *acotado* juega un rol importante, especialmente cuando se la estudia desde el punto de vista de las aplicaciones lineales. Es por esta razón que damos aquí la siguiente definición.

Definición 1.1.9 (Conjunto acotado en un e.v.t.) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. Diremos que un subconjunto A de E es* acotado en el sentido de los espacios vectoriales topológicos, *si para toda vecindad V del origen de E, existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V$ para todo $\tau > \sigma$.*

Cuando el espacio E es un espacio metrizable y está dotado de una distancia d_E, puede haber confusión entre las nociones de acotación *en el sentido métrico* y de acotación *en el sentido de los espacios vectoriales topológicos* dada en la definición anterior.

En efecto, recordemos que un conjunto A es acotado en el sentido métrico si existe una constante $C > 0$ tal que su diámetro $diam(A) = \sup\{d_E(x, y) : x, y \in A\}$ esté mayorado por C, es decir si $diam(A) < C$. Pero es importante recalcar que estas dos nociones reflejan dos situaciones distintas: en particular, cuando un espacio vectorial topológico E está dotado con una distancia d_E compatible con la estructura topológica, las nociones de acotación en el sentido de la Definición 1.1.9 y de acotación en el sentido métrico no coinciden necesariamente. Sin embargo si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado y si d_E es la distancia inducida por la norma[6], entonces estos dos conceptos coinciden. Ver el Ejercicio 1.1 para más detalles.

El siguiente resultado nos dice qué relaciones existen entre la noción de continuidad y los conjuntos acotados en los espacios vectoriales localmente convexos:

Proposición 1.1.4 (Continuidad y conjuntos acotados) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ y $(F, (q_j)_{j\in J})$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos separados y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal.*

1) Si T es una aplicación continua entonces la imagen por medio de T de todo conjunto acotado de E es un conjunto acotado de F.

2) Si E es un espacio vectorial topológico locamente convexo metrizable y si la imagen por T de toda sucesión convergente hacia $0 \in E$ es acotada, entonces la aplicación T es continua.

Prueba.

1) Sea pues A un conjunto acotado de E y sea V una vecindad del origen de F. Dado que la aplicación T es continua, la preimagen $T^{-1}(V)$ de V por T es una vecindad del origen de E. Existe entonces un real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \sigma T^{-1}(V)$ y esto implica que $T(A) \subset \sigma V$, de donde se obtiene que $T(A)$ es un conjunto acotado de F.

2) Supongamos que E es metrizable pero que la aplicación T no es continua. Consideremos una sucesión decreciente de vecindades $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del origen de $0 \in E$. Entonces existe una vecindad de $0 \in F$, que podemos suponer de la forma dada por la fórmula (1.4), es decir $W = B_{r,q}(0)$ con $r > 0$, tal que $T(\frac{1}{n}V_n) \not\subseteq W$ para todo $n \geq 1$. Existe por lo tanto un punto $x_n \in V_n$ tal que $q_j(T(x_n)) \geq nr$. Se construye de esta forma una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E que converge hacia $0 \in E$ pero tal que la cantidad $T(x_n)$ no es acotada; de donde se obtiene una contradicción y el resultado buscado. ■

[6] es decir si $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$.

La utilidad de esta proposición aparecerá claramente cuando estudiemos las relaciones existentes entre conjuntos acotados y conjuntos compactos a través de las aplicaciones lineales puesto que se tiene el resultado siguiente:

Proposición 1.1.5 *Sea $(E,(p_i)_{i\in I})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Entonces todo conjunto compacto es un conjunto acotado.*

Prueba. Sea K un conjunto compacto y sea U una vecindad del origen de E. Dado que se tiene

$$K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU = E,$$

por compacidad de K se puede extraer un subrecubrimiento finito y entonces se tiene $K \subset n_1U \cup n_2U \cup \cdots \cup n_kU = \sup\limits_{1\leq i\leq k} n_iU_i$, de donde se deduce que K es un conjunto acotado en E. ■

Dejemos ahora de lado los conjuntos acotados para presentar una aplicación interesante del Teorema 1.1.1 cuando se trata de comparar las estructuras topológicas definidas sobre un mismo espacio localmente convexo separado. En efecto, si fijamos $E = F$ y consideramos la aplicación identidad $T = Id$, que es evidentemente lineal y continua, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1.2 (Comparación de Topologías en los e.l.c.) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y sean $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ dos sistemas de semi-normas definidas sobre E. Entonces:*

1) La topología definida por la familia de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ es menos fina *que la estructura topológica determinada por la familia $(q_j)_{j\in J}$ si y solo si, para todo $i \in I$, existe una parte finita K de J y una constante $C \geq 0$ tales que*

$$p_i(x) \leq Cq_j(x), \quad \textit{para todo } x \in E \textit{ y para todo } j \in K. \tag{1.7}$$

2) Las dos familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ son equivalentes *si determinan la misma estructura topológica. Es decir si además de verificar (1.7), se tiene que para todo $j \in J$, existe una familia finita $L \subset I$ y una constante $C' > 0$ tal que*

$$q_j(x) \leq C'p_i(x), \quad \textit{para todo } x \in E \textit{ y para todo } i \in L.$$

Prueba. Para el primer punto empecemos notando respectivamente $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ las topologías determinadas sobre el conjunto E por las familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$. Supongamos luego que la topología $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$ y consideremos la aplicación identidad $Id : (E,\mathcal{T}_2) \longrightarrow (E,\mathcal{T}_1)$. Aplicando el Teorema 1.1.1 obtenemos que para toda semi-norma p_i existe una familia finita de índices $K \subset J$ y una constante $C > 0$ tales que $p_i(Id(x)) = p_i(x) \leq Cq_j(x)$ para todo $x \in E$ y todo $j \in K$, y de esta manera se obtiene la propiedad (1.7). Recíprocamente, si tenemos (1.7), esto significa que todo abierto U de la topología $\mathcal{T}_1$ está contenido en un abierto de la topología $\mathcal{T}_2$, lo que implica que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ y por lo tanto que $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$. En efecto, se tiene que una vecindad centrada en el origen U de $\mathcal{T}_1$ se escribe $U = \{x \in E : p_{i_k}(x) < \varepsilon_k, \quad k = 1,...,n\}$ para un sistema finito de semi-normas $p_{i_1},...,p_{i_n}$, de manera que si se tiene (1.7), entonces la vecindad U está contenida en un abierto $V = \{x \in E : q_{j_k}(x) < \delta_k, \quad k = 1,...,n\}$.

El segundo punto se deduce del primero: en efecto, se tiene por un lado que todo abierto de la topología $(E,(p_i)_{i\in I})$ es un abierto para la topología $(E,(q_j)_{j\in J})$ y por otro lado que todo abierto de la topología $(E,(q_j)_{j\in J})$ es un abierto para la topología $(E,(p_i)_{i\in I})$. Se obtiene entonces que la estructura topológica engendrada por estas dos familias de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$ y $(q_j)_{j\in J}$ es la misma.■

Cuando el espacio de llegada F de una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ posee propiedades estructurales adicionales la situación se simplifica considerablemente. Por ejemplo, el Teorema 1.1.1 se enuncia de manera muy simple cuando la aplicación T es una forma lineal:

Corolario 1.1.3 (Continuidad de las Formas Lineales en los e.l.c.) *Si $(E, (p_i)_{i\in I})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y si $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces T es continua si y solo si existe una familia finita de índices $K \subset I$ y una constante positiva C tales que*

$$|T(x)| \leq Cp_i(x), \quad \textit{para todo } i \in K \textit{ y todo } x \in D(T). \tag{1.8}$$

Prueba. Sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$, la topología está determinada por la única semi-norma $|\cdot|$ (que es en realidad una norma) de manera que se tiene (1.8) como una consecuencia directa del Teorema 1.1.1. ■

B) Espacios vectoriales normados

El corolario anterior es evidentemente un preludio al caso en donde los espacios considerados E y F son espacios vectoriales normados. En este sentido tenemos el resultado a continuación:

Teorema 1.1.2 (Continuidad de las Aplicaciones Lineales en los e.v.n.) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y sea T una aplicación lineal de E en F. Las cuatro propiedades siguientes son equivalentes:*

1) la aplicación T es continua,

2) la aplicación T es continua en el orígen,

3) la aplicación T es uniformemente continua sobre $D(T)$,

4) existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in D(T)$ se tiene

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E. \tag{1.9}$$

Demostración. Por la Proposición 1.1.3 se tiene *1)* $\Longleftrightarrow$ *2)*. Es evidente que *3)* $\Longrightarrow$ *2)* y, por el Teorema 1.1.1, se tiene que *2)* $\Longrightarrow$ *4)*. Solo nos queda entonces por verificar que *4)* $\Longrightarrow$ *3)* lo cual se deduce inmediatamente de la definición de continuidad uniforme[7] y de la estimación:

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E.$$

Nótese en particular que la desigualdad anterior expresa que la aplicación T es C-lipschitziana.

■

Observación 1.6 Es muy importante notar que, para las aplicaciones lineales, existe *equivalencia* entre las nociones de continuidad, continuidad en el punto cero, continuidad uniforme y aplicaciones lipschitzianas. El lector debe tener mucho cuidado en no utilizar y aplicar estas equivalencias a aplicaciones que no son lineales. Para más detalles, ver el Ejercicio 1.2.

La fórmula (1.9) es de mucha utilidad cuando se trabaja con aplicaciones lineales y se desea verificar su continuidad, veamos pues tres ejemplos simples.

[7] véase la Definición 1.1.3 del Volumen 1.

(i) Empecemos con el punto (ii) de la página 5. Tenemos directamente la mayoración

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^3 f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

de donde se deduce la continuidad de T.

(ii) Estudiemos ahora la continuidad del ejemplo (iii) de la página 6, pero tomando $E = L^1(\mathbb{R}^n, dx)$. Dado que la mayoración

$$|I(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^1} \tag{1.10}$$

es válida para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, se obtiene la continuidad de la aplicación I.

(iii) Veamos ahora un ejemplo de una aplicación lineal que no es continua. Consideremos el espacio vectorial normado real E determinado por $E = (\mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_*)$ en donde la norma $\|\cdot\|_*$ está dada por medio de la fórmula

$$\|f\|_* = \int_0^1 |f(x)|dx. \tag{1.11}$$

Determinamos entonces una aplicación $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $T(f) = f(0)$. El lector no tendrá dificultad en verificar que T es una aplicación lineal.

Definimos ahora la sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ determinada por

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nótese ahora que, para todo $n \geq 1$, se tiene $T(f_n) = f_n(0) = 1$ y que $\|f_n\|_* = \frac{1}{2n}$. De estos cálculos se deduce que la función f_n tiende hacia la función cero $f \equiv 0$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|_*$, pero que la sucesión $T(f_n)$ no converge hacia $T(f) = 0$ y por lo tanto la aplicación T no es una aplicación lineal continua sobre E. Nótese además que no se tiene desigualdad (1.9).

Observación 1.7 Más generalmente, en un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión infinita siempre existen formas lineales que no son continuas. En efecto, sea $(e_i)_{i\in I}$ una base de E y supongamos que $\|e_i\|_E = 1$. Sea ahora $(c_i)_{i\in I}$ una familia no acotada de $\mathbb{R}$ y definamos la forma lineal $T(e_i) = c_i$. Vemos entonces que no existe una constante $C > 0$ tal que $|T(e_i)| = |c_i| < +\infty$ para todo $i \in I$ y por lo tanto, por el punto 3) del Teorema 1.1.2 tenemos que T no es continua.

Observación 1.8 Es necesario tener cuidado con algunos atajos lingüísticos que pueden ser una fuente de errores: *una aplicación nunca es continua por sí misma, sino que es continua con respecto a una cierta estructura topológica.*

Para ilustrar este hecho, consideramos el ejemplo (iii) anterior. Vimos con la sucesión de funciones (1.12) que la aplicación lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(0)$ *no es continua* con respecto a la estructura topológica determinada por la norma $\|\cdot\|_*$.

Consideremos ahora $E = (\mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Vemos entonces que

$$|T(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty,$$

de donde se deduce por el Teorema 1.1.2 que la aplicación lineal T es continua con respecto a la estructura topológica generada por la norma $\|\cdot\|_\infty$. Este ejemplo muestra la *dependencia* de la continuidad con respecto a las normas consideras.

Más generalmente, el marco de trabajo está dado por una estructura topológica predeterminada llamada la "topología natural[8]" que posee ciertas propiedades. Sin embargo esto no es siempre suficiente y en muchas ocasiones será necesario cambiar de punto de vista considerando otras estructuras topológicas. Esto será tratado con mayor detalle en la Sección 1.4.

Continuemos nuestra exposición. Para ello enunciamos las versiones de la Proposición 1.1.4 y del Corolario 1.1.2 en los espacios vectoriales normados.

Proposición 1.1.6 *Sean* $(E, \|\cdot\|_E)$ *y* $(F, \|\cdot\|_F)$ *dos espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal* $T : E \longrightarrow F$ *es continua si y solo si la imagen de todo conjunto acotado es acotada.*

Prueba. Sabemos por la Proposición 1.1.4 que si T es continua entonces la imagen de todo conjunto acotado de E es acotada en F. Para la recíproca, dado que en los espacios normados los conjuntos acotados pueden caracterizarse por las bolas determinadas por la norma correspondiente, el hecho que la imagen por medio de la aplicación T de todo conjunto acotado de E sea un conjunto acotado de F se escribe

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

que es justamente la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales en los espacios normados. ■

Observación 1.9 Este resultado muestra la importancia de los conjuntos acotados pues permite caracterizar la continuidad de las aplicaciones lineales. Hay que tener entonces un poco de cuidado pues, cuando se trabaja en el marco muy especial de aplicaciones lineales, la acotación es sinónimo de continuidad.

El Corolario 1.1.2 se enuncia como sigue en el marco de los espacios vectoriales normados.

Corolario 1.1.4 (Comparación de Topologías en los e.v.n.) *Sea E un espacio vectorial normado y sean* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *dos normas definidas sobre E.*

1) *La topología* $(E, \|\cdot\|_1)$ *es* menos fina *que la topología* $(E, \|\cdot\|_2)$ *si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que*
$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \textit{para todo } x \in E.$$

2) *Las topologías* $(E, \|\cdot\|_1)$ *y* $(E, \|\cdot\|_2)$ *son* equivalentes *si y solo si existen dos constantes* $C, C' > 0$ *tales que*
$$C'\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \textit{para todo } x \in E.$$
Por extensión, diremos que las normas $\|x\|_1$ *y* $\|x\|_2$ *son* equivalentes *y lo notaremos* $\|x\|_1 \simeq \|x\|_2$.

Observación 1.10 La noción de normas equivalentes ha sido presentada en el Volumen 1 por medio de la definición 1.4.5, mientras que aquí, esta noción es una consecuencia de la continuidad de la aplicación identidad.

El resultado siguiente nos permite caracterizar la continuidad de la inversa de una aplicación lineal.

[8] *natural* en varios sentidos: puede ser la más sencilla de definir, la primera que apareció históricamente, la preferida del autor, etc.

Corolario 1.1.5 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal T de E en F con dominio de definición $D(T) \subseteq E$ admite una aplicación inversa continua T^{-1} si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_F \geq C\|x\|_E \qquad \textit{para todo } x \in D(T). \tag{1.13}$$

Prueba. Si se tiene la desigualdad anterior, entonces $T(x) = 0$ implica $x = 0$. Por lo tanto, la inversa T^{-1} existe, está bien definida y la continuidad de la aplicación T^{-1} se deduce entonces del Teorema 1.1.2. ■

Demos ahora un par de definiciones que serán de utilidad en los capítulos siguientes.

Definición 1.1.10 (Isometría, Isomorfismo) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ es*

1) un isomorfismo *entre los espacios E y F si y solo si T es biyectiva y T y su inversa T^{-1} son continuas. Es decir, si existen dos contantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$.*

2) una isometría *entre los espacios E y F si y solo si $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$,*

Observación 1.11 Nótese que la definición de isomorfismo que acabamos de dar se generaliza sin ningún problema a los espacios de Fréchet, solo hay que considerar familias de semi-normas en vez de normas: por ejemplo, una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ de un espacio de Fréchet $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en otro espacio de Fréchet $(F, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es una isometría si para toda semi-norma $q \in (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe una semi-norma $p \in (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $q(T(x)) = p(x)$.

Continuamos ahora con la siguiente definición que es de gran importancia en lo que sigue y que será estudiada con mayor detalle posteriormente.

Definición 1.1.11 (Norma de una aplicación lineal continua) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Definimos la* norma de la aplicación lineal continua *T como la cantidad*

$$\|T\|_{E\to F} = \text{ínf}\left\{C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E\right\} \tag{1.14}$$

Cuando no hay confusión posible entre los espacios E y F, notaremos $\|T\|$ en vez de $\|T\|_{E\to F}$.

Verifiquemos rápidamente que la fórmula (1.14) define una norma: en efecto, se tiene sin mayor problema que $\|T\|_{E\to F} = 0$ si y solo si la aplicación lineal continua T es nula; mientras que la homogeneidad, así como la desigualdad triangular, se deducen directamente de las propiedades de la norma $\|\cdot\|_F$.

Observación 1.12 Tenemos de esta forma que, cuando los espacios E y F son espacios vectoriales normados, el espacio $(\mathscr{L}(E, F), \|\cdot\|_{E\to F})$ es también un espacio vectorial normado. Veremos en la Sección 1.4 que es posible determinar otro tipo de estructuras topológicas sobre este tipo de espacios.

Notamos, por la linealidad de la aplicación T y por el Teorema 1.1.2-4) de caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales en los espacios normados, que tenemos las identidades siguientes:

$$\|T\|_{E\to F} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}. \tag{1.15}$$

Nótese que en la práctica se utiliza constantemente la estimación

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{E\to F}\|x\|_E, \qquad (\forall x \in E) \tag{1.16}$$

en donde la cantidad $\|T\|_{E\to F}$ es la norma de T y es por definición la más pequeña constante tal que esta desigualdad es válida para todo $x \in E$. Indiquemos que esta desigualdad puede ser estricta como lo muestra el Ejercicio 1.3.

Notación: Dado que hemos adoptado la notación clásica $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$; notaremos entonces la norma $\|\cdot\|_{E\to\mathbb{K}}$ de esta manera $\|\cdot\|_{E'}$.

Proposición 1.1.7 *Si T y S son dos aplicaciones lineales continuas definidas sobre un mismo espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ a valores en otro espacio vectorial $(F, \|\cdot\|_F)$, entonces se tiene*

$$\|T+S\|_{E\to F} \leq \|T\|_{E\to F} + \|S\|_{E\to F}, \qquad y \quad \|\lambda T\|_{E\to F} = |\lambda|\|T\|_{E\to F} \quad \textit{para todo escalar } \lambda.$$

Además si $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ y $S : (F, \|\cdot\|_F) \longrightarrow (G, \|\cdot\|_G)$ son dos aplicaciones lineales continuas en los espacios normados E, F y G, entonces se tiene la desigualdad

$$\|S \circ T\|_{E\to G} \leq \|S\|_{F\to G}\|T\|_{E\to F}$$

Prueba. La primera parte es inmediata y dejada al lector. Para la segunda parte utilizamos la desigualdad (1.16) para escribir

$$\|S \circ T(x)\|_G \leq \|S\|_{F\to G}\|T(x)\|_F \leq \|S\|_{F\to G}\|T\|_{E\to F}\|x\|_E$$

de donde se deduce que $\|S \circ T\|_{E\to G} \leq \|S\|_{F\to G}\|T\|_{E\to F}$. ■

Corolario 1.1.6 *Si $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$ es una aplicación lineal continua entonces se tiene*

$$\|T^n\|_{E\to E} \leq \|T\|^n_{E\to E}$$

en donde el operador T^n se define inductivamente por $T^n = T(T^{n-1})$ para todo $n \geq 1$ y con $T^0 = Id$.

Para terminar este pequeño párrafo mostramos un ejemplo sencillo de cálculo de la norma de una aplicación lineal. Para ello consideramos el espacio normado $E = (\mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_*)$ en donde $\|f\|_* = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Definimos ahora una aplicación lineal $T : \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$ por medio de la expresión $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Verificar que T es lineal es inmediato por las propiedades de la integral; vemos además que si $g = T(f)$, entonces g es la primitiva que se anula en 0 de una aplicación continua y es por lo tanto una aplicación continua[9]. Es decir que $T(f) \in \mathcal{C}_a([0,1], \mathbb{R})$. Finalmente, ver que esta aplicación T es continua se obtiene por la desigualdad

$$\|T(f)\|_* = \int_0^1 |Tf(x)|dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|dtdx \leq \|f\|_*. \tag{1.17}$$

A partir de esta estimación, vemos que si $\|f\|_* = 1$ entonces $\|T(f)\|_* \leq 1$ y por la fórmula (1.15) se tiene que la norma de $\|T\|_{E\to E}$ verifica $\|T\|_{E\to E} \leq 1$. Vamos a ver que se tiene $\|T\|_{E\to E} = 1$. Para ello consideramos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$, de manera que $\|f_n\|_* = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos además que $T(f_n)(x) = 1 - (1-x)^{n+1}$ y que $\|T(f_n)\|_* = 1 - \frac{1}{n+2}$. De esta manera se obtiene que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T(f_n)\|_* = 1$, pero como la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto de todas las funciones de E de norma 1, se tiene $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T(f_n)\|_* \leq \sup\limits_{\|f\|_*=1} \|T(f)\|_*$, de donde se deduce que $\|T\|_{E\to E} = 1$.

[9]Ver también el Corolario 3.3.2 del Volumen 1 en donde se estudia la continuidad de la integral con respecto a la cota superior.

Observación 1.13 Es interesante notar que se procede por lo general en dos etapas cuando se estudia la norma de una aplicación lineal. La primera estimación, dada en este ejemplo con el cálculo mostrado en (1.17), es relativamente directa pues hay que buscar mayoraciones y nos proporciona inmediatamente alguna información sobre la norma de las aplicaciones lineales. La segunda etapa, ligeramente más delicada, consiste en buscar una sucesión de funciones adecuadas que permitan obtener la desigualdad recíproca y así obtener la norma de estas aplicaciones.

1.1.3. Aplicaciones multilineales

Vamos a generalizar en las líneas que siguen los conceptos presentados anteriormente a las aplicaciones multilineales. Esta etapa es muy importante pues algunos de los objetos más útiles que estudiaremos en las secciones siguientes, como el corchete de dualidad, requieren fijar unas notaciones y resultados.

Definición 1.1.12 (Aplicación Multilineal) *Sean F un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una aplicación M definida por*

$$\begin{array}{rcl} M:\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & F \\ (x_1,...,x_n) & \longmapsto & M(x_1,...,x_n) \end{array} \tag{1.18}$$

es una aplicación multilineal *si es lineal en cada una de sus variables; es decir, si cada una de las aplicaciones $x_i \longmapsto M(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ (en donde se ha congelado las variables x_j para todo $j\neq i$) es lineal de E_i en F.*

Demos un ejemplo. Sea $E_1=\cdots=E_n=\mathbb{R}$ y sea $F=\mathbb{R}$. Entonces no es difícil ver que la aplicación $M:\prod_{i=1}^{n}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $(x_1,...,x_n)\longmapsto M(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i$ es una aplicación multilineal.

Indiquemos rápidamente algunas propiedades elementales de las aplicaciones multilineales:

Proposición 1.1.8 *Sean F un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y M una aplicación multilineal, entonces:*

1) Se tiene $M(x_1,...,x_n)=0$ si existe un índice $1\leq i\leq n$ tal que $x_i=0$.

2) Se tiene $M(\alpha x_1,...,\alpha x_n)=\alpha^n M(x_1,...,x_n)$, para todo escalar $\alpha\neq 0$.

3) Si $n=1$ en (1.18) se tiene que una aplicación multilineal es una aplicación lineal.

4) Si $n>1$ una aplicación multilineal no es necesariamente una aplicación lineal.

Prueba. La verificación de los tres primeros puntos es inmediata y dejada al lector como ejercicio. Para el último punto, es suficiente observar que si $M:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es una aplicación multilineal se tiene

$$M(\alpha x_1+y_1,\alpha x_2+y_2)=\alpha^2M(x_1,x_2)+\alpha M(x_1,y_2)+\alpha M(x_1,y_2)+M(y_1,y_2)\neq\alpha M(x_1,x_2)+M(y_1,y_2).$$

Vemos entonces que, si $n>1$, la única aplicación que es lineal y multilineal al mismo tiempo es la aplicación nula.

■

Para poder hablar de continuidad en el espacio producto $\prod_{i=1}^{n}E_i$, es necesario dotarlo de una estructura topológica. Ya hemos visto con la Definición 1.1.5 del Volumen 1 cómo dotar de una distancia al producto cartesiano de dos espacios métricos, induciendo de esta manera una estructura topológica.

Más generalmente se tiene la siguiente definición:

Definición 1.1.13 (Topología producto) *Sea $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de espacios topológicos, consideremos el espacio producto $E = \prod_{i=1}^n E_i$ y sea $\pi_i : E \longrightarrow E_i$ la proyección canónica que a todo punto de E le asocia su coordenada de índice i. La* topología producto *que definimos sobre E, es la topología la más fina que vuelve las aplicaciones π_i continuas.*

Esta definición es demasiado general para nuestros propósitos y como de costumbre nos concentraremos en marcos más adaptados a nuestro trabajo futuro. Por ejemplo, no es muy difícil ver que el producto de espacios vectoriales localmente convexos es también un espacio localmente convexo (ver más detalles en el Ejercicio 1.4) y en el caso en que cado uno de los espacios que intervienen en el producto cartesiano $\prod_{i=1}^n E_i$ es un espacio vectorial normado, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.1.9 *Sea $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados, entonces el espacio producto $E = \prod_{i=1}^n E_i$ es un espacio vectorial normado dotado de la norma*

$$\|x\|_E = \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_{E_i}, \quad \text{con } x = (x_1, ..., x_n) \in E \tag{1.19}$$

Prueba. La prueba es inmediata y es dejada al lector en ejercicio. ■

Observación 1.14 La norma $\|\cdot\|_E$ que acabamos de definir sobre $E = \prod_{i=1}^n E_i$ es equivalente a las normas

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i} \quad y \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^2\right)^{1/2}.$$

Ver también la Observación 1.3 del Volumen 1.

Una vez que hemos fijado la estructura topológica con la cual vamos a trabajar, los resultados de caracterización de la continuidad expuestos en los teoremas 1.1.1 y 1.1.2 se generalizan sin problema para las aplicaciones multilineales. En particular, cuando se trata de espacios vectoriales normados tenemos el teorema a continuación:

Teorema 1.1.3 (Continuidad de Aplicaciones Multilineales en los e.v.n.) *Sean $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado, $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y $M : \prod_{i=1}^n E_i \longrightarrow F$ una aplicación multilineal. Entonces los puntos siguientes son equivalentes:*

1) la aplicación M es continua,

2) la aplicación M es continua en el vector cero,

3) existe una constante $C > 0$ tal que se tenga la desigualdad

$$\|M(x_1, ..., x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n} \tag{1.20}$$

Demostración. Es evidente que 1) $\Longrightarrow$ 2). Mostremos que 2) $\Longrightarrow$ 3). Si M es continua en el origen, la imagen recíproca por M de la bola unidad en F es una vecindad de $(0, ..., 0) \in E$, por lo tanto existe un real $r > 0$ y un punto $(x_1, ..., x_n) \neq 0$ tal que se tenga

$$(\forall i = 1, ..., n) \qquad \|x_i\|_{E_i} \leq r \Longrightarrow \|M(x_1, ..., x_n)\|_F \leq 1.$$

Ahora, si escribimos $\|r^{-1}x_i\|_{E_i} \leq 1$ para todo $i = 1, .., n$, entonces $\|M(x_1, ..., x_n)\|_F \leq \frac{1}{r^n}$ por la multilinealidad de M, de donde se deduce que existe una constante $C > 0$ tal que $\|M(x_1, ..., x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}$.

Mostremos para terminar que se tiene 3) $\Longrightarrow$ 1), para ello mostraremos que M es continua en un punto arbitrario $a = (a_1, ..., a_n) \in E$. Escribimos pues, utilizando las propiedades de multilinealidad de M:

$$M(x_1, ..., x_n) - M(a_1, ..., a_n) = M(x_1 - a_1, ..., x_n) + M(a_1, x_2 - a_2, ..., x_n) + ... + M(a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n)$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \|M(x_1, ..., x_n) - M(a_1, ..., a_n)\|_F \leq\ & C\|x_1 - a_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2} \cdots \|x_n\|_{E_n} \\ & + C\,\|x_2 - a_2\|_{E_2}\|a_1\|\|x_3\|_{E_3} \cdots \|x_n\|_{E_n} \\ & + \cdots + C\|x_n - a_n\|_{E_n}\|a_1\|_{E_1} \cdots \|a_{n_1}\|_{E_{n-1}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Supongamos ahora que $\|x_i - a_i\|_{E_i} \leq \varepsilon$ para todo $i = 1, ..., n$; entonces tenemos $\|x_i\|_{E_i} \leq \|a_i\|_{E_i} + \varepsilon$ y existe un número $A > 0$ tal que $\|x_i\|_{E_i} \leq A$ para todo $i = 1, ..., n$. Inyectando estas estimaciones en (1.21) obtenemos

$$\|M(x_1, ..., x_n) - M(a_1, ..., a_n)\|_F \leq CA^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i - a_i\|_{E_i} \right) \leq n\varepsilon CA^{n-1}$$

y esta fórmula expresa que $M(x_1, ..., x_n)$ tiende hacia $M(a_1, ..., a_n)$ simultáneamente cuando $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, ..., $x_n \to a_n$. Deducimos entonces que M es continua en el punto $(a_1, ..., a_n)$.

■

De la misma manera que en la Definición 1.1.11, es posible considerar la norma de aplicaciones multilineales:

Definición 1.1.14 (Norma de una aplicación multilineal continua) *Sean* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial normado,* $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1\leq i\leq n}$ *una familia finita de* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales normados y* $M : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ *una aplicación multilineal continua. Definimos la* norma de la aplicación multilineal continua M *por*

$$\|T\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i \to F} = \inf \left\{ C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n} \;\; \textit{para todo } x_i \in E_i \right\}. \tag{1.22}$$

La verificación que la cantidad $\|\cdot\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i \to F}$ es efectivamente una norma sigue los mismos pasos que en el caso de las aplicaciones lineales y queda a cargo del lector. De la misma forma, es posible dar las siguientes formulaciones equivalentes:

$$\|T\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i \to F} = \sup_{\|x\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i} \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i} = 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in \prod_{i=1}^{n} E_i \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i}}. \tag{1.23}$$

en donde $\|\cdot\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i}$ es la norma producto (1.19).

Para finalizar este párrafo sobre las aplicaciones multilineales, damos una definición que será de utilidad en lo que sigue.

Definición 1.1.15 (Aplicación multilineal separadamente continua) *Sean* F *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial topológico y* $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ *una familia finita de* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales topológicos. Una aplicación* M *definida por*

$$\begin{array}{rcl} M : \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & F \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & M(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

es una aplicación multilineal separadamente continua *si cada una de las aplicaciones*

$$x_i \longmapsto M(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$$

(en donde se ha congelado las variables x_j para todo $j \neq i$) es continua de E_i en F.

Nótese que si la aplicación M es continua (en el sentido de la topología producto definida sobre $\prod_{i=1}^n E_i$), entonces M es automáticamente separadamente continua. En ciertos casos se tiene la recíproca como lo veremos un poco más adelante.

1.2. Teoremas de Hahn-Banach

El objetivo de esta sección es el de presentar dos versiones distintas de un teorema importante de H. Hahn[10] y S. Banach[11] y de mostrar algunas de sus aplicaciones más relevantes en el análisis funcional. En su versión analítica, el enunciado es muy sencillo: básicamente este teorema nos dice que es posible *prolongar* una forma lineal f definida inicialmente sobre un subespacio vectorial W de E a una forma lineal T definida sobre *todo* el espacio E.

En su versión geométrica, este resultado nos dice en cambio que si tenemos como punto de partida un conjunto abierto convexo, no vacío $B \subset E$ y $M \subset E$ un subespacio afín que no intersecta B; entonces *existe* un hiperplano cerrado H que contiene M y que no intersecta B.

Nótese que estos dos resultados proporcionan la *existencia* de ciertos objetos con particularidades bien definidas y este hecho será de gran utilidad en todos los capítulos siguientes. Después de presentar las demostraciones veremos inmediatamente algunas consecuencias de estos resultados.

1.2.1. Forma analítica

Empecemos directamente con la primera versión de este teorema.

Teorema 1.2.1 (de prolongación de Hahn-Banach) *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y p una semi-norma definida sobre E. Sean $W \subset E$ un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial y $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in W$.*

Entonces existe una forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$, definida sobre todo el espacio E, que prolonga *f en el sentido siguiente: se tiene $T(x) = f(x)$ para todo $x \in W$. Además la forma lineal T verifica la desigualdad $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Es muy importante notar la relativa generalidad de este resultado: los espacios considerados son simplemente espacios vectoriales generales, pero la estructura subyacente está concentrada en las propiedades de la semi-norma p. Esta situación será más que suficiente para nuestros propósitos y podremos aplicar este teorema en diferentes marcos como lo veremos un poco más adelante.

Demostración. Descomponemos la demostración en dos etapas según si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

A) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: supongamos para empezar que el subespacio vectorial W es de codimensión 1 en E, es decir que el espacio vectorial E es engendrado por W y por un elemento $x_0 \notin W$. Escribimos entonces

$$E = W + x_0\mathbb{R} = \big\{x = w + \alpha x_0 : w \in W \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

[10]Hans Hahn (1879-1934), matemático austriaco.
[11]Stefan Banach (1892-1945), matemático polaco.

para algún vector $x_0 \neq 0$ de E. Como $x_0 \notin W$, esta representación de $x \in E$ es única y por lo tanto, para algún número real c, podemos definir

$$T(x) = T(w + \alpha x_0) = f(w) + \alpha c. \tag{1.24}$$

Obtenemos de esta manera una aplicación $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ -que está definida sobre todo E- que es lineal puesto que se tiene $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ para todo $x, y \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y que además es una extensión de la forma lineal f dada inicialmente sobre el subespacio W.

Para verificar la desigualdad $|T(x)| \leq p(x)$, es suficiente estudiar la estimación $T(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. En efecto, a partir de esta desigualdad se tiene $-p(-x) \leq -T(-x) = T(x)$ por la linealidad de la aplicación T y por las propiedades de la semi-norma p, y de esta manera se obtiene la mayoración $|T(x)| \leq p(x)$. Concentrémonos pues en obtener la estimación $T(x) \leq p(x)$. Se trata entonces de escoger el real c utilizado en la definición de T dada con la fórmula (1.24) de manera a obtener

$$T(x) = f(w) + \alpha c \leq p(w + \alpha x_0)$$

para todo $w \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Como por hipótesis se tiene esta estimación cuando $\alpha = 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha \neq 0$. Vamos ahora a dividir ambos lados de esta desigualdad por α y obtenemos los dos puntos siguientes:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{w}{\alpha}\right) + c &\leq p\left(\frac{w}{\alpha} + x_0\right); \text{ si } \alpha > 0 \\ f\left(\frac{w}{-\alpha}\right) - c &\leq p\left(\frac{w}{-\alpha} - x_0\right); \text{ si } \alpha < 0 \end{aligned}$$

Notamos ahora $y_1 = w/\alpha$ y $y_2 = -w/\alpha$, de manera que podemos juntar estos dos puntos en uno solo y obtener

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq c \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Podemos afirmar que este número real c siempre existe puesto que se tiene la mayoración

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) = p(y_1 + x_0 + y_2 - x_0) \leq p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0).$$

Debemos finalmente escoger c entre los dos números reales

$$\sup_{y_2 \in W} \big(f(y_2) - p(y_2 - x_0)\big) \quad \text{y} \quad \inf_{y_1 \in W} \big(p(y_1 - x_0) - f(y_1)\big),$$

y esto termina la demostración en el caso cuando W es de codimensión igual a 1.

Para pasar al caso general, utilizaremos el lema de Zorn[12]. Este resultado es una consecuencia directa del axioma de elección y en este curso será más que suficiente tratar este lema como un axioma.

Recordemos un poco el marco de trabajo de este resultado. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Diremos que un conjunto $\mathcal{X}$ es *inductivo* si toda parte de $\mathcal{X}$ no vacía y totalmente ordenada tiene una cota superior. Tenemos entonces el lema siguiente:

Lema 1.2.1 (de Zorn) *Todo conjunto ordenado $\mathcal{X}$ no vacío e inductivo contiene al menos un elemento maximal.*

[12]Max Zorn (1906-1993), matemático alemán.

Consideremos pues la familia $\mathcal{X}$ formada por todas las parejas (V,T) en donde V es un subespacio vectorial de E que contiene W y $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal que prolonga f tal que $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$. La familia $\mathcal{X}$ puede ser ordenada utilizando la relación siguiente: diremos que $(V_1,T_1) \prec (V_2,T_2)$ si se tiene la inclusión $V_1 \subset V_2$ y si se tiene que la restricción de T_2 a V_1 es igual a T_1, es decir si $T_{2|V_1} = T_1$. Mostremos ahora que la familia $\mathcal{X}$ es un conjunto inductivo, es decir que verifica las hipótesis exigidas por el lema de Zorn. Primero notamos que la familia $\mathcal{X}$ no es vacía pues contiene la pareja (W,f). Luego, si $(V_i,T_i)_{i\in I}$ es una familia totalmente ordenada de $\mathcal{X}$, se tiene que $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ es un subespacio vectorial de E que contiene W y existe una forma lineal T definida sobre V tal que $T_{|V_i} = T_i$. Se obtiene entonces que la pareja (V,T) es un mayorante de la familia $(V_i,T_i)_{i\in I}$. Con esto hemos demostrado que $\mathcal{X}$ es un conjunto inductivo y podemos aplicar el lema de Zorn, obteniendo de esta forma que la familia $\mathcal{X}$ admite un elemento maximal que notaremos (V,T). Para terminar hay que verificar que $V = E$. En efecto, si $E \neq V$, existe un vector $x_0 \in E \setminus V$ y podemos definir el conjunto $V' = V + x_0\mathbb{R}$. Por la primera parte podemos prolongar T en una forma lineal T' definida sobre V'. De esta forma hemos construido un elemento (V',T') de $\mathcal{X}$ que es estrictamente más grande que (V,T), contradiciendo la maximalidad de (V,T).

B) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: para la parte compleja del teorema de Hahn-Banach, necesitaremos el lema a continuación.

Lema 1.2.2 *Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $T : E \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma lineal compleja. Entonces $S = \Re e(T)$ es una forma lineal real sobre E. Recíprocamente, si S es una forma lineal real sobre E, entonces existe una única forma lineal compleja T sobre E tal que $S = \Re e(T)$ dada por $T(x) = S(x) - iS(ix)$.*

Prueba. Vemos inmediatamente que la parte real de una forma lineal compleja es una forma lineal real. Recíprocamente, si $S = \Re e(T)$ tenemos para todo $x \in E$ que $S(x) = \Re e(T(x))$ y

$$S(ix) = \Re e(T(ix)) = \Re e(iT(x)) = -\Im m(T(x))$$

de donde se deduce que $\Im m(T(x)) = -S(ix)$, es decir $T(x) = S(x) - iS(ix)$ y con esto obtenemos la unicidad de la descomposición anunciada. Para terminar debemos verificar que la aplicación T es una forma lineal compleja. Por definición se tiene que S es una forma lineal real, observamos ahora que

$$T(ix) = S(ix) - iS(-x) = iS(x) + S(ix) = iT(x)$$

de donde se obtiene la $\mathbb{C}$-linealidad de la forma lineal T. ■

Volvamos a la demostración del teorema de Hahn-Banach en su forma compleja. Tenemos por la primera parte que la parte real $S = \Re e(f)$ se prolonga en una forma lineal S' definida sobre todo el espacio E y verifica $|S'(x)| \leq p(x)$. Utilizamos ahora el Lema 1.2.2 para obtener una forma lineal $T(x) = S'(x) - iS'(ix)$ que prolonga f a todo el espacio E. Solo nos hace falta comprobar que se tiene $|T(x)| \leq p(x)$. Fijemos pues un punto $x \in E$, existe entonces un real θ tal que $|T(x)| = e^{i\theta}T(x)$, por lo tanto

$$|T(x)| = \Re e(e^{i\theta}T(x)) = S'(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = p(x)$$

lo que demuestra que la aplicación T posee todas las propiedades buscadas. ■

Observación 1.15 Es importante notar que este resultado no dice nada sobre la eventual unicidad de la aplicación T que realiza la extensión, ni sobre el método para encontrar de manera explícita esta forma lineal. Es un resultado de *existencia*.

1.2.2. Aplicación a las aplicaciones lineales continuas

Este resultado tiene muchísimas aplicaciones en el análisis funcional y vamos a ver algunas de ellas relacionadas particularmente a dos tipos de problemas que exponemos en las siguientes subsecciones.

A) Aplicaciones lineales continuas y dualidad

En esta sección vamos a ver dos consecuencias muy importantes del Teorema 1.2.1. La primera, enunciada en el Teorema 1.2.2 a continuación, tiene que ver con la prolongación de la continuidad de las aplicaciones lineales mientras que la segunda, dada en la Proposición 1.2.1, nos indica que el espacio dual de un espacio localmente convexo separado no vacío no se reduce al elemento $\{0\}$.

Demos pues el primer resultado de esta subsección:

Teorema 1.2.2 (prolongación de la continuidad) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y W un subespacio vectorial de E. Entonces toda forma lineal continua $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ se prolonga en una forma lineal* continua $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Demostración. Como la forma lineal f es continua, por el Corolario 1.1.3, existe una familia finita de semi-normas p_i con $i \in K \subset I$ tal que $|f(x)| \leq Cp_i(x)$ para todo $x \in W$ y todo $i \in K$. Se tiene entonces por la observación 1.4 que $|f(x)| \leq p(x)$ en donde $p(x) = C\max\limits_{i\in K} p_i(x)$ es una semi-norma. Aplicamos ahora el teorema de Hahn-Banach para prolongar f a una forma lineal T definida sobre todo el espacio E y que verifica $|T(x)| \leq p(x) = C\max\limits_{i\in K} p_i(x)$ de donde se deduce la continuidad de T.■

Este teorema es bastante sorprendente y nos dice que es posible prolongar la continuidad de las aplicaciones lineales *casi* gratuitamente, pero el lector debe tener cuidado en no generalizarlo a aplicaciones que no son lineales.

Tenemos ahora un resultado de gran importancia cuando se estudia el conjunto de todas las formas lineales continuas (es decir el espacio dual) definidas sobre un espacio vectorial localmente convexo separado E. Este resultado nos dice que si el espacio E no es trivial, entonces su espacio dual E' tampoco lo es. Esto muestra que el estudio de los espacios duales merece ser tratado rigurosamente y veremos posteriormente algunas consecuencias de este hecho.

Antes de entrar en detalles, necesitaremos el lema siguiente.

Lema 1.2.3 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $x_0 \in E$ un vector y p una semi-norma definida sobre E. Entonces existe una forma lineal T sobre E tal que $T(x_0) = p(x_0)$ y tal que $|T(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Prueba. Si $x_0 = 0$ es suficiente fijar $T = 0$. Si $x_0 \neq 0$, consideramos el subespacio $W = x_0\mathbb{K}$ y definimos una aplicación sobre W escribiendo

$$\begin{array}{rcl} f : W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \alpha x_0 & \longmapsto & \alpha p(x_0). \end{array}$$

Vemos entonces que la aplicación f es una forma lineal sobre W que verifica $f(x_0) = p(x_0)$ y $|f(\alpha x_0)| = |\alpha|p(x_0) = p(\alpha x_0)$, es decir $|f(x)| = p(x)$ para todo $x \in W$. Por el teorema de Hahn-Banach, esta forma lineal f se prolonga a una forma lineal T definida sobre todo el espacio E y verifica $|T(x)| \leq p(x)$, lo que concluye la prueba. ■

Proposición 1.2.1 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y x_0 un vector no nulo de E. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) \neq 0$. En particular, si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado no reducido al conjunto $\{0\}$, entonces su espacio dual E' tampoco está reducido al conjunto $\{0\}$.*

Prueba. Sea $(p_i)_{i\in I}$ una familia de semi-normas definidas sobre E. Como el espacio E es separado, existe una semi-norma p_{i_0} tal que $p_{i_0}(x_0) \neq 0$. Utilizando el Lema 1.2.3, obtenemos la existencia de una forma lineal T sobre E tal que $T(x_0) = p_{i_0}(x_0)$ y tal que $|T(x)| \leq p_{i_0}(x)$ para todo $x \in E$. Esto muestra que la forma lineal T es continua y por lo tanto pertenece al espacio dual E', lo que termina la prueba de la proposición. ■

Presentamos una aplicación del teorema de Hahn-Banach que será importante cuando se estudie el cardinal de los espacios duales.

Proposición 1.2.2 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y sea E' su espacio dual. Se tiene que $dim(E') \geq dim(E)$. En particular, si E es de dimensión infinita, entonces el espacio dual E' también es de dimensión infinita.*

Prueba. Sea F un subespacio de E de dimensión n. Como este espacio es separado, es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ y por lo tanto el espacio dual F' también es de dimensión finita n. Sea entonces $(T_i)_{1\leq i\leq n}$ una base de F'. Por el teorema de prolongación de Hahn-Banach, existen formas lineales $\widetilde{T_i} \in E'$ que prolongan las formas lineales T_i. Estas formas lineales $\widetilde{T_i}$ son linealmente independientes: en efecto, si no lo fueran, toda dependencia en ellas se reflejaría, por restricción a F, en una dependencia en las formas lineales T_i. Esto muestra que el espacio dual E' es de dimensión mayor o igual a n. Dado que este proceso se mantiene para todo n, se deduce que si E es de dimensión finita entonces $dim(E') \geq dim(E)$ y si E es de dimensión infinita, entonces su espacio dual E' también es de dimensión infinita. ■

B) Norma de aplicaciones lineales

Pasamos ahora a la presentación de ciertos resultados que simplifican la expresión de las normas de las aplicaciones lineales dada en la Definición 1.1.11. Para empezar, la siguiente proposición nos indica que es posible prolongar una forma lineal conservando su norma.

Proposición 1.2.3 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado, W un subespacio vectorial de E y $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua de norma*

$$\|f\|_{W'} = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x\in W}} |f(x)|.$$

Entonces existe $T \in E'$ que prolonga la forma lineal f y que conserva su norma, es decir tal que $\|T\|_{E'} = \|f\|_{W'}$.

Prueba. Notemos para empezar que toda prolongación T de f verifica $\|T\|_{E'} \geq \|f\|_{W'}$ puesto que sobre W se tiene que T y f coinciden y que el supremo que interviene en el cómputo de la norma $\|T\|_{E'}$ corre sobre todo el espacio E. Notamos luego que se tiene $|f(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\|_E$ para todo $x \in W$, de manera que podemos aplicar el Teorema 1.2.1 utilizando como semi-norma $p(x) = \|f\|_{W'}\|x\|_E$. Obtenemos de esta manera una prolongación T que verifica $|T(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\|_E$. Esto muestra que la aplicación T es una forma lineal continua de norma inferior o igual a $\|f\|_{W'}$ y por la primera observación se deduce la igualdad de las normas. ■

Corolario 1.2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado.*

1) Para todo $x_0 \in E$ existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que se tiene $T(x_0) = \|x_0\|_E^2$ y $\|T\|_{E'} = \|x_0\|_E$.

2) Para todo $x_0 \in E$ existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $\|T\|_{E'} = 1$ y $T(x_0) = \|x_0\|_E$.

Prueba. Para demostrar el primer punto, empezamos considerando $W = x_0\mathbb{K}$ y definimos la forma lineal $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|_E^2$. De esta manera se tiene

$$\|f\|_{W'} = \sup_{\|\alpha x_0\|_E \leq 1} |f(\alpha x_0)| = \sup_{|\alpha|\|x_0\|_E \leq 1} |\alpha|\|x_0\|_E^2 = \|x_0\|_E.$$

Aplicamos ahora la Proposición 1.2.3 para obtener la existencia de una forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifica las dos condiciones exigidas: es decir que T coincide con f sobre W: $T(x_0) = \|x_0\|_E^2$, y además se obtiene la igualdad de las normas: $\|T\|_{E'} = \|f\|_{W'} = \|x_0\|_E$. El segundo punto se deduce de forma totalmente similar fijando $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|_E$. ■

El siguiente resultado nos permite caracterizar la norma de un vector x en un espacio normado E utilizando el espacio dual E':

Corolario 1.2.2 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Para todo $x \in E$, se tienen las fórmulas siguientes:*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{T \in E' \\ \|T\|_{E'} \leq 1}} |T(x)| = \max_{\substack{T \in E' \\ \|T\|_{E'} \leq 1}} |T(x)| \tag{1.25}$$

Prueba. Para empezar notamos que, si $x \neq 0$, entonces se tiene por la caracterización (1.16) la desigualdad $\sup\limits_{\substack{T \in E' \\ \|T\|_{E'} \leq 1}} |T(x)| \leq \|x\|_E$. Para ver la desigualdad recíproca vamos a utilizar el Corolario 1.2.1: sabemos pues que existe una forma lineal $T_0 \in E'$ tal que $T_0(x) = \|x\|_E^2$ y tal que $\|T_0\|_{E'} = \|x\|_E$. Definimos ahora $T_1 = T_0/\|x\|_E$ de manera que se tiene $\|T_1\|_{E'} = 1$ y $T_1(x) = \|x\|_E$. Esto nos permite ver que se tiene la identidad buscada y que el supremo es en realidad un máximo. ■

El lector debe tener cuidado en no confundir este resultado con la Definición 1.1.11: en este caso se estima la norma de una aplicación $T \in E'$ por medio de los vectores $x \in E$, mientras que la expresión (1.25) anterior permite calcular la norma de un vector $x \in E$ por medio de las formas lineales continuas $T \in E'$. Por un lado se tiene un supremo que no siempre es alcanzado (ver Ejercicio 1.3) mientras que por otro lado se tiene un máximo, debido a que se trabaja sobre formas lineales continuas.

Estos tres resultados precedentes son de gran utilidad cuando se trata de estimar las normas en algunos espacios funcionales tal como lo veremos posteriormente.

1.2.3. Forma geométrica

Pasamos ahora a la exposición de la versión geométrica de este resultado. Para poder enunciar con toda claridad esta versión del teorema de Hahn-Banach, será necesario recordar algunas nociones generales del álgebra lineal. Consideraremos para empezar un par de lemas con formas lineales pertenecientes al espacio $E^\star$, es decir el conjunto de formas lineales definidas sobre E (no son necesariamente continuas).

Definición 1.2.1 (Hiperplano - Hiperplano afín) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El núcleo $Ker(T)$ de una forma lineal $T \in E^\star$ no idénticamente nula es llamado un* Hiperplano *y lo notaremos $H = Ker(T)$. Un hiperplano* afín *será entonces la traslación de un hiperplano.*

Notación: En lo que sigue y por comodidad, no haremos distinción entre hiperplano e hiperplano afín.

Demos un ejemplo. Consideremos $E = \mathbb{R}^3$ y una aplicación T definida por

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z, \end{array}$$

el lector verificará sin problema que T es una aplicación lineal. Vemos entonces que el hiperplano H determinado por $H = Ker(T)$ es el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ que representa un plano en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$. La noción de hiperplano corresponde entonces a la generalización de este hecho a otras dimensiones. Basándonos en este ejemplo, vemos que otra manera de definir un hiperplano es considerando los subespacios de un espacio vectorial que son de codimensión 1, más precisamente tenemos

Lema 1.2.4 *Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $H = Ker(T)$ un hiperplano en E, en donde $T \in E^\star \setminus \{0\}$ es una forma lineal sobre E no idénticamente nula. Entonces se tiene que $H \neq E$ y, para todo vector $x_0 \in E \setminus H$, se tiene la descomposición en suma directa $E = H \oplus x_0\mathbb{K}$. Además, una vez que se ha fijado el hiperplano H y la suma directa anterior, la forma lineal T está únicamente determinada, módulo una constante multiplicativa.*

Prueba. Dado que la forma lineal $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ no es idénticamente nula, se tiene inmediatamente que $E \neq Ker(T) = H$. Sea ahora $x_0 \in E \setminus H$, podemos entonces escribir todo vector $x \in E$ de la forma

$$x = \left(\frac{T(x)}{T(x_0)}\right) x_0 - h$$

en donde $h = x - \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0$ es un elemento de H. Nótese que esta descomposición es única: si $x = \alpha x_0 + h$ con $h \in H$, se tiene necesariamente $T(x) = \alpha T(x_0) + T(h) = \alpha T(x_0)$, de donde se deduce que $\alpha = \frac{T(x)}{T(x_0)}$ y que $h = x - \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0$. Tenemos por lo tanto la descomposición en suma directa $E = H \oplus x_0\mathbb{K}$.

Para terminar, si $H = Ker(S)$ en donde $S \in E^\star \setminus \{0\}$ es otra forma lineal distinta de T, la descomposición precedente muestra que se tiene $S(x) = \big(\frac{T(x)}{T(x_0)}\big) S(x_0)$, es decir que $S = \alpha T$ en donde $\alpha = S\big(\frac{T(x)}{T(x_0)}\big)$. ■

Cuando el hiperplano no contiene el origen, una descripción simple está dada por el resultado siguiente:

Lema 1.2.5 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T \in E^\star \setminus \{0\}$. Entonces el conjunto $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$ es un hiperplano que no contiene el vector 0. Recíprocamente, si H es un hiperplano que no contiene el vector 0, entonces existe una única forma lineal T definida sobre E tal que se tenga $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$*

Prueba. Sea $T \in E^\star$ una forma lineal no idénticamente nula y sea $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$, se tiene entonces inmediatamente que $0 \notin H$. Mostremos ahora que H es un hiperplano. Como la forma lineal T no es idénticamente nula, existe un vector $x_0 \in E$ tal que $T(x_0) \neq 0$ y definimos $b = x_0/T(x_0)$ de tal manera que se tiene $T(b) = 1$. Entonces se tiene que $H = b + Ker(T)$.

Recíprocamente, por el Lema 1.2.4, sabemos que el hiperlano H puede escribirse de la forma $H = x_0 + Ker(S)$ en donde $S \in E^\star$. Si H no contiene el vector 0, se tiene que $S(x_0) \neq 0$ y se verifica entonces que $H = \{x \in E : T(x) = 1\}$ en donde $T = S/S(x_0)$.

Pasemos ahora al estudio de la unicidad de la aplicación T: supongamos que T_1 y T_2 son dos formas lineales tales que $H = \{x \in E : T_1(x) = 1\} = \{x \in E : T_2(x) = 1\}$, entonces se tiene que $T_1 = T_2$. En efecto, si existe un punto $x_0 \in E$ tal que $T_1(x_0) \neq T_2(x_0)$, se tendría por ejemplo $T_1(x_0) \neq 0$ y escribiendo $b = x_0/T_1(x_0)$ obtendríamos que $T_1(b) = 1$ y que $T_2(b) \neq 1$, lo cual es una contradicción. ■

Hemos presentado en las líneas anteriores las relaciones existentes entre hiperplanos y formas lineales generales. Estamos ahora interesados en ver algunas propiedades de los hiperplanos cuando la forma lineal que sirve para definirlos es continua. Para ello será necesario exigir cierta estructura topológica y enunciamos el siguiente resultado en el marco de los espacios localmente convexos separados.

Proposición 1.2.4 *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y T una forma lineal tal que $H = Ker(T)$. Entonces el hiperplano H es o cerrado o denso en todas partes. Además, H es cerrado si y solamente si la forma lineal T es continua.*

Prueba. Si el hiperplano H no es cerrado, existe un vector $x_0 \in \overline{H} \setminus H$. Por la continuidad de las operaciones vectoriales, la adherencia $\overline{H}$ del hiperplano H es un subespacio vectorial de E y se tiene que $\overline{H}$ contiene $H \oplus x_0\mathbb{K}$, de donde, por el Lema 1.2.4 se tiene que $\overline{H} = E$.

Si la forma lineal T es continua, entonces se tiene que el conjunto $\{x \in E : T(x) = 0\}$ es cerrado por ser la imagen recíproca de un cerrado. Recíprocamente, suponemos ahora que H es un conjunto cerrado y para mostrar la continuidad de la forma lineal T vamos a utilizar la caracterización de esta propiedad dada en el Corolario 1.1.3. La continuidad es inmediata si se tiene que T es idénticamente nula, de manera que podemos asumir que existe un punto x_0 tal que $T(x_0) = 1$, una semi-norma p y un real $r > 0$ tal que $T(x) \neq 0$ sobre la semi-bola $B_{r,p}(x_0) = \{x \in E : p(x - x_0) < r\}$. Se obtiene entonces que $|T(x)| < 1$ sobre $B_{r,p}(x_0)$, de donde se deduce que $|T(x)| \leq r^{-1}p(x)$ y esto implica la continuidad de la forma lineal T. ■

Podemos ahora presentar con toda comodidad la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.2.3 (Hahn-Banach, forma geométrica) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, $B \subset E$ un conjunto abierto convexo, no vacío, y M un subespacio afín que no intersecta B, es decir $M \cap B = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano cerrado H que contiene M y que no intersecta B: se tiene $M \subset H$ y $H \cap B = \emptyset$.*

Demostración. De la misma manera que en su forma analítica, descomponemos la demostración de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach en dos partes.

A) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Por medio de una traslación podemos suponer que el conjunto convexo B contiene el origen. El subespacio afín M se escribe entonces $M = x_0 + V$ en donde V es un subespacio vectorial de E y $x_0 \in E$ es un vector que no pertenece a V puesto que el origen no pertenece a M. Consideremos ahora el subespacio vectorial $W = V \oplus x_0\mathbb{R}$, se tiene entonces que M es un hiperlano de W y por lo tanto, aplicando el Lema 1.2.5, existe una forma lineal $T : W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M = \{x \in W : T(x) = 1\}$. Una vez que tenemos esta aplicación lineal T, vamos a mayorarla por una semi-norma y para ello necesitaremos utilizar las propiedades de la funcional de Minkowski (que es una semi-norma) cuya definición recordamos rápidamente[13]: sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado, a todo conjunto $B \subset E$ convexo, abierto con $0 \in B$, se le asocia la funcional de Minkowski por: $p_B(x) = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda^{-1}x \in B\}$.

Vamos a mostrar que se tiene $T(x) \leq p_B(x)$ sobre el conjunto W. Dado que la funcional p_B es positiva, es suficiente estudiar el conjunto de puntos $x \in W$ que verifican $T(x) > 0$. Para estos puntos definimos $y = x/T(x)$ de manera que $T(y) = 1$: se tiene por lo tanto que $y \in M$ y por hipótesis se obtiene que $y \notin B$. Se deduce entonces de la definición de la funcional de Minkowski que $p_B(y) \geq 1$; es decir que $T(x) \leq p_B(x)$. Aplicamos ahora el teorema de Hahn-Banach 1.2.1

[13] véase la Definición 1.3.7 y la Proposición 1.3.4 del Volumen 1.

para obtener la existencia de una forma lineal $\hat{T}$, definida sobre todo el espacio E, que prolonga la forma lineal T inicialmente definida sobre $W \subset E$ y que verifica $\hat{T}(x) \leq p_B(x)$. Entonces, el hiperlano $H = \{x \in E : \hat{T}(x) = 1\}$ es un hiperlano que contiene M y que no intersecta el convexo B puesto que $p_B(x) < 1$ para todo $x \in B$.

Para terminar, debemos verificar que el hiperlano H es cerrado. Como el conjunto convexo B es abierto, el hiperplano H no es denso en E y es por lo tanto cerrado por la Proposición 1.2.4.

B) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: De la misma manera, por traslación es necesario considerar únicamente el caso cuando el conjunto M contiene el origen. Por la primera parte existe una forma lineal real S tal que el hiperplano real K de ecuación $S(x) = 0$ contiene M y no intersecta B. Utilizando el Lema 1.2.2 podemos construir una forma lineal compleja escribiendo $T(x) = S(x) - iS(ix)$ y de esta manera el hiperlano complejo H de ecuación $T(x) = 0$ está contenido en K y por lo tanto no intersecta B. Verifiquemos ahora que $M \subset H$. Sea $x \in M$, entonces $ix \in M$ y, dado que K contiene M, se tiene que $S(x) = S(ix) = 0$. De esto se deduce que $T(x) = 0$ y por lo tanto que $x \in H$. Finalmente, por las mismas razones expuestas en la parte A), este hiperlano no puede ser denso en todas partes y por lo tanto es un hiperplano cerrado.

■

Observación 1.16 La hipótesis exigida sobre el conjunto B de ser un conjunto abierto, es muy importante. En efecto si en $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto convexo cerrado $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x; 0 \leq y; z^2 \leq xy\}$ y la recta D de ecuación $x = 0$ y $z = 1$, vemos entonces que todo hiperplano que pasa por la recta D tiene una intersección no nula con B.

1.2.4. Aplicación a la separación de conjuntos y a un resultado de densidad

Para terminar nuestro estudio sobre la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, vamos a exponer inmediatamente dos hechos importantes. El primero punto que presentamos está relacionado con la separación de conjuntos convexos mientras que el segundo tiene que ver con algunas propiedades de densidad.

A) Separación de conjuntos convexos

Vamos a presentar en esta subsección cómo -y en qué sentido- la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach permite *separar* conjuntos convexos. Es necesario insistir que este tipo de resultados son válidos únicamente en el caso cuando los espacios vectoriales considerados son reales: en efecto, será necesario comparar por medio de desigualdades ciertas cantidades y esto nos obliga a trabajar sobre $\mathbb{R}$. Indiquemos sin embargo que es posible generalizar de una forma particular estos resultados al caso complejo, pero para ello es necesario realizar una pequeña manipulación que será presentada a su debido tiempo.

Para empezar necesitaremos una definición. Hemos visto con el Lema 1.2.5 que una forma lineal permite caracterizar de forma simple los hiperplanos. Vamos a ver ahora cómo ir un paso más adelante utilizando esta caracterización.

Definición 1.2.2 (Separación de conjuntos) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. El hiperplano cerrado $H = \{x \in E : T(x) = c\}$ divide entonces el espacio E en dos subespacios $E_1 = \{x \in E : T(x) \geq c\}$ y $E_2 = \{x \in E : T(x) \leq c\}$.*

1) *Dos subconjuntos A, B de E están* separados en el sentido amplio *por un hiperplano cerrado H si A está contenido en el subespacio E_1 y B está contenido en el subespacio E_2.*

2) Dos subconjuntos A, B de E están separados en el sentido estricto *por un hiperplano cerrado H si existe $\varepsilon > 0$ tal que A está contenido en el subespacio $E_1' = \{x \in E : T(x) \geq c + \varepsilon\}$ y B está contenido en el subespacio $E_2' = \{x \in E : T(x) \leq c - \varepsilon\}$.*

Las figuras a continuación muestran estas dos situaciones.

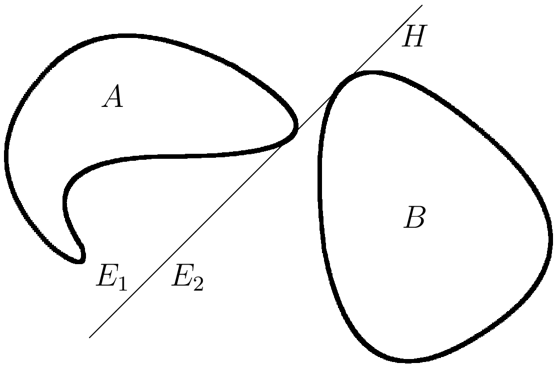

Figura 1.1: separación de conjuntos en el sentido amplio

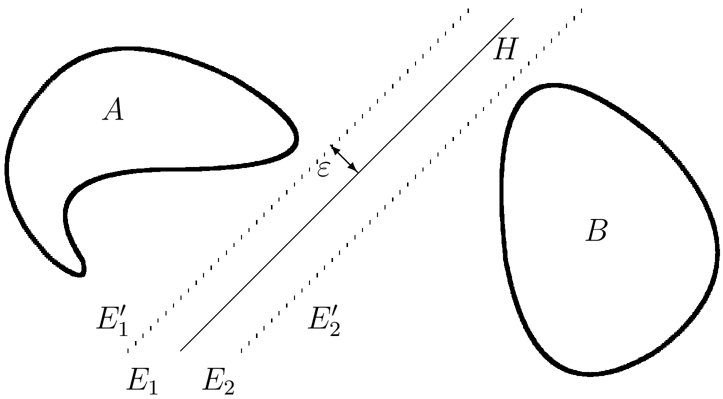

Figura 1.2: separación de conjuntos en el sentido estricto

Cuando los conjuntos A y B son no son convexos (como es el caso del conjunto A en las dos figuras anteriores), no siempre es posible encontrar un hiperplano que separe estos conjuntos. Sin embargo, cuando estos conjuntos son convexos podemos utilizar la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach de tal forma que *siempre* se puede exhibir un hiperplano que los separe.

Los dos corolarios que siguen muestran esta situación con más precisión.

Corolario 1.2.3 (Teorema de Eidelheit) [14] *Sea $(E, (p_i)_{i \in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos además que A es abierto. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E' \setminus \{0\}$ y un número real c tal que*

$$T(x) < c \leq T(y), \quad \text{para todo } x \in A, y \in B.$$

Dicho de otra manera, si los conjuntos A y B verifican las hipótesis del corolario, entonces A y B están separados en el sentido amplio por el hiperplano $H = \{x \in E : T(x) = c\}$.

[14] Max Eidelheit (1911-1943), matemático polaco.

Prueba. Es suficiente aplicar la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach 1.2.3 tomando como conjunto convexo abierto $A - B$ (en vez del conjunto convexo B) y como subespacio $M = \{0\}$. Se obtiene de esta manera una forma lineal continua T tal que los conjuntos $T(A)$ y $T(B)$ son disjuntos puesto que $T(A - B) \neq 0$. Modificando, de ser necesario, T en $-T$ se tiene entonces

$$\sup_{x\in A} T(x) \leq \inf_{y\in B} T(y).$$

Si definimos ahora $c = \inf_{y\in B} T(y)$ se tiene en particular la estimación $T(x) \leq c \leq T(y)$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Finalmente, como los conjuntos A y B no son vacíos, tenemos que $-\infty < c < +\infty$ y, dado que el conjunto A es abierto, la desigualdad $T(x) \leq c$ se convierte en la estimación estricta buscada. ■

Corolario 1.2.4 (Teorema de Tukey) [15] *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos además que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe una forma lineal continua $T \in E' \setminus \{0\}$ y dos números reales $c_1 < c_2$ tales que*

$$T(x) \leq c_1 < c_2 \leq T(y), \quad \textit{para todo } x \in A, y \in B.$$

Dicho de otra manera, si los conjuntos A y B verifican las hipótesis del corolario, entonces A y B están separados en el sentido estricto por el hiperplano $H = \{x \in E : T(x) = c\}$.

Prueba. Como por hipótesis el conjunto A es cerrado, cada punto y de B es el centro de semi-bolas $B_y = B_{r,p}(y)$ tales que $B_y \cap A = \emptyset$ y se tiene que la unión de este tipo de semi-bolas recubre el conjunto B. Al ser el conjunto B un conjunto compacto, se tiene

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{y_j}.$$

Definimos ahora una nueva semi-norma p escribiendo $p = p_1 + ... + p_n$, en donde las semi-normas p_j son las semi-normas que sirvieron para definir las semi-bolas B_{y_j}, y fijamos $r = 2^{-1}\min\{r_1, ...r_n\}$, en donde r_j son los radios de las semi-bolas B_{y_j}.

A partir de esta nueva semi-norma p formamos el conjunto $U = B_{r,p}$ de manera que los conjuntos $A+U$ y $B+U$ son dos conjuntos convexos disjuntos tales que $A \subset A+U$ y $B \subset B+U$. En este punto aplicamos el Corolario 1.2.3 anterior para obtener una forma lineal continua $T \in E'$ y un número real c tales que $T(x) < c \leq T(y)$ para todo $x \in A+U$ y $y \in B+U$. A partir de este hecho tenemos

$$T(x) + \sup_{x\in U}|T(x)| \leq c \leq T(y) - \inf_{x\in U}|T(x)|$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Finalmente, se tiene que $r = \sup_{x\in U}|T(x)| > 0$ puesto que la forma lineal T no es idénticamente nula y de esta manera se obtiene el resultado deseado con $c_1 = c-r$ y $c_2 = c+r$.

■

La versión general de estos dos resultados está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.2.4 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sean $A, B \subset E$ dos conjuntos disjuntos, no vacíos y convexos.*

[15] John Tukey (1915-2000), matemático norteamericano.

1) *Si A es abierto, existe una forma lineal $T \in E'$ y un real c tal que*

$$\Re e(T(x)) < c \leq \Re e(T(y))$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

2) *Si adicionalmente A es compacto y B es cerrado, entonces existe una forma lineal $T \in E'$ y dos reales $c_1 < c_2$ tales que*

$$\Re e(T(x)) < c_1 < c_2 < \Re e(T(y))$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

La pequeña manipulación anunciada consiste en tomar la parte real de las formas lineales que aparecen en el teorema. En particular, la generalización está dada en el sentido que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\Re e(T) = T$ y de esta forma se obtienen los dos resultados anteriores.

Demostración. Este caso general es una consecuencia de los corolarios 1.2.3, 1.2.4 y del Lema 1.2.2. En efecto, una vez que se tiene el caso real, se obtiene una forma lineal real S definida sobre E que verifica las condiciones de los puntos del teorema. Aplicamos entonces el Lema 1.2.2 para obtener una forma lineal compleja T tal que $\Re e(T) = S$. ∎

Este resultado tiene como corolario un concepto que será de gran utilidad en el futuro.

Corolario 1.2.5 (Separación de puntos) *Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, entonces el conjunto de formas lineales continuas E' separa los puntos de E.*

Prueba. Sean pues $x_1, x_2 \in E$ dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$. Basta aplicar el segundo punto del teorema anterior con $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$ para obtener la existencia de una forma lineal continua T tal que $T(x_1) \neq T(x_2)$. ∎

B) Problemas de aproximación

A continuación presentamos un resultado que relaciona la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach con la densidad de un subconjunto. En efecto, vamos a ver cómo caracterizar una propiedad topológica, como es la propiedad de densidad, por medio de formas lineales continuas. Este punto es particularmente interesante pues da una primera muestra de cómo las herramientas de base de este capítulo -que son las aplicaciones lineales continuas- proporcionan un punto de vista distinto para estudiar propiedades topológicas generales.

El siguiente resultado nos da una primera idea de cómo lograr este objetivo.

Proposición 1.2.5 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea M un subespacio de E. Si $x_0 \in E$ no pertenece a la cerradura de M, entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) = 1$ y tal que $T(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Prueba. Empecemos notando que todo subespacio vectorial es un conjunto convexo. Luego, aplicamos el segundo punto del Teorema 1.2.4 con $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{M}$. Obtenemos entonces una forma lineal continua T tal que $T(x_0)$ y $T(\overline{M})$ son dos conjuntos disjuntos. Dado que M es un subespacio de E se tiene que $T(M)$ es un subespacio propio de $\mathbb{K}$ y esto implica que $T(M) = \{0\}$ y por lo tanto que $T(x_0) \neq 0$. Para obtener el resultado deseado, basta dividir la forma lineal T por la cantidad $T(x_0)$. ∎

Esto muestra que, para mostrar que un punto x_0 pertenece a la cerradura de subespacio M de un espacio localmente convexo separado E, basta verificar que $T(x_0) = 0$ para toda forma lineal continua

$T \in E'$ que se anula sobre M. Para sacar más provecho de esta idea necesitaremos la noción de conjuntos ortogonales.

Definición 1.2.3 (Conjunto Ortogonal) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y sea E' su espacio dual.*

1) *Sea $D \subset E$ un subconjunto, definimos el* conjunto ortogonal *de D, notado $D^\perp$, como el conjunto de todas las formas lineales continuas $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que se anulan para todo punto $x \in D$, es decir*
$$D^\perp = \{T \in E' : T(x) = 0, \quad \textit{para todo } x \in D\}$$

2) *Sea $\Delta \subset E'$ un subconjunto, definimos el conjunto ortogonal de Δ, notado $\Delta^\perp$, como el conjunto de los vectores $x \in E$ que anulan todas las formas lineales $T \in \Delta$, es decir*
$$\Delta^\perp = \{x \in E : T(x) = 0, \quad \textit{para todo } T \in \Delta\}$$

Nótese que $D^\perp \subset E'$ y que $\Delta^\perp \subset E$.

Vemos muy rápidamente, a modo de ejemplo, que $E^\perp = \{T \equiv 0\}$ y que $E'^\perp = \{0\}$. Tendremos la oportunidad de ver otros ejemplos mucho más interesantes en lo que sigue.

Pasemos, pues, al resultado de aproximación anunciado en las líneas anteriores.

Corolario 1.2.6 (Un resultado de densidad) *Sean $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio localmente convexo separado y D un subespacio de E. Entonces:*

1) *La adherencia $\overline{D}$ del conjunto D coincide con el conjunto $(D^\perp)^\perp$.*

2) *El subespacio D es denso en E si y solo si $D^\perp = \{0\}$.*

Prueba. Para empezar la primera parte observamos que $(D^\perp)^\perp = \{x \in E : T(x) = 0, \ \forall T \in D^\perp \subset E'\}$ y vamos a demostrar que $\overline{D} \subset (D^\perp)^\perp$ y que $(D^\perp)^\perp \subset \overline{D}$.

Para la primera inclusión fijamos un punto $x_0 \in \overline{D}$, luego, si $T \in E'$ es una forma lineal que se anula sobre D (es decir que $T \in D^\perp$), entonces por continuidad de T se tiene que $T(x_0) = 0$ de donde se obtiene que $x_0 \in (D^\perp)^\perp$. Para la segunda inclusión procedemos por una reducción al absurdo: sea pues $x_0 \in (D^\perp)^\perp$ tal que $x_0 \notin \overline{D}$. Consideramos entonces el subespacio vectorial $W = \overline{D} \oplus x_0\mathbb{K}$, de manera que $\overline{D}$ es un hiperplano cerrado de W. Tenemos pues, por el Lema 1.2.4, la existencia de una forma lineal continua $T : W \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\overline{D} = Ker(T)$ y tal que $T(x_0) \neq 0$. Esta forma lineal T se prolonga en una forma lineal continua $\hat{T}$, definida sobre todo el espacio E, que verifica $\hat{T}(x_0) \neq 0$, lo cual es una contradicción con el hecho que $x_0 \in (D^\perp)^\perp$.

La segunda parte del corolario se deduce inmediatamente del primer punto: en efecto, si $\overline{D} = E$ y si $T \in E'$ es una forma lineal que se anula sobre D, por continuidad T se anula sobre $\overline{D} = E$ y es por lo tanto idénticamente nula, es decir $D^\perp = \{0\}$. Recíprocamente, si $D^\perp = \{0\}$ y si $x_0 \notin \overline{D}$, siguiendo las etapas explicitadas en la primera parte, se obtiene una forma lineal $\hat{T}$ definida sobre todo el espacio E tal que $\hat{T}(D) = 0$ pero tal que $\hat{T}(x_0) \neq 0$, de manera que el conjunto ortogonal de D no está reducido al elemento cero, obteniendo de esta forma la contradicción buscada. ∎

Observación 1.17 El punto 2) es muy utilizado en la práctica: es, a menudo, más sencillo verificar que el ortogonal de un conjunto está reducido al elemento cero que comprobar que un conjunto es denso en otro por medio de los cálculos topológicos básicos.

Con esto hemos terminado nuestra exposición sobre los teoremas de Hahn-Banach. Veremos en las secciones siguientes cómo aplicarlos en diversas situaciones, lo que ejemplificará aún más su utilidad e importancia.

1.3. Teoremas clásicos del análisis funcional

En esta sección hacemos una presentación de los teoremas más relevantes del análisis funcional, como son los teoremas de la aplicación abierta, del grafo cerrado y el teorema de Banach-Steinhaus. Estos resultados son totalmente indispensables para el estudio que nos proponemos hacer de los espacios de Lebesgue y de Lorentz.

Empezaremos recordando algunas definiciones relacionadas al lema de Baire[16] para luego ver las aplicaciones de este importante resultado a los teoremas clásicos del análisis funcional.

Definición 1.3.1 (Espacio de Baire) *Sea E un espacio topológico. Diremos que E es un* espacio de Baire *si toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos en E es densa en E.*
Es decir si

$$(\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de abiertos de } E); (\forall n \in \mathbb{N} : \overline{A_n} = E), \text{ se tiene } \overline{\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = E.$$

Considerando conjuntos cerrados tenemos la caracterización equivalente siguiente: el espacio topológico E es un espacio de Baire si la unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío en E es de interior vacío en E. Es decir si

$$(\forall (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de cerrados de } E), (\forall n \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{C_n} = \emptyset), \text{ se tiene } \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}} = \emptyset.$$

Demos un ejemplo de espacio de Baire: consideremos el conjunto de los números reales del cual se quita el conjunto de números racionales, es decir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: utilizando la caracterización de los espacios de Baire que se basa sobre el interior de conjuntos cerrados, no es difícil ver que el espacio $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es efectivamente un espacio de Baire.

Definición 1.3.2 (Conjunto residual, conjunto magro) *Sean E un espacio topológico de Baire y sea A un subconjunto de E. Diremos que*

1) el conjunto A es residual *si contiene una intersección numerable de abiertos densos en E.*

2) el conjunto A es magro[17] *si está contenido una reunión numerable de cerrados de interior vacío en E.*

Nótese que estas dos definiciones son complementarias en el sentido que un conjunto A es magro si y solo si A^c es residual. Así por ejemplo, vemos que $\mathbb{Q}$ es magro en $\mathbb{R}$ y por lo tanto se tiene que $\mathbb{Q}^c = \mathbb{I}$ es residual en $\mathbb{R}$.

Observación 1.18 Se suele encontrar en la literatura matemática la siguiente correspondencia:

1) conjunto magro $\Leftrightarrow$ conjunto de primera categoría,

2) conjunto residual $\Leftrightarrow$ conjunto de segunda categoría.

Podemos ahora enunciar dos resultados de gran utilidad.

Teorema 1.3.1 (Lema de Baire) *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

---

[16] René-Louis Baire (1874-1932), matemático francés, alumno de la Ecole Normale Supérieure.
[17] también llamado conjunto “flaco”.

Demostración. Sean pues (E, d_E) un espacio métrico completo, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos densos en E y A un abierto no vacío. Se trata entonces de verificar que se tiene $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Vamos a construir, razonando por recurrencia, una sucesión de bolas abiertas $B_n = B(x_n, r_n)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga las siguientes condiciones:

- $\overline{B}_0 \subset A$, y $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$,
- $r_n \geq r_{n+1} > 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

En efecto: dado que el abierto A no es vacío, existe una bola B_0 tal que se tenga $\overline{B}_0 \subset A$. Como A_0 es denso en E se tiene que $B_0 \cap A_0$ no es vacío y por lo tanto existe una bola B_1 tal que $\overline{B}_1 \subset B_0 \cap A_0$. De la misma manera, dado que los abiertos A_n son densos en E, el abierto $B_n \cap A_n$ no es vacío y existe una bola abierta B_{n+1} tal que $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$. Para los radios, es suficiente notar que siempre se puede fijar $r_n \geq 2r_{n+1}$ para obtener la segunda condición. De esta manera, por recurrencia, obenemos la existencia de una tal sucesión de bolas abiertas B_n. Ahora, como el espacio métrico es completo y que la sucesión $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos cuyo diámetro tiende hacia 0, se tiene que la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n$ está reducida a un punto. En efecto, de cada uno de los conjuntos cerrados $\overline{B}_n$ se puede escoger un punto x_n tal que $x_n \in \overline{B}_n$ y tal que $x_n \notin \overline{B}_{n+1}$. De esta manera se construye una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E que es de Cauchy por la definición de los radios r_n de las bolas consideradas. Como el espacio métrico es completo, esta sucesión converge hacia un solo punto.

Finalmente observamos que, por construcción, tenemos la inclusión $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \subset A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y podemos concluir que el conjunto $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ no es vacío. Hemos mostrado que la intersección de todo abierto no vacío de E tiene una intersección con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ lo que termina la demostración. ■

Corolario 1.3.1 *Sea E un espacio de Baire y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados de E tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{A}_n$ es un abierto denso en E.*

Prueba. Consideremos el conjunto $C = E \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{A}_n)$. Se tiene entonces, sin mayor problema, que C es cerrado y debemos mostrar que es de interior vacío. Para ello notamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto cerrado $C \cap A_n$ es de interior vacío pues $\overset{\circ}{\overbrace{C \cap A_n}} \subset C \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$. Observamos ahora que se tiene la fórmula

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C \cap A_n = C \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = C \cap E = C,$$

y, como E es un espacio de Baire, tenemos que el conjunto C es de interior vacío. ■

Pasamos ahora a las aplicaciones del lema de Baire en el análisis funcional.

1.3.1. Teorema de la aplicación abierta

El primer teorema que estudiamos relaciona aplicaciones lineales continuas y aplicaciones abiertas. Antes de entrar en los detalles damos la siguiente definición en el marco general de los espacios métricos.

Definición 1.3.3 (Aplicación abierta, Aplicación sobreyectiva) *Sean E y F dos espacios topológicos.*

1) *Una aplicación $T : E \longrightarrow F$ es* abierta *si, para todo abierto A de E se tiene que $T(A)$ es un abierto en F.*

2) Una aplicación $T : E \longrightarrow F$ es sobreyectiva *si todo elemento de F posee al menos un antecedente en E.*

El primer resultado que presentamos concierne las aplicaciones lineales abiertas.

Proposición 1.3.1 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales localmente convexos separados metrizables. Si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal abierta, entonces T es sobreyectiva.*

Prueba. Esto se deduce del hecho que F es el único subespacio vectorial abierto de F. En efecto, dado que T es una aplicación abierta, se tiene que el conjunto $W = T(E)$ es un abierto para la topología de F; y, como la aplicación T es lineal, se tiene además que W es un subespacio vectorial de F. Como el interior de W no es vacío, existe un punto $y_0 \in W$ tal que W es una vecindad de y_0 y por traslación se obtiene que W es también una vecindad del origen y es un conjunto absorbente en F: es decir que para todo $y \in F$ existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}y \in W$ de donde se deduce que $W = F$. ■

Recuérdese que una aplicación continua no es necesariamente abierta: basta considerar para ello una función constante $\varphi : x \longmapsto c$ definida sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, cuando se trabaja con aplicaciones lineales continuas, se tiene el importante resultado a continuación:

Teorema 1.3.2 (de la aplicación abierta) *Sean $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio de Fréchet y $(F, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado metrizable. Notaremos respectivamente d_E y d_F las distancias invariantes por traslación asociadas a las topologías de espacios localmente convexos separados metrizables de E y F.*

1) Si $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua, entonces o $T(E)$ es magro o T es una aplicación abierta.

2) Si F es un espacio de Baire, entonces toda aplicación lineal continua sobreyectiva $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación abierta.

Necesitaremos el siguiente lema para la demostración de este resultado.

Lema 1.3.1 *Sean $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio de Fréchet, $(F, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado metrizable y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua tal que:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[B_F(0, \delta) \subset \overline{T(B_E(0, \varepsilon))}], \tag{1.26}$$

entonces T es una aplicación abierta.

Prueba. Observamos para empezar que, por traslación, la hipótesis anterior se reescribe como

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in E)[B_F(a, \delta) \subset \overline{T(B_E(a, \varepsilon))}].$$

Sean $\varepsilon_0 > 0$ y $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos tales que $\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n < \varepsilon_0$. Por la hipótesis podemos construir una sucesión $(\delta_n)_{n\geq 1}$ de números estrictamente positivos tal que, para todo $a \in E$ y todo $n \geq 1$ se tenga

$$B_F(a, \delta_n) \subset \overline{T(B_E(a, \varepsilon_n))} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0. \tag{1.27}$$

Sea ahora $y \in B_F(0, \delta_0)$, vemos que es posible construir por recurrencia una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de E tal que $x_0 = 0$ y tal que

$$d_E(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n \quad \text{y} \quad d_F(y, T(x_{n+1})) < \delta_{n+1} \tag{1.28}$$

para todo $n \geq 1$. En efecto, por (1.27) tenemos que el punto y es un punto de adherencia de $\overline{T(B_E(0,\varepsilon_n))}$ y por lo tanto la intersección $B_F(y,\delta_1) \cap T(B_E(0,\varepsilon_0))$ no es vacía: existe entonces $x_1 \in E$ tal que $d_E(0,x_1) < \varepsilon_0$ y $d_F(y,T(x_1)) < \delta_1$ y de esta forma tenemos (1.28) para $n = 0$. Por recurrencia, si $d_F(y,T(x_n)) < \delta_n$, utilizando (1.27) con $a = x_n$ tenemos que la intersección $B_F(y,\delta_{n+1}) \cap T(B_E(x_n,\varepsilon_n))$ no es vacía de donde se obtiene un punto $x_n \in E$ que verifica (1.28).

Observamos ahora que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que acabamos de construir es una sucesión de Cauchy puesto que se tiene $d_E(x_p,x_q) \leq \sum_{n=p}^{q+p} \varepsilon_n$, y entonces, como el espacio E es un espacio de Fréchet, se tiene que el límite de esta sucesión pertenece a E y lo notaremos x. Tenemos en particular que $d_E(0,x_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \leq 2\varepsilon_0$ y, utilizando (1.28) obtenemos que $d_F(y,T(x_{n+1})) < \delta_{n+1}$, por lo tanto, dado que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ se tiene que $y = T(x)$. Dicho de otra manera, para todo punto $y \in B_F(0,\delta_0)$ hemos construido un punto $x \in B_E(0,2\varepsilon_0)$ tal que $y = T(x)$. Esto prueba que, para todo $\varepsilon_0 > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B_F(0,\delta_0) \subset T(B_E(0,2\varepsilon_0))$. Para terminar consideremos A un abierto de E y $a \in A$, existe entonces $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_E(a,2\varepsilon_0) \subset A$, de donde se deduce que

$$T(A) \supset T(B_E(a,2\varepsilon_0)) = T(a) + T(B_E(0,2\varepsilon_0)) \supset T(a) + B_F(0,\delta_0)$$

lo que muestra que $T(A)$ es una vecindad de $T(a)$: se deduce que $T(A)$ es un conjunto abierto. ■

Con este resultado preliminar podemos empezar la demostración del Teorema 1.3.2:

Demostración.

1) Supongamos que $T(E)$ no es magro. Debemos verificar (1.26) para poder aplicar el Lema 1.3.1. Sea $V = B_E(0,\varepsilon/2)$ para algún $\varepsilon > 0$, tenemos entonces que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nW$. Como la aplicación T es lineal, se tiene $T(E) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nT(V)$ y como hemos supuesto que $T(E)$ no es magro, uno de los conjuntos $\overline{nT(V)} = n\,\overline{T(V)}$ es de interior no vacío, de donde se deduce que el conjunto $\overline{T(V)}$ es de interior no vacío: existe por lo tanto un punto $x_0 \in F$ y un real $\delta > 0$ tales que $B_F(x_0,\delta) \subset \overline{T(V)}$.

   Dado que estamos trabajando sobre un espacio vectorial topológico F, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : F \times F &\longrightarrow F \\ (x,y) &\longrightarrow x - y \end{aligned}$$

   es una aplicación continua y podemos adoptar la notación $A - B = \varphi(A,B)$ en donde $A, B \subset F$. Se tiene en particular la inclusión $B_F(0,\delta) \subset B_F(x_0,\delta) - B_F(x_0,\delta)$ puesto que todo elemento $x \in B_F(0,\delta)$ se puede escribir como $x = (x + x_0) - x_0$ en donde $x + x_0 \in B_F(x_0,\delta)$ y $x_0 \in B_F(x_0,\delta)$. De esta manera, utilizando la continuidad de la aplicación φ, podemos escribir

$$B_F(0,\delta) \subset \overline{T(V)} - \overline{T(V)} \subset \overline{T(V) - T(V)} = \overline{T(V - V)}$$

   en este punto, basta observar que se tiene la inclusión $V - V \subset B_E(0,\varepsilon)$ y de esta forma se tiene la inclusión buscada, es decir $B_F(0,\delta) \subset \overline{T(B_E(0,\varepsilon))}$. Podemos aplicar entonces el Lema 1.3.1 y obtenemos que la aplicación T es abierta.

2) Si F es un espacio de Baire y si T es una aplicación sobreyectiva, entonces $T(E) = F$ no es un conjunto magro, pues es de interior no vacío, de donde se deduce, por la primera parte que T es una aplicación abierta. ■

Conviene tener a la mano un enunciado menos general del teorema de la aplicación abierta en donde solo intervienen espacios de Banach:

Teorema 1.3.3 (de la aplicación abierta) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Si T es sobreyectiva, entonces T es una aplicación abierta.*

Este importante resultado tiene como consecuencia los siguientes puntos.

Corolario 1.3.2 (Teorema del isomorfismo de Banach)

1) Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios de Fréchet. Si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua sobreyectiva, entonces $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es una aplicación continua. Dicho de otra manera, toda biyección lineal y continua de E sobre F es un isomorfismo.

2) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son dos espacios de Banach y si $T : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua biyectiva, entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq C_2\|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

3) Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías de espacio vectorial definidas sobre un mismo espacio E tales que se tenga la inclusión $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Si $(E, \mathcal{T}_1)$ y $(E, \mathcal{T}_2)$ son dos espacios de Fréchet, entonces se tiene la identidad $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Prueba.

1) Si la aplicación $T : E \longrightarrow F$ es lineal, continua y sobreyectiva entonces por el Teorema 1.3.2 es una aplicación abierta, de donde se deduce inmediatamente que la aplicación $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es una aplicación continua pues la imagen recíproca de todo abierto es un abierto.

2) Basta aplicar el punto 1) cuando E y F son espacios de Banach y utilizar la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales dadas en las fórmulas (1.9) y (1.13).

3) Por el primer punto tenemos que toda biyección lineal continua de E sobre F es un isomorphismo. Basta entonces aplicar este resultado a la aplicación identidad Id definida sobre $(E, \mathcal{T}_2)$ a valores en $(E, \mathcal{T}_1)$ para obtener la identidad entre estas dos estructuras topológicas. ■

Este corolario es de gran utilidad para comparar diferentes estructuras definidas sobre un mismo espacio topológico. Ver un ejemplo de aplicación en el Ejercicio 1.9.

1.3.2. Teorema del grafo cerrado

Vamos a presentar ahora un criterio muy sencillo para estudiar la continuidad de las aplicaciones lineales y vamos a ver que este resultado es una consecuencia de los resultados demostrados en la sección anterior. Para poder enunciar correctamente este criterio necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.3.4 (Grafo de una aplicación) *Sean E y F dos conjuntos y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación. El* grafo *de la aplicación T es el subconjunto Gr_T del producto cartesiano $E \times F$ determinado por*

$$\mathrm{Gr}_T = \big\{(x, y) \in E \times F : \; y = T(x)\big\}.$$

Esta definición es bastante general y en el enunciado del teorema a continuación consideramos directamente conjuntos dotados de una estructura topológica.

Teorema 1.3.4 (del grafo cerrado) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios de Fréchet y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces T es continua si y solo si el grafo Gr_T de T es cerrado en $E \times F$.*

Demostración. Mostremos para empezar que si T es una aplicación continua entonces el grafo Gr_T de T es un conjunto cerrado del espacio $E \times F$ dotado de la topología producto usual. Vamos para ello mostrar que el complemento A en $E \times F$ del conjunto Gr_T es un conjunto abierto. Sea pues $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene que $y_0 \neq T(x_0)$ y por lo tanto y_0 y $T(x_0)$ poseen vecindades V y W disjuntas (recuérdese que un espacio de Fréchet es un espacio métrico y por lo tanto es un espacio separado). Como la aplicación T es continua, el punto x_0 tiene una vecindad U tal que $T(U) \subset W$. Se tiene entonces que la vecindad $U \times V$ del punto (x_0, y_0) está contenida en A, de donde se deduce que A es abierto.

Recíprocamente, mostremos que si el grafo Gr_T de T es cerrado en $E \times F$, entonces la aplicación T es continua. Observemos pues que si Gr_T es un subconjunto cerrado del espacio de Fréchet $E \times F$, entonces se tiene que Gr_T es un espacio de Fréchet. Notemos ahora que la proyección $\pi_1 : Gr_T \longrightarrow E$ induce una biyección lineal continua, y es por lo tanto un isomorfismo por el primer punto del Corolario 1.3.2. Se tiene, para $x \in E$, que $\pi_1^{-1} = (x, T(x))$ de donde $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, de manera que, por composición, la aplicación T es continua. ∎

Observación 1.19 Exigir que el grafo de la aplicación T sea cerrado es equivalente a exigir que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = y,$$

entonces se tiene la identidad $y = T(x)$.

Este teorema hace la verificación de la continuidad más sencilla puesto que se dispone de una hipótesis adicional: suponemos que la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Observemos además que por la linealidad de la aplicación T podemos suponer que el punto límite x es el origen. En este caso, pedir que Gr_T sea cerrado se escribe: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = y$; entonces se tiene la identidad $y = 0$: el problema de la continuidad se resume entonces al estudio de la convergencia de una sucesión.

1.3.3. Teorema de Banach-Steinhaus y Principio de Acotación Uniforme

El principio de acotación uniforme nos proporciona un criterio bastante sencillo para estudiar la continuidad del límite simple una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones lineales continuas. Recordemos que en el marco de los espacio métricos, el paso al límite de la convergencia simple no conserva la continuidad y que para mantener esta propiedad es necesario utilizar la convergencia uniforme. En el caso de las aplicaciones lineales continuas, será el principio de acotación uniforme quien nos dará el marco adecuado para pasar al límite en el sentido de la convergencia simple y conservar la propiedad de continuidad. Como veremos en esta sección, este importante resultado será una consecuencia directa del teorema de Banach-Steinhaus[18].

Vamos a empezar esta subsección presentando un ejemplo en dónde la propiedad de continuidad de una familia de aplicaciones lineales se pierde[19] al pasar al límite cuando se utiliza la convergencia simple.

Sea pues E el espacio formado por todas las funciones polinomiales definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$, dotado de la norma de la convergencia uniforme $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Definimos

[18] Hugo Steinhaus (1887-1972), matemático polaco.

[19] ver también el ejemplo dado al final de la Sección 1.1.2 del Volumen 1. ¿Cuál es la principal diferencia entre estos dos ejemplos?

ahora, para todo $n \geq 1$, las aplicaciones $T_n(f) = n(f(1/n) - f(0))$. De esta manera obtenemos una familia $T_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de aplicaciones lineales y continuas puesto que se verifica rápidamente que

$$T_n(\alpha f + g) = \alpha T_n(f) + T_n(g) \quad \text{y que} \quad |T_n(f)| \leq 2n\|f\|_E.$$

Notemos que la sucesión $(T_n(f))_{n\geq 1}$ converge hacia la derivada $f'(0)$ de la función f evaluada en 0, se tiene entonces que la sucesión de aplicaciones lineales $(T_n)_{n\geq 1}$ *converge simplemente* hacia la forma lineal $T : f \longrightarrow f'(0)$.

Sin embargo, vamos a verificar que esta forma lineal no es continua. En efecto, consideremos la sucesión de polinomios determinada por $f_k(x) = kx(1-x)^k$; se tiene que $f_k'(x) = k(1-x)^{k-1}(1-x-kx)$. No es difícil darse cuenta que la función f_k admite un máximo en el punto $x = (1+k)^{-1}$, de donde se deduce que $0 \leq f_k(x) \leq (k/(1+k))^{k+1} \leq 1$. Obtenemos entonces que $\|f_k\|_E \leq 1$ mientras que $f_k'(0) = k$. A partir de estos hechos vemos que no existe una constante $C > 0$ tal que $|f_k'(0)| \leq C\|f_k\|_E$ para todo $k \geq 1$ y que por lo tanto la forma lineal T no es continua.

Este ejemplo nos indica que el límite de aplicaciones lineales continuas no es necesariamente continuo y que es por lo tanto necesario exigir una hipótesis adicional para recuperar la continuidad al pasar al límite.

Antes de enunciar el teorema de Banach-Steinhaus y de entrar en los detalles de su demostración, es necesario hacer una introducción a un concepto que expresará la condición adicional requerida para obtener el resultado deseado.

Definición 1.3.5 (Familia equicontinua) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos y*

$$\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$$

una familia de aplicaciones lineales definidas sobre E a valores en F. Diremos que la familia Λ es equicontinua *si para cada vecindad W del origen de F, existe una vecindad V del origen de E tal que $T_i(V) \subset W$ para todo $T_i \in \Lambda$.*

Nótese que si el conjunto Λ está reducido a una sola aplicación lineal, esta definición corresponde exactamente a la definición de continuidad[20]. Se tiene entonces que la noción de equicontinuidad indica que cada una de las aplicaciones es continua y que además sus variaciones son relativamente equivalentes, puesto que se trata del mismo conjunto V para todas las aplicaciones T_i.

Observación 1.20 Relacionemos ahora este concepto de equicontinuidad a la noción que habíamos presentado, en el marco de los espacios métricos, en la Definición 1.4.6 del Volumen 1. Sea pues (E, d_E) un espacio métrico compacto y sea $F = \mathbb{K}$. Dado que las aplicaciones son lineales, basta tomar en la anterior Definición 1.3.5 por vecindad W la bola unidad $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon)$ de manera a obtener la caracterización dada en el Volumen 1.

Cuando se dispone de mayor estructura sobre los espacios E y F es posible caracterizar la propiedad de equicontinuidad de la siguiente manera:

Proposición 1.3.2 (Caracterización de la equicontinuidad)

1) Si $(E, (p_i)_{\in I})$ y $(F, (q_j)_{\in J})$ son dos $\mathbb{K}$-espacios localmente convexos separados, entonces una familia $\Lambda \subset \mathscr{L}(E, F)$ es equicontinua si y solo si, para todo $j \in J$, existe una parte finita K de I, y una constante $C > 0$ tales que

$$q_j(T(x)) \leq Cp_i(x) \tag{1.29}$$

[20] Recordar que en el caso de aplicaciones *lineales* se tiene el Corolario 1.1.1.

para todo $i \in K$, $x \in E$ y $T \in \Lambda$.

2) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son dos $\mathbb{K}$-espacios normados, se tiene que una familia $\Lambda \subset \mathscr{L}(E, F)$ es equicontinua si y solo si Λ es una parte acotada del espacio normado $\mathscr{L}(E, F)$; es decir si se tiene

$$\sup_{T \in \Lambda} \|T\|_{E \to F} < +\infty$$

en donde $\|T\|_{E \to F}$ es la norma de la aplicación lineal continua T dada por la fórmula (1.15).

Prueba.

1) Supongamos que Λ es una familia equicontinua y sea $W = B_{q_j}(0, 1)$ una semi-bola abierta. Entonces existe una vecindad del origen de E, que podemos suponer de la forma $B_{p_{i_k}}(0, r)$ en donde $K = \{i_1, ..., i_k\}$ es una parte finita de I y $r > 0$, tal que se tenga $T(B_{p_{i_k}}(0, r)) \subset B_{q_j}(0, 1)$ para todo $T \in \Lambda$. De esta situación se tiene que $p_{i_k}(x) \leq r$ para todo $i_k \in K$ implica que $q_j(T(x)) \leq 1$, de donde se obtiene que $q_j(T(x)) \leq r^{-1} p_{i_k}(x)$.

   Recíprocamente, sea una vecindad W de 0 de F que contiene una semi-bola cerrada $B_{q_{j_\ell}}(0, \varepsilon)$ en donde $L = \{j_1, ..., j_\ell\}$ es una parte finita de J. Entonces existe una parte finita K de la familia I y una constante positiva $c \geq 0$ tales que $q_{j_\ell}(T(x)) \leq c p_{i_k}(x)$ para todo $j_\ell \in L$ y $i_k \in K$. De donde se deduce que

$$T(B_{p_{i_k}}(0, \delta)) \subset B_{q_{j_\ell}}(0, \varepsilon) \subset W$$

   siempre y cuando $c\delta \leq \varepsilon$. Es decir, por la Definición 1.3.5, se obtiene que la familia Λ es equicontinua.

2) Cuando los espacios E y F son normados, la condición (1.29) significa $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, es decir que $\|T\|_{E \to F} < C$ para todo $T \in \Lambda$, de donde se obtiene que Λ es una parte acotada del espacio $\mathscr{L}(E, F)$. ■

Veamos ahora cómo interviene el concepto de acotación con la equicontinuidad:

Proposición 1.3.3 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos y sea*

$$\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$$

una familia equicontinua de aplicaciones lineales definidas sobre E a valores en F. Sea A un subconjunto acotado de E. Entonces existe un subconjunto acotado Y de F tal que $T_i(A) \subset Y$ para todo $T_i \in \Lambda$.

Prueba. Sea Y la unión de los conjuntos $T_i(A)$ con $T_i \in \Lambda$ y sea W una vecindad del origen de F. Como la familia Λ es equicontinua, existe una vecindad V del origen de E tal que $T_i(V) \subset W$ para todo $T_i \in \Lambda$. Dado que el conjunto A es acotado, se tiene que $A \subset \alpha V$ para todo α suficientemente grande, de manera que, para estos escalares α se tiene

$$T_i(A) \subset T_i(\alpha V) = \alpha T_i(V) \subset \alpha W$$

de donde se deduce que $F \subset \alpha W$ y por lo tanto que F es acotado. ■

Podemos ahora enunciar el siguiente resultado que nos proporciona un criterio para verificar la equicontinuidad de ciertas familias de aplicaciones lineales.

Teorema 1.3.5 (de Banach-Steinhaus) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos, sea $\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Definimos el conjunto B como la colección de puntos $x \in E$ tales que la cantidad*

$$\Lambda(x) = \{T_i(x) : T_i \in \Lambda\}$$

sea acotada en F. Si el conjunto B es residual en E en el sentido de la Definición 1.3.2, entonces se tiene que $B = E$ y la familia Λ es equicontinua.

Demostración. Sean W y U dos vecindades del origen de F equilibradas[21] tales que $U + \overline{U} \subset W$. Definamos el subconjunto X de E por

$$X = \bigcap_{T\in\Lambda} T^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x \in B$, entonces $\Lambda(x) \subset nU$ para algún n de manera que $x \in nX$. Por lo tanto se tiene la inclusión

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} nX.$$

Como B es un conjunto residual en E, se tiene que al menos uno de los conjuntos nX es residual en E. Ahora como la aplicación $x \longmapsto nx$ es un homeomorfismo de E en E, se tiene que el conjunto X es residual en E. Pero además se tiene que X es cerrado pues cada aplicación T es continua y por lo tanto X contiene un punto interior x y entonces $x - X$ contiene una vecindad V del origen E y se tiene

$$T(V) \subset T(x) - T(X) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

para toda aplicación $T \in \Lambda$. Esto prueba que la familia Λ es equicontinua. Aplicamos pues la Proposición 1.3.3 para obtener que Λ es uniformemente acotada. En particular se tiene que cada conjunto $\Lambda(x)$ es acotado en F, de donde se obtiene que $B = E$. ■

En lo que sigue, la hipótesis de *residualidad* será consecuencia de las propiedades de los conjuntos que entran en acción. Así tenemos, utilizando el Teorema 1.3.1, página 33, el resultado a continuación.

Corolario 1.3.3 *Si Λ es una colección de aplicaciones lineales continuas definidas sobre un espacio de Fréchet $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ a valores en un espacio vectorial topológico F y si los conjuntos*

$$\Lambda(x) = \{T_i(x) : T_i \in \Lambda\}$$

son acotados en F para todo $x \in E$, entonces Λ es una familia equicontinua.

Prueba. En efecto, como $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet, es un espacio métrico completo y aplicamos el lema de Baire para obtener la hipótesis de residualidad. ■

En el caso en que los espacios considerados estén dotados de una norma, tenemos el Principio de Acotación Uniforme que nos dice que una acotación puntual de una familia de aplicaciones lineales continuas implica una acotación uniforme. Más precisamente:

Teorema 1.3.6 (Principio de Acotación Uniforme) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach. Sea $(T_i)_{i\in I}$ una familia, no necesariamente numerable, de aplicaciones lineales continuas de E en F. Supongamos que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E. \tag{1.30}$$

[21] ver Definición 1.3.4 del Volumen 1.

Entonces existe una constante C tal que

$$\|T_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \qquad \forall x \in E,\ \forall i \in I.$$

Es decir, se tiene

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{E\to F} < +\infty.$$

Demostración. La verificación de este hecho es inmediata y se reduce a reescribir la hipótesis y la conclusión con las notaciones anteriores. En efecto, notemos $\Lambda = \{T_i : E \longrightarrow F : i \in I\}$ la familia de aplicaciones lineales consideradas. La hipótesis (1.30) expresa que los conjuntos

$$\Lambda(x) = \{T_i(x) : T_i \in \Lambda\}$$

son acotados en F para todo $x \in E$; podemos entonces aplicar el Corolario 1.3.3 anterior para obtener que la familia Λ es equicontinua, finalmente por la caracterización de la equicontinuidad dada en la Proposición 1.3.2 tenemos que

$$\sup_{T\in\Lambda}\|T\|_{E\to F} < +\infty.$$

■

Vemos cláramente en esta demostración cómo interviene el concepto de equicontinuidad que acabamos de presentar en las líneas precedentes. En particular notamos que el ejemplo dado en la página 39 no verifica las hipótesis del principio de acotación uniforme.

Utilizando estos teoremas, podemos decir algo sobre la continuidad del límite de sucesiones de aplicaciones lineales continuas.

Teorema 1.3.7 *Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas definidas sobre un espacio de Fréchet $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ a valores en un espacio topológico F y si el límite siguiente*

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

existe para todo $x \in E$, entonces la aplicación lineal T es continua.

Prueba. El Corolario 1.3.3 nos asegura que la familia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, por lo tanto si W es una vecindad del origen de F, tenemos $T_n(V) \subset W$ para todo n, para una vecindad V del origen de E. Se obtiene entonces que $T(V) \subset \overline{W}$ y por lo tanto, la aplicación T es continua. ■

Observación 1.21 Como acabamos de ver, los teoremas 1.3.6 y 1.3.7 se deducen de los resultados anteriores relativos a la equicontinuidad. Sin embargo, es muy útil disponer de estas dos versiones anteriores que son mucho más sencillas de aplicar y de recordar.

Para terminar esta subsección, vamos a presentar ahora una aplicación del teorema de Banach-Steinhaus a un problema planteado en la página 19 cuando habíamos presentado la Definición 1.1.15 de las aplicaciones bilineales separadamente continuas.

Corolario 1.3.4 (Continuidad de las aplicaciones bilineales) *Sean $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un espacio de Fréchet y F y G dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos. Sea $B : E \times F \longrightarrow G$ una aplicación bilineal separadamente continua. Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ en E y si $\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0$ en F entonces*

$$B(x_n, y_n) \longrightarrow B(x_0, y_0) \quad \text{en } G. \tag{1.31}$$

En particular, si F es un espacio métrico, se tiene que la aplicación bilineal B es continua.

Prueba. Sean U y W dos vecindades del origen de G tales que $U+U \subset W$ y definamos las aplicaciones $T_n(x) = B(x, y_n)$ para $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$. Dado que por hipótesis, la aplicación B es separadamente continua es por lo tanto continua como una función de la variable y y se tiene $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x) = B(x, y_0)$ para todo $x \in E$. De donde se deduce que $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto acotado de G. Ahora, como cada aplicación T_n es una aplicación lineal continua definida sobre el espacio de Fréchet E se tiene por el teorema de Banach-Steinhaus 1.3.5 que la familia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua. Existe por lo tanto una vecindad V del origen de E tal que $T_n(V) \subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos ahora que $B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = T_n(x_n - x_0) - B(x_0, y_n - y_0)$, de manera que, como la aplicación B es continua en la variable y y como $B(x_0, 0) = 0$, si n es suficientemente grande se tiene que $B(x_0, y_n - y_0) \in U$ y si $x_n \in x_0 + V$ entonces, por equicontinuidad se tiene $T_n(x_n - x_0) \in U$. Por lo tanto podemos escribir

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) \in U + U \subset W$$

para todo n suficientemente grande, de donde se obtiene (1.31). Finalmente, si el espacio F es metrizable, entonces se tiene que $E \times F$ es también metrizable y la continuidad de la aplicación bilineal B se deduce de (1.31). ■

1.4. Topologías fuertes y débiles

En esta sección vamos a estudiar las diversas consecuencias que se obtienen al considerar varias topologías sobre un mismo espacio. Habíamos visto rápidamente, en la sección 1.1.1 del primer volumen, que un espacio topológico general X posee trivialmente dos topologías: la topología gruesa $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ y la topología discreta $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, dada por el conjunto de partes de X, y habíamos visto igualmente que es más conveniente fijar una topología *intermedia* con características más agradables en vez de trabajar con estos dos extremos. Sin embargo, no habíamos estudiado en detalle ni el interés, ni la utilidad que existe en dotar un mismo espacio de varias topologías, ni las diferentes propiedades que se pueden deducir de esta situación; y esta sección está destinada a responder a estos dos inquietudes. Evidentemente, no consideraremos cualquier tipo de topologías, sino estructuras topológicas que están íntimamente relacionadas con los importantes resultados anteriores, lo cual nos garantizará ciertos teoremas y resultados de gran utilidad.

En lo que sigue vamos a adoptar un punto de vista teórico, es decir que vamos a presentar las definiciones y los resultados de una manera formal, y reservaremos la Sección 1.5 para una aplicación de todos estos conceptos a los diversos espacios de sucesiones. Sin embargo, para la aplicación de estas ideas y conceptos a los espacios de Lebesgue será necesario esperar un capítulo más, pues necesitaremos unas herramientas adicionales que serán tratadas a su debido tiempo.

Necesitaremos introducir un poco de terminología general cuyo significado será precisado en las páginas que siguen. Empezaremos recordando que habíamos presentado en el primer volumen una cierta noción de orden entre topologías cuando hablábamos de topologías *más finas* o *más gruesas*. Vamos ahora a utilizar sinónimos a estos dos conceptos de la manera siguiente.

Definición 1.4.1 (Topologías débiles y fuertes) *Si un conjunto X está dotado de dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, diremos que $\mathcal{T}_1$ es más* débil *que $\mathcal{T}_2$ (o que $\mathcal{T}_2$ es más* fuerte *que $\mathcal{T}_1$) si todo abierto de $\mathcal{T}_1$ es un abierto de $\mathcal{T}_2$ y lo notaremos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.*

Nótese que de acuerdo con la notación "$\subset$", los adjetivos *débil* y *fuerte* no excluyen la igualdad y que la correspondencia entre los adjetivos utilizados anteriormente para describir las inclusiones entre topologías es la siguiente: más débil = más gruesa / más fuerte = más fina.

1.4.1. Motivación y construcción de topologías débiles

Pero, *¿por qué definir varias topologías sobre un mismo espacio*? Para dar una respuesta a esta pregunta, es necesario ilustrar un poco los fenómenos que aparecen cuando un mismo conjunto admite varias topologías.

Para empezar recordemos que ciertas propiedades, como la continuidad por ejemplo, pueden variar en función de la estructura topológica considerada: ver la observación 1.8 página 13 y el ejemplo ahí exhibido. Pero éste es evidentemene solo un primer aspecto.

Demos un segundo ejemplo. Vemos, más generalmente, que si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ son dos topologías definidas sobre un mismo espacio X, entonces por un lado se tiene que $(X, \mathcal{T}_1)$ posee *menos* conjuntos abiertos que $(X, \mathcal{T}_2)$, pero se tiene por otro lado que $(X, \mathcal{T}_1)$ posee *más* conjuntos compactos que $(X, \mathcal{T}_2)$: en efecto, si hay menos conjuntos abiertos, será más sencillo obtener subrecubrimientos abiertos finitos. Recuérdese que, a la luz de la sección 1.2.2 del primer volumen, los conjuntos compactos poseen propiedades muy importantes[22] y a veces es más agradable (y en muchos casos indispensable) trabajar con ellos. Esta es una de las principales razones por las cuales resulta interesante *debilitar* las topologías y éste va a ser uno de nuestros principales objetivos: obtener estructuras topológicas con mayor cantidad de compactos. Sin embargo, hay que tener un poco de cuidado en este proceso: por ejemplo, si X es un cierto espacio dotado de la topología gruesa $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, se tiene que todo subconjunto de X es compacto con respecto a esta topología puesto que se tiene solo dos conjuntos abiertos, pero esta estructura topológica es demasiado pobre para trabajar efectivamente con ella.

Un último ejemplo está dado por el hecho que la topología de un espacio separado (o de Hausdorff) compacto X presenta un cierto tipo de *rigidez* en el sentido siguiente: no se puede debilitar la topología de X sin perder la propiedad de Hausdorff y no se puede fortalecer su topología sin perder la propiedad de compacidad. Esta situación se clarifica con la proposición que sigue.

Proposición 1.4.1 *Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ son dos topologías sobre un mismo conjunto X y si $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio topológico de Hausdorff y si $(X, \mathcal{T}_2)$ es un espacio compacto, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Prueba. Basta verificar la inclusión $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ y para ello vamos a mostrar que si $Y \subset X$ es un subconjunto cerrado para la topología $\mathcal{T}_2$ entonces Y es cerrado para la topología $\mathcal{T}_1$. En efecto, como X es $\mathcal{T}_2$-compacto, se tiene que Y también lo es y dado que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ se deduce que Y también es compacto para la topología $\mathcal{T}_1$ pues todo recubrimiento $\mathcal{T}_1$-abierto de Y es un recubrimiento $\mathcal{T}_2$-abierto. Como $\mathcal{T}_1$ tiene la propiedad de Hausdorff, se obtiene que Y es $\mathcal{T}_1$-cerrado por la Proposición 1.2.2 del Volumen 1: se tiene entonces que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. ■

Para acabar este pequeño párrafo introductorio y, para pasar a la construcción de diferentes topologías, es necesario distinguir dos casos muy particulares que están íntimamente relacionados con la dimensión del espacio sobre el cual se trabaja. En efecto, en el caso de la dimensión finita se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1 (de Riesz) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. Los puntos siguientes son equivalentes*

1) E es de dimensión finita,

2) E es localmente compacto,

[22] en efecto, si además se trabaja sobre un espacio métrico, las nociones de compacidad y de compacidad secuencial coinciden y esto permite trabajar cómodamente con subsucesiones como lo veremos más adelante.

3) $\overline{B} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ *es un conjunto compacto,*

4) $B = \{x \in E : \|x\|_E < 1\}$ *es un conjunto precompacto.*

Demostración. Se tiene 1) $\Longrightarrow$ 2): si el espacio E es de dimensión finita, entonces toda bola cerrada acotada es un conjunto compacto y esto implica que E es localmente compacto. Para la implicación 2) $\Longrightarrow$ 3), vemos que si el espacio E es localmente compacto, entonces se tiene que $\overline{B(0,r)} = r\overline{B(0,1)}$ es un conjunto compacto, de donde se obtiene que la bola $\overline{B(0,1)}$ es compacta. El hecho que 3) $\Longrightarrow$ 4) es inmediato; de manera que lo único que hay que verificar es la implicación 4) $\Longrightarrow$ 1). Para ello necesitaremos el lema a continuación.

Lema 1.4.1 *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio normado. Si* W *es un subespacio vectorial de* E *que contiene una bola, entonces se tiene la identidad* $W = E$*.*

Prueba. Sea pues $B(a,r) \subset W$ una bola de centro a y de radio r. Sea ahora $x \in B(0,r)$, se tiene entonces que $a + x \in B(a,r) \subset W$. Dado que W es un subespacio vectorial, se tiene que $x \in W$ y por lo tanto se deduce que $B(0,r) \subset W$. Sea ahora $x \neq 0$ un elemento cualquiera de E, se tiene que $\frac{rx}{2\|x\|_E} \in B(0,r) \subset W$, pero como el subespacio W es un subespacio vectorial se tiene que $x \in W$ de manera que $E \subset W$ y se deduce la identidad $W = E$. ■

Volvamos a la demostración del teorema. Si la bola $B(0,1)$ es un conjunto precompacto; existe por lo tanto una parte finita A de E tal que $B(0,1) \subset \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{1}{2}) = A + \frac{1}{2}B(0,1)$. Consideramos ahora el espacio vectorial $Y = Vect(A)$ que es de dimensión finita por construcción y vemos que se tiene $B(0,1) \subset Y + \frac{1}{2}B(0,1)$.

Como se tiene la inclusión $B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$ y que este último conjunto es compacto por hipótesis, podemos construir por recurrencia conjuntos Y finitos tales que $B(0,1) \subset Y + \frac{1}{2^n}B(0,1)$. En particular, si $x \in B(0,1)$, entonces para todo $n \geq 1$ existe $y_n \in Y$ tal que $\|x - y_n\|_E < 2^{-n}$. Esto muestra que $B(0,1) \subset \overline{Y}$, pero se tiene la identidad $\overline{Y} = Y$ puesto que Y es de dimensión finita, de donde se deduce que el subespacio vectorial Y contiene la bola $B(0,1)$. Aplicamos entonces el lema anterior para obtener la identidad $Y = E$ y se obtiene que E es un espacio de dimensión finita. ■

Observación 1.22 El lector debe tener en mente que, en un espacio normado de dimensión infinita, la bola unidad cerrada $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ *nunca* es un conjunto compacto.

Para ilustrarlo consideramos el espacio normado $(L^1(\mathbb{R}, dx), \|\cdot\|_{L^1})$ y la sucesión $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos sin problema que $\|f_n\|_{L^1} = 1$ de manera que $f_n \in \overline{B}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pero observamos que no es posible extraer de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente para la norma $\|\cdot\|_{L^1}$ de donde se deduce que el conjunto $\overline{B}$ no es compacto.

Notamos pues, la gran diferencia que existe en estos dos casos: en dimensión infinita, el hecho que un conjunto sea cerrado y acotado no es suficiente para poder deducir que este conjunto es compacto. Veremos en las líneas que siguen que será necesario *debilitar* las topologías para obtener la propiedad de compacidad.

Todos estos ejemplos muestran el interés y los riesgos que se tienen al debilitar una topología y toda la dificultad se encuentra en obtener una noción de topología débil con "buenas" propiedades. Es decir, entre todas las topologías $\mathcal{T}$ definidas sobre un cierto espacio E y que verifican $\{0, E\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ y, a la luz de los ejemplos anteriores, ¿cómo escoger la que posee el mayor número de propiedades?

Para responder a esta pregunta vamos a utilizar el siguiente método general cuyo interés aparecerá cláramente con los importantes teoremas que serán detallados a continuación.

Definición 1.4.2 (Topología débil generada por una familia de aplicaciones) *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico. La colección $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos de tipo $\varphi^{-1}(V)$ en donde $\varphi \in \mathscr{F}$ y V es un abierto de Y_φ es una* topología *sobre el conjunto X y es la topología* más débil *que hace que cada aplicación $\varphi \in \mathscr{F}$ sea continua.*

A esta topología $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ se le denomina la topología débil generada por la familia $\mathscr{F}$. *Cuando no haya confusión posible sobre la familia $\mathscr{F}$ y cuando el contexto esté claro, notaremos más simplemente $\mathcal{T}$ en vez de $\mathcal{T}_\mathscr{F}$.*

Nótese que esta manera de obtener topologías es totalmente clásica y verificar que $(X, \mathcal{T}_\mathscr{F})$ es un espacio topológico es un ejercicio que queda a cargo del lector. Indiquemos a modo de ejemplo que ya hemos utilizado este artificio en la Definición 1.1.13, página 18, para dotar con una estructura topológica al producto cartesiano $X = \prod_{i=1}^n X_i$ de espacios topológicos X_i: en este caso habíamos utilizado como familia de aplicaciones las proyecciones π_i.

Observación 1.23

1) Es importante notar que en la Definición 1.4.2 que acabamos de dar, el conjunto X no está necesariamente dotado de una topología. En este sentido, y por el momento, el adjetivo *débil* asociado a la topología $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ es parte de la definición puesto que no se lo compara con ninguna otra topología definida sobre el conjunto X.

2) La estructura topológica que se obtiene de esta manera sobre X es "arrastrada" a partir de la estructura topológica de cada espacio Y_φ por medio de la familia $\mathscr{F}$: como se puede intuir, cuanto mayor estructura se disponga sobre la colección de espacios topológicos Y_φ y si la familia de aplicaciones $\mathscr{F}$ verifica algunos puntos adicionales, más propiedades se obtendrán sobre X.

Como el lector puede sospecharlo, no utilizaremos cualquier tipo de familia $\mathscr{F}$, sino familias que poseen cierto tipo de propiedades específicas. Una noción que será de gran utilidad es la siguiente.

Definición 1.4.3 (Familia separadora) *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico. La familia $\mathscr{F}$ es una familia* separadora *si, para todo $x \neq y \in X$, existe una aplicación $\varphi_0 \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi_0(x) \neq \varphi_0(y)$.*

Retomemos como ejemplo la construcción de la topología producto: sea $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia de espacios topológicos y sea el producto cartesiano $X = \prod_{i=1}^n X_i$, se tiene que la familia $(\pi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de proyecciones canónicas

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : X = \displaystyle\prod_{i=1}^n X_i & \longrightarrow & X_i \\ x = (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

es una familia separadora. En efecto, si $x = (x_1, ..., x_n) \neq y = (y_1, ..., y_n)$, entonces existe al menos un índice $1 \leq i \leq n$ tal que $\pi_i(x) \neq \pi_i(y)$.

Observación 1.24 Este concepto de *familia separadora* ya ha sido presentado de manera menos general con el Corolario 1.2.5, página 31: en efecto, se verifica en este resultado que la familia de aplicaciones $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ definidas sobre un espacio localmente convexo separado E, es una familia separadora en el sentido de la definición anterior.

Esta noción es importante pues se tiene el siguiente resultado que nos da una primera información sobre el tipo de topología que se obtiene al proceder como en la Definición 1.4.2.

Proposición 1.4.2 *Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow Y_\varphi$ en donde cada conjunto Y_φ es un espacio topológico separado. Si la familia $\mathscr{F}$ es una familia separadora, entonces la topología débil $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ generada por la familia $\mathscr{F}$ es una topología separada.*

Prueba. Sean pues x, y dos puntos distintos de X, dado que la familia $\mathscr{F}$ es una familia separadora, entonces existe una aplicación $\varphi_0 \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi_0(x) \neq \varphi_0(y)$. Se tiene además que los puntos $\varphi_0(x)$ y $\varphi_0(y)$ poseen vecindades U y V disjuntas en Y_{φ_0} puesto que es un espacio separado. La imágen recíproca bajo φ_0 de los conjuntos U y V son entonces conjuntos abiertos disjuntos de $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ que contienen x y y respectivamente, de donde se deduce que la topología débil $\mathcal{T}_\mathscr{F}$ es separada. ■

Mostremos ahora, y muy rápidamente, un ejemplo en dónde se juntan las proposiciones 1.4.1 y 1.4.2. Consideremos el producto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ de espacios topológicos X_i y supongamos que cada espacio X_i es un espacio de Hausdorff compacto, sabemos entonces que se tiene, por el teorema de Tychonov, que la topología $\mathcal{T}$ construida sobre X de la misma forma que en la Definición 1.1.13 es una topología que vuelve al conjunto X compacto. Ahora, gracias a la Proposición 1.4.2, se tiene que X es un espacio de Hausdorff compacto, de manera que, por la Proposición 1.4.1, esta topología $\mathcal{T}$ no puede ser fortalecida sin perder la propiedad de compacidad. Este muestra la rigidez estructural de esta situación.

Vemos, con los resultados anteriores, que hay que tener un poco de cuidado para fijar una buena familia de aplicaciones $\mathscr{F}$ con su correspondiente colección de espacios topológicos Y_φ. En todo lo que sigue vamos a seguir la vía natural que consiste en fijar como aplicaciones las *aplicaciones lineales* (nótese que no se dice nada sobre la eventual continuidad de estas aplicaciones: por el método expuesto en la Definición 1.4.2 vamos a considerar justamente una *buena* topología que las vuelva todas continuas) y en donde todos los espacios Y_φ son el cuerpo escalar $\mathbb{K}$. Es importante insistir sobre el hecho que la utilización de formas lineales no es algo fortuito: será gracias a esta familia muy particular de aplicaciones que obtendremos los resultados más importantes.

Necesitaremos el lema a continuación.

Lema 1.4.2 *Sean $T_1, ..., T_n$ y T formas lineales definidas sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y sea el conjunto $N \subset E$ definido por $N = \{x \in E : T_1(x) = ... = T_n(x) = 0\}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

1) existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que $T = \alpha_1 T_1 + ... + \alpha_n T_n$,

2) existe una constante $C > 0$ tal que $|T(x)| \leq C \max\limits_{1\leq i\leq n} |T_i(x)|$ para todo $x \in E$,

3) se tiene $T(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Prueba. Se observa fácilmente que 1) $\Longrightarrow$ 2) y que 2) $\Longrightarrow$ 3), de manera que se tiene el lema si se demuestra que 3) $\Longrightarrow$ 1). Supongamos pues que se tiene el punto 3). Definimos entonces una aplicación lineal ϕ por

$$\begin{array}{rcl} \phi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \phi(x) = (T_1(x), ..., T_n(x)). \end{array}$$

La hipótesis 3) significa que $\phi(x) = 0$ implica $T(x) = 0$ y por linealidad de todas estas aplicaciones se tiene en particular que $\phi(x) = \phi(y)$ implica $T(x) = T(y)$. Entonces si definimos una aplicación f por medio de la fórmula $f(\phi(x)) = T(x)$ obtenemos una forma lineal $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{K}$. Es posible entonces prolongar la forma lineal f en una forma lineal F definida sobre todo $\mathbb{K}^n$. Ahora, dado que F es una forma lineal sobre todo $\mathbb{K}^n$, esto implica la existencia de escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tales que $F(u_1, ..., u_n) = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$ para todo $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{K}^n$. De esto se obtiene que

$$T(x) = F(\phi(x)) = F(T_1(x), ..., T_n(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i(x)$$

que no es más que el primer punto, lo que termina la prueba del lema. ■

Vamos a utilizar este lema para obtener el siguiente teorema que es una primera etapa para relacionar la Definición 1.4.2 con el espacio de aplicaciones lineales continuas.

Teorema 1.4.2 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\mathscr{F} = \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ una familia separadora de formas lineales sobre E. Entonces la topología débil $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ generada por la familia $\mathscr{F}$ hace del espacio $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ un espacio topológico localmente convexo separado cuyo espacio dual es exactamente $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$.*

Demostración. Empecemos verificando que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ provee al espacio E con una estructura de espacio localmente convexo separado. Dado que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios separados, entonces por la Proposición 1.4.2 se tiene que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es separada y la linealidad de los elementos de $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ muestra que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es invariante por traslación. Ahora, si consideramos $T_1, ..., T_n$ una familia de formas lineales de $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$, si $r_i > 0$ es una familia de números reales, podemos construir los conjuntos

$$V = \{x \in E : |T_i(x)| < r_i \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Vemos, por las propiedades de las aplicaciones lineales T_i que este tipo de conjunto V es convexo, equilibrado[23] y pertenece a $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Tenemos entonces, por construcción, que la colección de todos los conjuntos determinados de esta manera forman una base local para $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, de donde se obtiene que $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ provee al espacio E con una topología de espacio localmente convexo separado.

Verifiquemos la compatibilidad de esta topología con la estructura vectorial de E. En efecto, nótese que si el conjunto V está definido de esta forma, entonces se tiene $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$ lo que muestra que la aplicación suma de la estructura vectorial de E es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Vamos a verificar ahora la continuidad de la multiplicación por un escalar. Sea V una vecindad del origen de E, si $x - y \in rV$ con $r > 0$, entonces se tiene que $\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) \in V$ si r es tal que $r|\alpha| < 1$. De esta manera hemos verificado que la aplicación multiplicación por un escalar es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Se tiene por lo tanto que $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ es una topología de espacio vectorial localmente convexo separado sobre E.

Para terminar el teorema, hay que verificar que $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ es el espacio dual de E. Vemos sin problema que toda forma lineal $T \in \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ es continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Recíprocamente, sea S una forma lineal continua para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, entonces se tiene $|S(x)| < 1$ para todo x de cierto conjunto $V \in E$. Notamos ahora que la condición 2) del Lema 1.4.2 es verificada, pues $|S(x)| \leq C \max\limits_{1 \leq i \leq n} |T_i(x)|$ en donde las formas lineales T_i definien la vecindad V, y por lo tanto se tiene que $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$. Como cada T_i pertenece al espacio $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$, que es un espacio vectorial, se tiene que $S \in \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$. ■

Este resultado es interesante por varios motivos: básicamente nos dice que si partimos de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y de una familia separadora de aplicaciones lineales $\mathscr{F}$, entonces el espacio $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ posee una estructura topológica interesante (es un espacio localmente convexo) y además se tiene que el conjunto $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ de formas lineales continuas (para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$) es precisamente la familia $\mathscr{F}$ inicialmente dada (es decir $\mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \mathscr{F}$).

[23] Ver la Sección 1.3.3 del Volumen 1 para las definiciones.

Sin embargo, si cambiamos la familia de aplicaciones lineales $\mathscr{F}$ por otra familia $\mathscr{F}'$, se obtendrá una segunda estructura topológica $(E, \mathcal{T}_{\mathscr{F}'})$ con propiedades totalmente similares. Procediendo de esta manera podemos tener una amplia gama de estructuras topológicas, similares pero distintas, sobre el espacio E. ¿Cómo escoger la mejor (o más adaptada) familia de aplicaciones lineales para obtener la mejor (o más adaptada) estructura topológica sobre E? La subsección que sigue responderá a esta pregunta utilizando la noción de corchete de dualidad.

1.4.2. Dualidad y topologías asociadas

Recuérdese ahora que el concepto de *espacio dual* ha sido presentado como una definición al final de la Sección 1.1.1, página 4. Es necesario precisar esta noción con la definición a continuación.

Definición 1.4.4 (Corchete de dualidad) *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Decimos que una forma bilineal*

$$\begin{array}{rcl}\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F} : E\times F & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle_{E\times F}\end{array}$$

es un corchete de dualidad *entre los espacios E y F si se tienen los dos puntos siguientes:*

1) si $\langle x,y\rangle_{E\times F}=0$ para todo $y\in F$, entonces se tiene $x=0$,

2) si $\langle x,y\rangle_{E\times F}=0$ para todo $x\in E$, entonces se tiene $y=0$.

Decimos además que el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$ pone en dualidad *los espacios E y F.*

Notación: Cuando el contexto esté lo suficientemente claro y cuando no haya confusión entre los espacios E y F, notaremos simplemente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en vez de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$.

Nótese que, de la misma forma que en el punto 1) de la observación 1.23, los espacios E y F de la definición anterior no están necesariamente dotados de una estructura topológica. Vamos a remediar esta carencia con un primer resultado que nos dice que a partir de un corchete de dualidad se pueden obtener *dos* familias de formas lineales que poseen la importante propiedad de separación. Usando estas familias separadoras veremos cómo aplicar el Teorema 1.4.2 para obtener estructuras topológicas interesantes.

Lema 1.4.3 (Obtención de familias separadoras a partir del corchete de dualidad) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$. Entonces las familias de aplicaciones lineales*

$$\mathscr{E}=\{\varphi_y : x\longmapsto\langle x,y\rangle_{E\times F} : \forall y\in F\}\quad y\quad \mathscr{F}=\{\psi_x : y\longmapsto\langle x,y\rangle_{E\times F} : \forall x\in E\}$$

son familias separadoras en el sentido de la Definición 1.4.3.

Prueba. Esta propiedad de separación del corchete de dualidad no es más que una relectura de las condiciones 1) y 2) de la Definición 1.4.3. En efecto, si $x_1\neq x_2\in E$ se tiene que $x_1-x_2\neq 0$, de manera que existe por el punto 1) una aplicación $\varphi_y\in\mathscr{E}$ tal que $\varphi_y(x_1-x_2)\neq 0$, de donde, por linealidad se obtiene que $\varphi_y(x_1)\neq\varphi_y(x_2)$. Razonando de forma totalmente similar se obtiene la propiedad separadora de la familia $\mathscr{F}$. ■

Con la noción de corchete de dualidad, con el Lema 1.4.3 y con el Teorema 1.4.2 podemos dotar a dos espacios puestos en dualidad con estructuras topológicas muy particulares:

Definición 1.4.5 (topología $\sigma(E,F)$ y topología $\sigma(F,E)$) *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$.*

1) *Sobre el espacio E definimos la topología $\sigma(E,F)$ como la topología débil generada por la familia de formas lineales $T_y : x \longmapsto \langle x, y\rangle_{E\times F}$ para todo $y \in F$.*

   Notaremos $(E, \sigma(E,F))$ o más simplemente $E_{\sigma(E,F)}$ cuando el espacio E está dotado de esta topología.

2) *Simétricamente, sobre el espacio F definimos la topología $\sigma(F,E)$ como la topología débil generada por la familia de formas lineales $T_x : y \longmapsto \langle x, y\rangle_{E\times F}$ para todo $x \in E$.*

   De igual forma, notaremos $(F, \sigma(F,E))$ o más simplemente $F_{\sigma(F,E)}$ cuando el espacio F está dotado de esta topología.

Ilustramos este hecho con la figura a continuación.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[drr] & \langle \cdot,\cdot\rangle_{E\times F} & F \arrow[dll] \\
(E,\sigma(E,F)) & & (F,\sigma(F,E))
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.3: Corchete de dualidad y topologías asociadas.

Por el Teorema 1.4.2 se obtienen, por el momento, propiedades simétricas para los espacios E y F: los espacios $E_{\sigma(E,F)}$ y $F_{\sigma(F,E)}$ son dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos separados localmente convexos; pero es posible ir un poco más lejos pues estas estructuras topológicas pueden ser caracterizadas por medio del corchete de dualidad utilizando el resultado a continuación:

Proposición 1.4.3 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$.*

1) *La topología $\sigma(E,F)$ definida sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial E es una topología separada de espacio localmente convexo que puede ser definida por las semi-normas*

$$
\begin{array}{rcl}
p_y : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & p_y(x) = |\langle x, y\rangle_{E\times F}|
\end{array}
$$

   para todo $y \in F$.

2) *Simétricamente, la topología $\sigma(F,E)$ definida sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial F es una topología separada de espacio localmente convexo que puede ser definida por las semi-normas*

$$
\begin{array}{rcl}
p_x : F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
y & \longmapsto & p_x(y) = |\langle x, y\rangle_{E\times F}|
\end{array}
$$

   para todo $x \in E$.

Prueba. Basta verificar el primer punto, pues el segundo, por simetría, es totalmente similar. Empecemos verificando rápidamente que las aplicaciones p_y son efectivamente semi-normas: en efecto, por las propiedades de bilinealidad del corchete de dualidad se tiene para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ que $p_y(\alpha x) = |\alpha| p_y(x)$ y que $p_y(x_1 + x_2) \leq p_y(x_1) + p_y(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$, de manera que se obtiene sin problema que las aplicaciones p_y son semi-normas. Consideremos ahora la familia de aplicaciones $\mathscr{E} = \{T_y : x \longmapsto \langle x, y\rangle_{E\times F} : \text{ para todo } y \in F\}$. El hecho que esta familia es separadora se deduce del Lema 1.4.3. Podemos entonces aplicar el Teorema 1.4.2, de manera que la topología $\sigma(E, F)$ provee al espacio E con una estructura de espacio localmente convexo separado, de modo que para terminar debemos comparar los espacios topológicos $(E, (p_y)_{y\in F})$ y $(E, \sigma(E, F))$. Recuérdese que por construcción, la topología $\sigma(E, F)$ hace que cada aplicación $T_y(\cdot) = \langle \cdot, y\rangle_{E\times F}$ sea continua, y dado que $|T_y(x)| = p_y(x)$ para todo $y \in F$ se obtiene sin problema que estas dos topologías son las mismas. ■

Es importante notar la utilidad del corchete de dualidad: vemos con los resultados anteriores que esta herramienta nos permite decir cuando dos espacios vectoriales están en dualidad, nos proporciona familias separadoras de aplicaciones lineales y nos dice cómo caracterizar las diversas topologías generadas por medio de semi-normas.

Es tiempo de justificar el adjetivo *débil* que hemos usado en las líneas precedentes. En efecto, hasta ahora los espacios sobre los cuales deseábamos construir una topología no estaban necesariamente dotados de una topología inicial pues esta se deducía "arrastrándola" por medio de familias de aplicaciones. Los resultados a continuación nos indican lo que sucede cuando se dispone inicialmente de una estructura de espacio topológico localmente convexo separado.

Pero antes, es necesario dar un ejemplo muy importante de un corchete que pone en dualidad dos espacios vectoriales. Este ejemplo es relevante en el sentido que nos permite justificar la notación de espacio *dual* E' de un espacio vectorial E dada en la Definición 1.1.8:

Proposición 1.4.4 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ el dual topológico de E. Entonces la forma bilineal $\langle x, T\rangle_{E\times E'}$ definida por*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot\rangle_{E\times E'} : E \times E' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, T) &\longmapsto \langle x, T\rangle_{E\times E'} = T(x) \end{aligned} \tag{1.32}$$

es un corchete de dualidad y pone los espacios E y E' en dualidad.

Prueba. Si tenemos que $T(x) = 0$ para todo $x \in E$, se tiene entonces evidentemente que $T = 0$. Recíprocamente, debemos verificar que si $T(x) = 0$ para todo $T \in E'$ entonces $x = 0$. Esto es una consecuencia del teorema de Hahn-Banach puesto que si suponemos que $x \neq 0$ entonces, existe por la Proposición 1.2.1 página 24 una forma lineal $S \in E'$ tal que $S(x) \neq 0$. Hemos verificado los dos puntos exigidos por la Definición 1.4.4 y obtenemos entonces que los espacios E y E' están en dualidad. ■

Este resultado merece la definición siguiente.

Definición 1.4.6 (Corchete de dualidad canónico) *El corchete de dualidad determinado por la fórmula (1.32) es el* corchete de dualidad canónico *entre un espacio vectorial localmente convexo separado E y su espacio dual E'.*

Observación 1.25 Es importante notar que, el hecho de utilizar el corchete de dualidad canónico (1.32) para poner en dualidad un espacio vectorial localmente convexo separado E y su espacio dual E', no es totalmente trivial puesto que es necesario usar el teorema de Hahn-Banach.

Corolario 1.4.1 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, entonces la familia $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ de todas las formas lineales continuas definidas sobre E es una familia separadora.*

Justifiquemos pues, ahora sí, el adjetivo *débil* utilizado hasta ahora.

Proposición 1.4.5 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología inicial $\mathcal{T}_I$ que hace de él un espacio localmente convexo separado y sea $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ el dual topológico de E. Entonces la topología $\sigma(E, E')$ es más débil que la topología $\mathcal{T}_I$, es decir que se tiene $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$.*

Prueba. Hay varias formas de verificar este hecho. La más económica consiste en decir que por construcción la topología $\sigma(E, E')$ es la *topología más débil* que vuelve continuas las formas lineales que son continuas para la topología inicial $\mathcal{T}_I$, de esto se deduce que $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$. ■

Hemos visto con el Teorema 1.4.2 cómo, a partir de una familia de aplicaciones, es posible dotar a un espacio vectorial con una estructura topológica. Si la familia de aplicaciones proviene de un corchete de dualidad, el resultado que sigue nos dice qué relación existe entre el espacio dual E' que se obtiene de esta estructura topológica y el espacio F puesto en dualidad.

Teorema 1.4.3 *Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales puestos en dualidad por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$. Consideremos el espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E, F)$ y sea E' el espacio dual del espacio vectorial $(E, \sigma(E, F))$. Entonces la aplicación $\phi : y \longmapsto \langle \cdot, y\rangle_{E\times F}$ es un* isomorfismo topológico *de F sobre E' para las topologías $\sigma(F, E)$ y $\sigma(E', E)$.*

Además, toda forma lineal continua T definida sobre $E_{\sigma(E,F)}$ se escribe de la siguiente manera

$$T(x) = \langle x, y\rangle_{E\times F} \quad \textit{para algún } y \in F.$$

Este resultado permite juntar las nociones de espacios puestos en dualidad y de espacio dual. En efecto, podría pensarse que si partimos de un espacio E que está puesto en dualidad con otro espacio F, entonces el espacio de todas las formas lineales continuas para la topología $(E, \sigma(E, F))$ puede ser muy diferente de F. Gracias a este teorema vemos en realidad que existe un isomorfismo entre estos dos espacios. Volveremos a estudiar este tema con mayor detalle en la Sección 1.5.1.

Observación 1.26 Este teorema es un refinamiento del Teorema 1.4.2 dado en la página 48 pues indica la relación existente entre las formas lineales continuas (para la topología $\sigma(E, F)$) definidas sobre el espacio E y el corchete de dualidad $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E\times F}$.

Demostración. Por definición del corchete de dualidad, se tiene que si $\phi(y) = 0$ entonces $y = 0$, de donde se obtiene que ϕ es inyectiva. Recuérdese que por el Teorema 1.4.2, se tiene sobre E' una estructura de espacio vectorial localmente convexo separado. Utilizando la caracterización de la continuidad dada en el Corolario 1.1.3, si $T \in E'$, existe entonces una parte finita $\{y_1, ..., y_n\}$ de F y una constante $C \geq 0$ tal que

$$|T(x)| \leq C \sup_{1\leq i\leq n} |\langle x, y_i\rangle_{E\times F}| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Se deduce de esto que $T(x) = 0$ si $\langle x, y_i\rangle_{E\times F} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Ahora, por el Lema 1.4.2, se tiene que T es una combinación lineal de las formas lineales $\langle \cdot, y_i\rangle_{E\times F}$, lo que muestra que T es de la forma $\langle x, y\rangle_{E\times F}$ en donde y es una combinación lineal de los y_i. Con esto se obtiene que ϕ es sobreyectiva.

Para terminar, mostremos que ϕ es un isomorfismo topológico. Para ello usamos la Proposición 1.4.3 que nos dice que la topología $\sigma(F, E)$ de F puede ser caracterizada por las semi-normas $p_x : y \longmapsto |\langle x, y\rangle_{E\times F}|$, mientras que la topología $\sigma(E', E)$ de E' está dada por las semi-normas $q_x : T \longmapsto |T(x)|$; de tal manera que para obtener el isomorfismo basta observar que $p_x = q_x \circ \phi$. ■

Este teorema tiene un corolario muy interesante.

Corolario 1.4.2 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología inicial $\mathcal{T}_I$ que hace de él un espacio localmente convexo separado. Notamos E' el espacio dual de E con respecto a la topología $\mathcal{T}_I$. Entonces E' sigue siendo el espacio dual de E con respecto a la topología débil $\sigma(E, E')$.*

Prueba. Notemos $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ el conjunto de formas lineales continuas (es decir el espacio dual) con respecto a la topología inicial $\mathcal{T}_I$. Dado que por la Proposición 1.4.4 se tiene que los espacios E y $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ se encuentran en dualidad por medio del corchete de dualidad canónico (1.32), se obtiene sobre E una estuctura de e.l.c. más débil: $(E, \sigma(E, E'))$. Notemos ahora $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$ el conjunto de formas lineales continuas con respecto a la topología débil $\sigma(E, E')$. Para obtener el corolario, basta entonces aplicar el Teorema 1.4.3 con $F = E'_{[\mathcal{T}_I]}$ para obtener el isomorfismo topológico entre $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ y $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$. ∎

Recapitulamos con el gráfico a continuación la situación considerada:

$$
\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{T}_I) \arrow[r] & E'_{[\mathcal{T}_I]} \cong E'_{[\sigma(E,\,E')]} \arrow[ddl, shift left] \\
\bigcup & \\
(E,\sigma(E,E')) \arrow[uur, shift left] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.4: Topología inicial, topología débil y espacios duales asociados

En el gráfico anterior, se parte de un espacio topológico localmente convexo $(E, \mathcal{T}_I)$ a partir del cual se considera el conjunto $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ todas las formas lineales continuas para la topología inicial $\mathcal{T}_I$. Dado que, por la Proposición 1.4.4, estos espacios E y E' están puestos en dualidad por medio del corchete de dualidad canónico; es posible considerar la topología $\sigma(E, E')$ sobre E. Se construye luego el conjunto $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$ de todas las formas lineales continuas para la topología débil $\sigma(E, E')$, y por el Corolario 1.4.2 anterior se obtiene la identificación entre $E'_{[\mathcal{T}_I]}$ y $E'_{[\sigma(E,\,E')]}$.

Dicho de otra manera, el conjunto de formas lineales para la topología fuerte y para la topología débil es el mismo.

Corolario 1.4.3 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Se tiene entonces la identidad $(E_{\sigma(E,E')})_{\sigma(E,E')} = E_{\sigma(E,E')}$. Es decir que, siguiendo este proceso, la topología débil de la topología débil es igual a la topología débil.*

Prueba. En efecto, si la familia de formas lineales que permite construir la topología débil $\sigma(E, E')$ no varía, como es el caso aquí, al volver a considerar el proceso de construcción de topologías débiles usando esta familia de aplicaciones y aplicando el resultado anterior se obtiene este corolario. ∎

Observación 1.27 Estos resultados nos indican que el conjunto de formas lineals continuas es sensiblemente el mismo para la topología fuerte $\mathcal{T}_I$ y para la topología debilitada $\sigma(E, E')$.

Ahora que hemos justificado el adjetivo "débil" en las topologías consideradas, vamos a estudiar sus propiedades. Para ello, y para una mayor claridad, dividiremos nuestra exposición en dos partes.

A) Propiedades fuertes y propiedades débiles: estudio comparativo de la topología $\sigma(E, E')$.

En todo lo que sigue utilizaremos el marco a continuación: partimos de E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una topología $\mathcal{T}_I$ de manera que $(E, \mathcal{T}_I)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. A partir de esta topología fuerte inicial podemos considerar las formas lineales continuas definidas sobre E y de esta forma construimos el espacio dual E'. Finalmente, utilizando el corchete de dualidad canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E \times E'}$ definido con la fórmula (1.32) obtenemos la estructura topológica débil $\sigma(E, E')$ sobre E.

En este contexto tenemos dos estructuras topológicas sobre E:

- Todas las nociones relativas a la topología inicial $\mathcal{T}_I$ sobre E serán calificadas con el adjetivo "fuerte" o "fuertemente".
- Todas las nociones relativas a la topología $\sigma(E, E')$ sobre E serán calificadas con el adjetivo "débil" o "débilmente".

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{T}_I) \arrow[rr] & & E' \\ \bigcup & & \\ (E,\sigma(E,E')) \arrow[rruu] & & \end{tikzcd}$$

Figura 1.5: Topología inicial y topología débil

Es necesario aclarar y comparar las diversas particularidades que están relacionadas con estas estructuras topológicas $(E, \mathcal{T}_I)$ y $(E, \sigma(E, E'))$ mostradas en la figura anterior. En lo que sigue haremos una pequeña lista de los conceptos más importantes y aprovecharemos para fijar algunas notaciones.

- **Vecindades**
  - Dado que $(E, \mathcal{T}_I)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado, tenemos que esta topología puede ser determinada por una familia de semi-normas $(p_i)_{i\in I}$. Podemos entonces caracterizar las vecindades *fuertes* V_f del origen $0 \in E$ por
$$V_f = \{x \in E : p_{i_k}(x) < \varepsilon_k, \quad k = 1, ..., n\}$$
    en donde $p_{i_1}, ..., p_{i_n}$ es un sistema finito de semi-normas y ε_k son números reales positivos. Por traslación de estas vecindades se obtienen las vecindades de todos los puntos de E.
  - Para caracterizar las vecindades *débiles* V_d, utilizamos la Proposición 1.4.3 y el corchete de dualidad canónico. En efecto, tenemos por este resultado que la topología débil $\sigma(E, E')$ es una topología de espacio localmente convexo separado caracterizada por las semi-normas $p_T(x) = |T(x)|$, de manera que podemos fijar un sistema finito de estas semi-normas para construir las vecindades débiles del origen $0 \in E$ de la siguiente manera:
$$V_d = \{x \in E : |T_i(x)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\} \tag{1.33}$$
    en donde $T_i \in E'$ son formas lineales continuas y ε_i son números reales positivos.

  Nótese en particular que, por la continuidad de las aplicaciones T_i en la topología $\mathcal{T}_I$, se tiene por el Corolario 1.1.3 que $|T_i(x)| \leq Cp_{i_k}(x)$, de manera que toda vecindad débil está contenida en una vecindad fuerte: esto no es más que una traducción del hecho que $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_I$.

  Las vecindades V_f y V_d que acabamos de considerar están centradas en el origen, de manera que por traslación se obtienen vecindades de todos los puntos de E. De ser necesario se explicitarán el centro de la vecindad, las semi-normas y los reales $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq k}$.

  Observación 1.28 Desde el punto de vista de los conjuntos cerrados se tiene algo totalmente similar, es decir que todo conjunto débilmente cerrado es fuertemente cerrado. Evidentemente no se tiene la recíproca, para ello es necesario añadir una hipótesis adicional, ver la Proposición 1.4.6 para más detalles.

- **Convergencia**

  - Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge *fuertemente* (es decir en el sentido de la topología inicial $\mathcal{T}_I$) hacia $x \in E$, si cada vecindad *fuerte* de x contiene todos los puntos x_n a partir de un n suficientemente grande. Escribiremos entonces

$$x_n \longrightarrow x, \qquad x_n \xrightarrow{f} x \quad \text{ó} \quad f - \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

    para designar la convergencia fuerte.

  - Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge *débilmente* (es decir en el sentido de la topología $\sigma(E,E'))$ hacia $x \in E$, si cada vecindad *débil* de $x \in E$ contiene todos los puntos x_n a partir de un n suficientemente grande. Escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x, \qquad x_n \xrightarrow{d} x \quad \text{ó} \quad d - \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

    para notar la convergencia débil.

    Por comodidad, conviene traducir la convergencia débil en términos del corchete de dualidad. Tenemos entonces que se tiene la convergencia débil $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si se tiene la convergencia en $\mathbb{K}$ siguiente

$$\langle x_n, T\rangle_{E\times E'} \longrightarrow \langle x, T\rangle_{E\times E'} \qquad \text{para todo } T \in E'. \tag{1.34}$$

    Es decir, usando el corchete de dualidad canónico, que $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ para toda forma lineal continua T.

    Observación 1.29 Vemos muy fácilmente, por medio de la caracterización de la convergencia débil dada en (1.34), que la convergencia fuerte implica la convergencia débil puesto que estamos analizando la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por medio de formas lineales continuas. Nótese que no se tiene necesariamente la implicación recíproca.

- **Acotación**

  - La acotación fuerte corresponde a la noción dada en la Definición 1.1.9 página 10 con respecto a la topología $\mathcal{T}_I$. Es decir, un subconjunto A de E es *fuertemente acotado*, si para toda vecindad fuerte V_f del origen de E, existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_f$ para todo $\tau > \sigma$.

  - Diremos que un subconjunto A de E es *débilmente acotado* si y solo si para toda vecindad débil V_d del origen de E, existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_d$ para todo $\tau > \sigma$.

    Dada la forma de las vecindades débiles dada en (1.33), vemos que un conjunto A es débilmente acotado si y solo si a cada forma lineal $T \in E'$ corresponde un número real $0 < \gamma < +\infty$ tal que $|T(x)| \leq \gamma$ para todo $x \in A$. Dicho de otra manera, un subconjunto A de E es débilmente acotado si y solo si toda forma lineal $T \in E'$ es una función acotada sobre A.

    Observación 1.30 Tenemos entonces que la acotación fuerte implica la acotación débil. Veremos un poco más tarde bajo qué condiciones estas nociones coinciden.

- **Apertura**

  - La apertura *fuerte* de un conjunto $A \subset E$ es la unión de todos los conjuntos (fuertemente) abiertos contenidos en A, es decir: $\overset{\circ}{A}_f = \bigcup\limits_{B\subset A} B$, con B abierto de $\mathcal{T}_I$.

- La apertura *débil* de un conjunto $A \subset E$ es la unión de todos los conjuntos (débilmente) abiertos que contienen A, es decir, de la misma manera se tiene: $\overset{\circ}{A}_d = \bigcup_{D \subset A} D$, con D abierto de $\sigma(E, E')$. Tenemos entonces que $\overset{\circ}{A}_d \subset \overset{\circ}{A}_f$: esto no hace más que reflejar el hecho que en la topología fuerte hay más abiertos que en la topología débil, y por lo tanto la unión en la apertura fuerte corre sobre un conjunto más grande. Naturalmente no se tiene necesariamente la inclusión recíproca.

- **Cerradura**

  - La cerradura *fuerte* de un conjunto $A \subset E$ es la intersección de todos los conjuntos (fuertemente) cerrados que contienen A, es decir: $\overline{A}_f = \bigcap_{A \subset C} C$, con C cerrado de $\mathcal{T}_I$.
  - La cerradura *débil* de un conjunto $A \subset E$ es la intersección de todos los conjuntos (débilmente) cerrados que contienen A, es decir, de la misma manera se tiene: $\overline{A}_d = \bigcap_{A \subset D} D$, con D cerrado de $\sigma(E, E')$. De igual modo que en la apertura, y por las mismas razones, tenemos que $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$.

Evidentemente, cuando se considera las cerraduras fuerte y débil de un conjunto no se tiene otro tipo de relación que la expuesta en la línea precedente. Sin embargo, cuando se trata de la cerradura de conjuntos *convexos* se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.4.6 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Si $A \subset E$ es un subconjunto convexo de E entonces la cerradura fuerte de A es igual a su cerradura es débil. Es decir $\overline{A}_f = \overline{A}_d$.*

Prueba. Dado que se tiene siempre la inclusión $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$, solo basta verificar la inclusión recíproca y para ello vamos a mostrar que si $x_0 \notin \overline{A}_f$ entonces $x_0 \notin \overline{A}_d$.

Sea pues $x_0 \notin \overline{A}_f$, por el segundo punto del Teorema 1.2.4 página 30, de separación de conjuntos convexos y usando como conjunto compacto $\{x_0\}$ y $\overline{A}_f$ como conjunto cerrado, se obtiene la existencia de una forma lineal continua $T \in E'$ y de un real c tales que

$$\Re e(T(x_0)) < c < \Re e(T(x)) \qquad \text{para todo } x \in \overline{A}_f.$$

De esta manera se obtiene que el conjunto $V = \{x \in E : \Re e(T(x)) < c\}$ es una vecindad débil del punto x_0 que no intersecta A, de donde se deduce que x_0 no pertenece al conjunto $\overline{A}_d$ y esto muestra que $\overline{A}_d \subset \overline{A}_f$. ■

Corolario 1.4.4 *Sea $(E, \mathcal{T}_I)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Entonces, para todo subconjunto convexo A de E se tiene que A es cerrado si y solo si A es débilmente cerrado.*

- **Densidad**

  - Recordemos que un subconjunto $A \subset E$ es fuertemente *denso* en E si su cerradura fuerta verifica $\overline{A}_f = E$.
  - De igual forma diremos que un subconjunto A es *débilmente denso* en E si se tiene, para su cerradura débil, la relación $\overline{A}_d = E$.

  Dado que se tiene la inclusión $\overline{A}_f \subset \overline{A}_d$, vemos que si un conjunto es fuertemente denso, entonces es débilmente denso y, en el caso de los subconjuntos convexos, se puede decir un poco más al respecto.

Corolario 1.4.5 *Sea $(E, \mathcal{T}_I)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Entonces todo subconjunto convexo A de E es fuertemente denso si y solo si A es débilmente denso.*

Esto es inmediato a la luz de la Proposición 1.4.6 y del Corolario 1.4.4 anterior.

Observación 1.31 El lector debe tener mucho cuidado con estos resultados de cerradura y de densidad puesto que la hipótesis de convexidad es indispensable.

- **Compacidad**

  - Un subconjunto K de E es *fuertemente* compacto, si de todo recubrimiento (fuertemente) abierto de K se puede extraer un subrecubrimiento finito abierto.

  Notemos que en dimensión infinita, los conjuntos compactos son muy pequeños. Más precisamente tenemos:

  Proposición 1.4.7 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado de dimensión infinita. Entonces todo conjunto compacto es de interior vacío para la topología determinada por la norma $\|\cdot\|_E$.*

  Prueba. Sea K un conjunto compacto de interior no vacío que, por traslación, podemos suponer que contiene el origen. En este caso existiría una bola contenida en K que sería entonces un conjunto precompacto, pero al ser el espacio E de dimensión infinita, esto sería una contradicción con el teorema de Riesz 1.4.1. ■

  Cuando consideramos la noción de compacidad en la topología débil $\sigma(E, E')$, y sin otras hipótesis suplementarias, debemos contentarnos con la definición general:

  - Un subconjunto K de E es *débilmente* compacto, si de todo recubrimiento (débilmente) abierto de K se puede extraer un subrecubrimiento finito abierto.

  Veremos posteriormente cómo obtener caracterizaciones más interesantes de esta importante clase de conjuntos.

Terminamos aquí el estudio comparativo de las características débiles y fuertes. Para finalizar nuestra exposición sobre la topología débil, damos unos resultados que muestran algunos inconvenientes que se presentan al trabajar con esta estructura topológica.

Proposición 1.4.8 *Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado de dimensión infinita, entonces toda vecindad débil del origen contiene un subespacio de dimensión infinita.*

Prueba. Consideremos pues una vecindad débil de la forma dada en la expresión (1.33):

$$V_d = \{x \in E : |T_i(x)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

en donde $T_i \in E'$ son formas lineales continuas y ε_i son números reales positivos. Consideremos el conjunto $N = \{x \in E : T_1(x) = ... = T_n(x) = 0\}$. Dado que la aplicación lineal $\psi : x \longmapsto (T_1(x), ..., T_n(x))$ envía E en $\mathbb{K}^n$ y que su núcleo es igual a N, se tiene entonces que $dim(E) \leq n + dim(N)$. Dado que $N \subset V$ se obtiene el resultado buscado. ■

Este resultado es suficiente en muchos casos para mostrar que la topología débil $\sigma(E, E')$ es estríctamente más débil[24] que la topología inicial $\mathcal{T}_I$. Un ejemplo de ello es el siguiente teorema.

[24] recordar, sin embargo, que existen casos en donde se tiene la igualdad, ver el Corolario 1.4.3

Teorema 1.4.4 (Problemas de normabilidad de la topología débil) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado de dimensión infinita y sea E' su espacio dual. Entonces el espacio E, dotado de la topología débil $\sigma(E,E')$ no es normable.*

Demostración. Vamos a mostrar que no existe ninguna norma continua (es decir compatible) definida sobre $(E,\sigma(E,E'))$. Sabemos por las Proposición 1.4.3 que $(E,\sigma(E,E'))$ es un espacio localmente convexo separado cuyas vecindades están dadas por la expresión (1.33). Supongamos pues que existe una norma continua n sobre E, entonces existe un número finito de formas lineales $T_1,...,T_n \in E'$ y un número $C>0$ tales que

$$n(x) \leq C\sum_{i=1}^{n}|T_i(x)|, \qquad \text{para todo } x\in E.$$

Como E es de dimensión infinita, existe $x\neq 0$ tal que $T_1(x)=...=T_n(x)=0$. Se tiene entonces que $n(x)=0$ y por lo tanto n no puede ser una norma dado que no verifica la propiedad de separabilidad.■

Es muy importante recalcar que no hemos presentado ningún resultado, caracterización particular o teorema especial relativo a la compacidad en el marco de la topología débil. Además, el teorema anterior nos indica que en los casos más usuales (espacios de Fréchet o de Banach), hay una verdadera pérdida estructural al considerar esta topología débil. Estos dos hechos explican por qué la topología débil no es muy utilizada en las aplicaciones pues no cumple con las espectativas planteadas en la Sección 1.4.1 (sin embargo, veremos un poco más tarde los casos particulares en donde resulta útil trabajar con esta topología). Para obtener resultados más interesantes es necesario cambiar de punto de vista y éste es el objetivo de la sección siguiente.

B) La topología débil estrella sobre un espacio dual: estudio de la topología $\sigma(E',E)$.

En esta sección partimos de un espacio topológico localmente convexo separado $(E,(p_i)_{i\in I})$, consideramos su espacio dual E' y sobre este espacio arrastramos la topología $\sigma(E',E)$ tal como lo indica la figura 1.6.

Vamos entonces a concentrarnos, en las líneas que siguen, en algunas de las propiedades importantes que se obtienen sobre el espacio E' cuando se lo dota de la topología $\sigma(E',E)$. Indiquemos desde ya que esta topología $\sigma(E',E)$ definida sobre el espacio dual E' posee propiedades mucho más interesantes que la topología débil $\sigma(E,E')$ definida sobre E; intuitivamente, esto puede justificarse por el hecho que los elementos de E' son formas lineales continuas sobre E y no solamente puntos de un espacio vectorial.

$$\begin{tikzcd} (E,(p_i)_{i\in I}) \arrow[r, "\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times E'}"] \arrow[dr] & E' \\ & (E',\sigma(E',E)) \end{tikzcd}$$

Figura 1.6: Topología $\sigma(E',E)$ sobre el espacio dual.

Definición 1.4.7 (Topología débil estrella sobre E') *Sea $(E,(p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. A la topología $\sigma(E',E)$ determinada sobre el espacio dual E' se la deno-*

mina la topología débil estrella. *Por simplicidad nos referiremos a esta topología como la topología* débil-$*$.

Nótese que por el momento se dispone únicamente de la topología débil estrella sobre E' que es, por el punto 2) de la Proposición 1.4.3, una topología de espacio localmente convexo separado. Veremos un poco más tarde, en la Sección 1.4.3, cómo completar la situación considerando otras estructuras topológicas.

A las propiedades relativas a esta topología se las notará con el símbolo " -$*$ ". Hablaremos entonces de vecindades débiles-$*$, de convergencia-$*$, etc.

Esta topología es de vital importancia en todo el análisis matemático y el resultado fundamental de esta sección, por sus numerosas aplicaciones, está dado por el Teorema 1.4.5 a continuación. Pero antes de entrar en detalles, es conveniente fijar algunas ideas:

- **Vecindades débiles-$*$**
  Utilizamos una vez más el corchete de dualidad canónico para caracterizar las vecindades de la topología débil estrella $\sigma(E', E)$. Dado que esta topología puede representarse por medio de las semi-normas $p_x(T) = |T(x)|$ con $x \in E$ y $T \in E'$, se tiene entonces que las vecindades débiles-$*$ son de la forma
  $$V_{d^*} = \{T \in E' : |T(x_i)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$
  en donde x_i son elementos de E y ε_i son reales positivos.

- **Convergencia débil-$*$**
  Una vez que se tienen las vecindades débiles-$*$ se tienen las propiedades topológicas restantes, pero es necesario clarificar algunos conceptos mostrando en dónde interviene la dualidad.

  Diremos pues que una sucesión de formas lineales $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente*-$*$ hacia T si se tiene la siguiente convergencia fuerte en $\mathbb{K}$:
  $$\langle x, T_n\rangle_{E\times E'} \longrightarrow \langle x, T\rangle_{E\times E'} \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{1.35}$$
  Dicho de otra manera, una sucesión de formas lineales continuas $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente-$*$ hacia T si $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in E$. Notaremos la convergencia débil-$*$ de la siguiente manera:
  $$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T, \qquad T_n \overset{d^*}{\longrightarrow} T \quad \text{ó} \quad d^* - \lim_{n\to+\infty} T_n = T.$$

  Observación 1.32 El lector no debe confundir el límite (1.35) con la expresión (1.34): en el primer caso se trata de una sucesión de formas lineales $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$, mientras que en el otro se trata de una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

- **Acotación débil-$*$**
  La noción de acotación es similar: diremos que un conjunto $A \subset E'$ es débilmente-$*$ acotado si para toda vecindad débil V_{d^*} del origen de E' existe un número real $\sigma > 0$ tal que $A \subset \tau V_{d^*}$ para todo $\tau > \sigma$.

Compararemos posteriormente esta topología débil-$*$ a las otras estructuras topológicas presentadas hasta aquí (recordemos que por el momento solo se dispone de esta topología sobre el espacio E').

Pasamos, ahora sí, al teorema más relevante de esta sección. Este resultado es, vale la pena insistir, de gran importancia en muchísimas aplicaciones y justifica plenamente el uso de la topología débil estrella:

Teorema 1.4.5 (de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Sea $(E, (p_i)_{i\in I})$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo separado y sea E' su espacio dual dotado de la topología débil-$*$ $\sigma(E', E)$. Si V es una vecindad del vector $0 \in E$, entonces el subconjunto $K \subset E'$ de formas lineales continuas definido por*

$$K = \{T \in E' : |T(x)| \leq 1 : \text{ para todo } x \in V\} \tag{1.36}$$

es un conjunto débilmente-$*$ compacto.

Observación 1.33 El conjunto K se denomina el *conjunto polar* de V. Es un conjunto convexo y equilibrado en el sentido de la Definición 1.3.4 del Volumen 1.

Demostración. Sea $p \in (p_i)_{i\in I}$ una semi-norma continua definida sobre E tal que la semi-bola $U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ verifique $U \subset V$. Se tiene entonces que el conjunto polar K está contenido en el conjunto K_0 definido por:

$$K_0 = \{T \in E' : |T(x)| \leq 1, \text{ para todo } x \in U\} = \{T \in E' : |T(x)| \leq p(x), \text{ para todo } x \in E\}.$$

En efecto, si T es una forma lineal de K se tiene por construcción que $T \in K_0$. Observamos también que el conjunto polar K es cerrado en el conjunto K_0 dotado de la topología débil-$*$ inducida. Por estos dos puntos, lo único que queda entonces por demostrar es que el conjunto K_0 es un conjunto compacto para la topología débil-$*$. Para ello definimos el conjunto $D = \mathbb{K}^E = \{(\alpha_x)_{x\in E} : \alpha_x \in \mathbb{K}, \text{ para todo } x \in E\}$ al cual dotamos de la topología producto, es decir la topología más débil que vuelve las proyecciones canónicas continuas.

Definimos ahora una aplicación $\Psi : E' \longrightarrow D$ escribiendo $\Psi(T) = (T(x))_{x\in E}$. Vemos entonces que Ψ es una aplicación lineal, inyectiva y continua de E', dotado de la topología débil-$*$, sobre D dotado de la topología producto. En efecto, si V_{d^*} es una vecindad del origen de E' y si W es una vecindad del origen de D, vemos que se tiene que si $T - S \in V_{d^*}$ entonces $\Psi(T) - \Psi(S) \in W$, de donde se obtiene la continuidad de Ψ por el Corolario 1.1.1. Por un argumento similar se tiene además que la aplicación $\Psi^{-1} : \Psi(E') \longrightarrow E'$ es continua.

Basta entonces verificar que el conjunto $\Psi(K_0)$ es compacto. Para ello observamos que $\Psi(K_0) = A_1 \cap A_2$ en donde

$$A_1 = \{\alpha \in D : |\alpha_x| \leq p(x), \text{ para todo } x \in E\} = \prod_{x\in E} [-p(x), p(x)]$$

y

$$A_2 = \{\alpha \in D : \alpha_{x+\lambda y} = \alpha_x + \lambda\alpha_y, \text{ para todo } x, y \in E \text{ y } \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Por el teorema de Tychonov, en su versión no numerable, se tiene que el conjunto A_1 es compacto, mientras que por la continuidad de las proyecciones canónicas se obtiene que A_2 es un conjunto cerrado y de esta manera se deduce que el conjunto $\Psi(K_0)$ es compacto. Entonces, como $K \subset K_0$ es un subconjunto cerrado de un compacto, se obtiene que K es compacto para la topología débil-$*$. ■

Con este resultado se obtiene un resultado de compacidad muy importante, que puede ser aplicado a los conjuntos más generales que se obtienen al modificar la constante 1 en la fórmula (1.36). El lector observará que es el primer resultado de este tipo que enunciamos en el marco de las topologías débiles; es un por lo tanto un avance considerable. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas es a veces útil combinar la propiedad de compacidad con la extracción de subsucesiones convergentes. En efecto, como el lector puede recordarlo en la Sección 1.2.2 del Volumen 1, cuando se trabaja sobre espacios métricos, se dispone de la noción de *compacidad secuencial*[25] que es equivalente a la noción topológica de compacidad. Dado que esta propiedad de extracción de subsucesiones es la que realmente interviene

[25] Un espacio métrico es secuencialmente compacto si de toda sucesión se puede extraer una subsucesión convergente.

en la mayoría de aplicaciones, es necesario estudiar la metrizabilidad de la topología débil-$*$ con el siguiente resultado:

Teorema 1.4.6 (Condición de metrizabilidad de la topología débil-$*$) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado. Entonces la topología débil-$*$ de E' es metrizable si y solo si E posee una base algébrica numerable.*

Demostración. Recordemos para empezar que un espacio vectorial E admite una base algébrica numerable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si cada uno de los vectores de E puede expresarse como una combinación lineal *finita* de los elementos de esta base.

Supongamos que el espacio $(E', \sigma(E', E))$ admite una distancia $d_{E'}$ compatible con la estructura topológica débil-$*$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, por definición de vecindad débil-$*$, existe un subconjunto finito A_n de E tal que, si $T \in E'$ verifica $|T(x)| < 1$ para todo $x \in A_n$, entonces se tiene $T \in B(0, \frac{1}{n}) = \{S \in E' : d_{E'}(0, S) < \frac{1}{n}\}$. Consideramos el subconjunto de E, a lo sumo numerable, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ y sea $x_0 \in A$. Existe entonces $n \in \mathbb{N}^*$ tal que si $T \in E'$ verifica $|T(x)| < 1$ para todo $x \in A_n$ entonces $|T(x_0)| < 1$. Definimos las aplicaciones $e_x : T \longmapsto T(x)$, de donde se deduce que $\bigcap_{x\in A_n} Ker(e_x) \subset Ker(e_{x_0})$. Aplicamos entonces el Lema 1.4.2 para obtener que e_{x_0} es combinación lineal del conjunto $\{e_x : x \in A\}$. Utilizamos ahora el hecho que E' separa los puntos de E para obtener que x_0 es una combinación lineal de los elementos de A, de manera que A es un conjunto que genera E y esto muestra que E posee una base algébrica numerable.

Recíprocamente, si E posee una base algébrica numerable $\mathcal{B}$, la topología débil-$*$ definida sobre E' es asociada a una familia, a lo sumo numerable, de semi-normas $\{T \in E' : p_x(T) = |T(x)|, \quad x \in \mathcal{B}\}$, de donde se tiene, por la Proposición 1.3.5 del Volumen 1, que E' es metrizable. ■

Corolario 1.4.6 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de Fréchet de dimensión infinita. Entonces su espacio dual E' dotado de la topología débil-$*$ no es metrizable.*

Demostración. Supongamos que E' dotado de la topología débil-$*$ es metrizable; entonces, por el Teorema 1.4.6 anterior, el espacio E debe poseer una base algébrica numerable. Sea pues $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base algébrica numerable de E, entonces cada subespacio vectorial de dimensión finita de E es un conjunto cerrado y por lo tanto el conjunto $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ es de interior vacío. Como hemos supuesto que E es un espacio de Fréchet, en virtud del lema de Baire, se obtendría de la reunión de todos estos subconjuntos, es decir E, también sería de interior vacío, de donde se obtiene la contradicción buscada. ■

El Teorema 1.4.6 junto con el corolario anterior muestran que, tanto con la topología débil sobre E como la topología débil-$*$ sobre E', presentan problemas para obtener estructuras más fuertes (metrizabilidad, normabilidad) si el espacio E es de dimensión infinita. En particular, sobre la topología débil-$*$ de E' este corolario indica que no es posible conjugar directamente la noción de compacidad secuencial con los resultados de compacidad anteriormente obtenidos.

Sin embargo, cuando se trabaja sobre *ciertos subconjuntos* del espacio dual E' y, si se añade una hipótesis de *separabilidad*, se obtiene el siguiente resultado importante:

Teorema 1.4.7 (Metrizabilidad del conjunto polar en la topología débil-$*$) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separable y sea K el conjunto polar de E'. Entonces K es metrizable para la topología débil-$*$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto numerable denso en E. Consideremos la aplicación $f_n(T) = T(x_n)$ para todo $T \in E'$. Por definición de la topología débil-$*$ se tiene que cada aplicación f_n es débil-$*$ continua. Además, si $f_n(T) = f_n(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $T(x_n) = S(x_n)$ para todo

$n \in \mathbb{N}$ de donde se deduce que $T = S$ pues ambas formas lineales son continuas sobre E y coinciden sobre un subconjunto denso. De esta manera se obtiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de aplicaciones continuas que separan los puntos de E'. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|f_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Construimos ahora una distancia sobre K de la siguiente manera

$$d(T, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-1}|f_n(T) - f_n(S)|.$$

Esta funcional es efectivamente una distancia pues las aplicaciones f_n separan los puntos. Notaremos $\mathcal{T}_d$ la topología definida sobre K por esta distancia.

Notamos entonces que cada aplicación f_n es débil-$*$ continua y que la serie anterior converge uniformemente sobre $K \times K$, se tiene pues que d es una función débil-$*$ continua sobre $K \times K$ y entonces las bolas $B(T, r) = \{S \in K : d(T, S) < r\}$ son conjuntos débilmente-$*$ abiertos, de manera que $\mathcal{T}_d \subset \sigma(E', E)$. Dado que esta topología $\mathcal{T}_d$ está generada por una distancia, se tiene que $\mathcal{T}_d$ es una topología separada. Finalmente aplicamos ahora la Proposición 1.4.1 para obtener la identidad entre $\mathcal{T}_d$ y $\sigma(E', E)$ sobre el conjunto K. ■

Observación 1.34 Nótese que se exige la *separabilidad* del espacio E para obtener que un subconjunto de E' es metrizable en la topología débil-$*$.

Este resultado de metrizabilidad en estos subconjuntos tiene como inmediata consecuencia práctica el corolario siguiente

Corolario 1.4.7 (Compacidad secuencial) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separable y sea E' su espacio dual. Si V es una vecindad del origen de E y si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas de E' tal que $|T_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in V$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una subsucesión $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una aplicación lineal continua $T \in E'$ tal que*

$$T(x) = \lim_{k\to+\infty} T_{n_k}(x) \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Dicho de otra manera, el conjunto polar de V es secuencialmente compacto en la topología débil-$*$.

Prueba. Basta conjugar el teorema de Banach-Aloaglu-Bourbaki 1.4.5 con el Teorema 1.4.7 y aplicar el Teorema 1.2.3 del Volumen 1 para obtener que el conjunto polar de V es secuencialmente compacto; es decir que de toda sucesión se puede extraer una subsucesión convergente. ■

Es importante, para finalizar esta subsección, notar la gran diferencia existente entre la topología débil -que posee finalmente pocas propiedades- y la topología débil-$*$ que permite tener un número considerable de resultados interesantes. Es por esta razón que siempre se prefiere trabajar sobre una topología débil-$*$. ¿Debe descartarse por este motivo la topología débil? Evidentemente no, y vamos a ver que en ciertos casos particulares, que son en realidad los más utilizados, se tiene que estas dos topologías coinciden.

1.4.3. Dualidad y reflexibilidad en los espacios de Banach

En las secciones precedentes, hemos considerado la dualidad sobre espacios localemente convexos que son espacios relativamente generales. Cuando los espacios que entran en consideración son espacios de Banach, las propiedades que se obtienen son más fáciles de manipular y esta subsección está dedicada su exposición. Presentaremos además cómo identificar las topologías débiles y las topologías débil-$*$ introduciendo el concepto de espacio *reflexivo* y daremos algunas caracterizaciones de esta propiedad.

Para una mayor claridad en la presentación, hemos dividido estos temas en tres párrafos.

A) Dualidad sobre los espacios de Banach

Cuando se dispone de mayor estructura, muchos de los diferentes resultados enunciados anteriormente poseen variantes que son a menudo más simples de formular. En esta subsección, vamos a mostrar primero qué estructura natural se obtiene sobre los espacios duales de espacios de Banach, para luego estudiar algunas propiedades interesantes que surgen al nivel de las topologías débiles.

El siguiente resultado es un primer paso en la comprensión de las propiedades de los espacios duales en el marco de los espacios de Banach.

Teorema 1.4.8 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados. Sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua, entonces la cantidad*

$$\|T\|_{E\to F} = \inf \left\{ C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E \right\}$$

es una norma sobre el espacio vectorial $\mathscr{L}(E, F)$. Si además F es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{L}(E, F)$ es un espacio de Banach.

Demostración. El hecho de ver que la cantidad $\|\cdot\|_{E\to F}$ es una norma ha sido verificado después de la Definición 1.1.11 dada en la página 15 y hemos dado algunas caracterizaciones útiles de esta cantidad en la observación 1.12; de manera que nos concentramos únicamente en demostrar que el espacio $\mathscr{L}(E, F)$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{E\to F}$. Sea pues $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $(\mathscr{L}(E, F), \|\cdot\|_{E\to F})$. Como se tiene

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\|_{E\to F}\|x\|_E \tag{1.37}$$

y como $T_n - T_m$ tiende hacia 0 si $n, m \to +\infty$, se tiene que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F para todo $x \in E$, de donde se obtiene que el límite

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

existe. Se tiene sin problema que $T : E \to F$ es lineal. Si $\varepsilon > 0$ y si n, m son suficientemente grandes, se tiene la siguiente mayoración para (1.37): $\|T(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$ para todo m suficientemente grande. Por lo tanto $\|T(x)\|_F \leq (\|T_m\|_{E\to F} + \varepsilon)\|x\|_E$, de manera que $T \in \mathscr{L}(E, F)$ y se tiene $\|T_n - T_m\|_{E\to F} \leq \varepsilon$, de donde se deduce que $T_m \to T$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{E\to F}$. El espacio $\mathscr{L}(E, F)$ es entonces un espacio normado completo. ■

Cuando el espacio F es el cuerpo de los escalares, tenemos el corolario a continuación:

Corolario 1.4.8 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Entonces el espacio dual E' es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_{E'}$ definida por*

$$\|T\|_{E'} = \inf \left\{ C > 0 : |T(x)| \leq C\|x\|_E, \quad \textit{para todo } x \in E \right\}.$$

Es interesante observar que, en las hipótesis del Teorema 1.4.8, el espacio inicial E no es necesariamente un espacio completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_E$, mientras que el espacio dual E' siempre lo es con respecto a la norma dual $\|\cdot\|_{E'}$ puesto que el espacio de llegada $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach. Esto ilustra, una vez más, que las propiedades del rango de las aplicaciones lineales consideradas son de gran importancia. Pero sobre todo, este resultado nos dice que si partimos de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$, su espacio dual E' también es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{E'}$ y esto nos proporciona una topología “natural” sobre E'. Conviene por lo tanto estudiar con más detalle las relaciones de esta topología con las otras estructuras topológicas presentadas en las líneas anteriores y esto será tratado en el párrafo siguiente.

Damos ahora un resultado que relaciona el corchete de cualidad canónico con las normas de los espacios puestos en dualidad.

Proposición 1.4.9 (Continuidad fuerte del corchete de dualidad canónico) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Entonces el corchete de dualidad canónico entre E y E' es una forma bilineal continua.*

Prueba. Por la estimación (1.16) de la norma de una forma lineal continua se tiene la siguiente estimación: $|T(x)| \leq \|T\|_{E'}\|x\|_E$. Dado que, por definición del corchete de dualidad canónico se tiene $\langle x, T\rangle_{E\times E'} = T(x)$ podemos escribir

$$|\langle x, T\rangle_{E\times E'}| \leq \|T\|_{E'}\|x\|_E, \tag{1.38}$$

lo que muestra la continuidad de esta aplicación bilineal. ■

El adjetivo *fuerte* está relacionado con el hecho que la constante que interviene en la estimación (1.38) es exactamente igual a 1. Esto será de gran utilidad en lo que sigue.

Pasemos ahora a algunas propiedades adicionales que se obtienen al nivel de la topología débil cuando los espacios considerados son espacios de Banach.

Proposición 1.4.10 *Sea $(E\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Toda sucesión débilmente convergente es fuertemente acotada.*

Prueba. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ una sucesión débilmente convergente. Definimos una aplicación $\phi : E' \longrightarrow c(\mathbb{N})$, en donde $c(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones que convergen hacia un límite, por $\phi(T) = T(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato verificar que ϕ es una aplicación lineal y, por hipótesis se tiene que el grafo de ϕ es cerrado puesto que la sucesión $(T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en un espacio completo. Aplicando el Teorema 1.3.4 del grafo cerrado se tiene entonces que esta aplicación es continua, es decir que $\|\phi\|_{E'\to c} < +\infty$. Aplicando el Corolario 1.2.1-2) se obtiene entonces que $\|\phi\|_{E'\to c} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|_E$ y se obtiene el resultado deseado. ■

Mostramos una variante del Teorema 1.4.4 en el caso de los espacios normados: insistimos en la pérdida estructural que se realiza al considerar la topología débil.

Teorema 1.4.9 (Problemas de metrizabilidad de la topología débil) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado de dimensión infinita y sea E' su espacio dual. Entonces el espacio E, dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$ no es metrizable.*

Prueba. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y supongamos que $(E, \sigma(E, E'))$ puede ser metrizado por medio de una distancia d_E. Recordemos que en esta situación la familia de semi-normas que determinan la topología de espacio localmente convexo $\sigma(E, E')$ es numerable. Ahora, si esta distancia es compatible con la estructura topológica débil, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ es posible fijar un número finito de formas lineales continuas $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : |T_{i_j}(x)| < 1\} \subset \{x \in E : d_E(0, x) < \frac{1}{n}\}.$$

Entonces, para toda forma lineal continua $T \in E'$ existe n tal que $d_E(0, x) < \frac{1}{n} \Longrightarrow |T(x)| < 1$; se deduce en particular que $T_{i_1}(x) = ... = T_{i_n}(x) = 0$ implica $|T(x)| < 1$. Reemplazando x por λx y haciendo tender $\lambda \to +\infty$ se tiene que $T_{i_1}(x) = ... = T_{i_n}(x) = 0$ implica $T(x) = 0$ y por el Lema 1.4.2 se tiene que T es una combinación lineal de las formas lineales $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$. De esta manera el subespacio F_n engendrado por $T_{i_1}, ..., T_{i_n} \in E'$ es de dimensión finita, es por lo tanto un conjunto cerrado y se tiene $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Aplicando el Corolario 1.3.1 al espacio E', que por el Corolario 1.4.8 es un espacio métrico completo -y por lo tanto es espacio de Baire- se tiene que al menos uno de los conjuntos F_n posee un punto interior. Se deduce entonces que $F_n = E'$ y por lo tanto que $dim(E') < +\infty$. Aplicamos ahora la Proposición 1.2.2 para obtener que E es de dimensión finita, lo cual es una contradicción. ■

Este resultado muestra que, inclusive en los espacios de Banach, en donde se dispone de mayor estructura, y sin otras hipótesis adicionales, la topología débil posee pocas propiedades: en particular, esta topología no es metrizable en el caso de la dimensión infinita.

B) Los espacios bi-duales, pre-duales y topologías asociadas

Vimos en las líneas precedentes que, si se parte de un espacio de Banach E, su espacio dual E' también es un espacio de Banach. Es posible entonces tomar como punto de partida el espacio de Banach E' y estudiar lo que sucede si se considera el espacio dual de E'. Las propiedades del *espacio dual del espacio dual* son muy útiles y, para facilitar su comprensión, es necesario fijar un poco de terminología.

Definición 1.4.8 (Espacio bidual) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. El conjunto de todas las formas lineales continuas definidas sobre el espacio dual E' es el espacio* bidual *de E y será notado E''. Los elementos x'' de E'' son entonces las aplicaciones lineales $x'' : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ que son continuas en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{E'}$.*

Definición 1.4.9 (Espacio predual) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Llamaremos* espacio predual de E *a todo espacio de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ tal que $B' = E$.*

Ilustramos esta situación de esta manera:

$$E \overset{dual}{\longrightarrow} E' \overset{dual}{\longrightarrow} E''$$

Aquí, E'' es el espacio bidual de E y se tiene que E es el espacio predual de E' mientras que E' es el espacio predual de E''.

El Corolario 1.4.8 nos da una primera información sobre las propiedades del espacio bidual. En efecto, dado que E es un espacio de Banach, E' también lo es; reaplicando este resultado se obtiene que el espacio bidual E'' es un espacio de Banach. Más precisamente se tiene el resultado a continuación

Proposición 1.4.11 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, entonces su espacio bidual E'' es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{E''}$ determinada por*

$$\|x''\|_{E''} = \sup_{\|T\|_{E'}\leq 1} \{|\langle T, x''\rangle_{E'\times E''}|\}$$

La verificación sigue exactamente las mismas líneas que las del Teorema 1.4.8 de manera que los detalles quedan a cargo del lector.

Evidentemente, si nos limitamos a estudiar el espacio bidual E'' simplemente como el dual de E' se obtienen básicamente las mismas propiedades de la sección anterior; de manera que es más interesante investigar las propiedades de E' y de E'' en función del espacio inicial E: en efecto, cuando el espacio bidual E'' entra en acción, se obtienen una serie de topologías distintas tal como lo indica el gráfico a continuación.

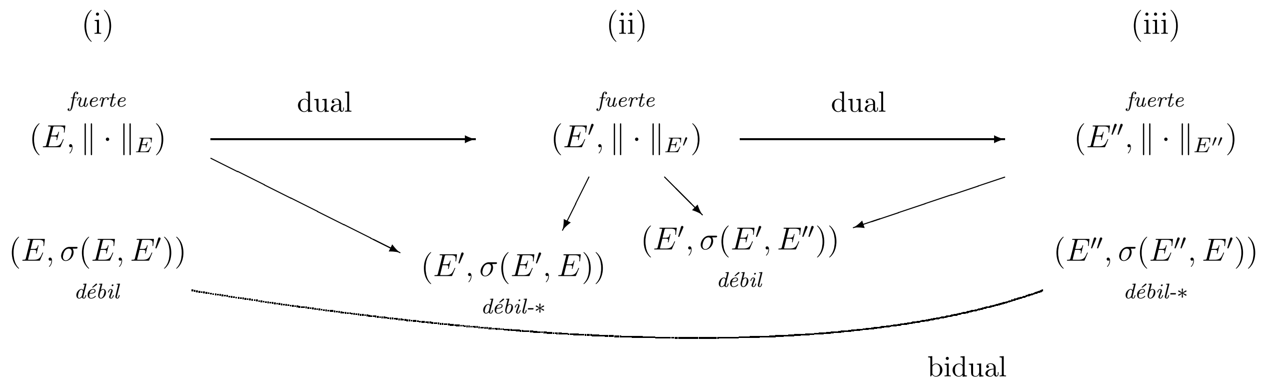

Figura 1.7: Topologías iniciales, débiles, débiles estrella, espacios duales y espacios biduales.

Aclaremos un poco la situación.

(i) Sobre el espacio de Banach inicial E se dispone de *dos* topologías: la topología *fuerte* (o *inicial*) dada por la norma $\|\cdot\|_E$ y la topología *débil* $\sigma(E, E')$.

(ii) Sobre el espacio de Banach dual E' se dispone de *tres* topologías: la topología *fuerte* $\|\cdot\|_{E'}$ que le proporciona su estructura de espacio de Banach, la topología *débil-*$*$ $\sigma(E', E)$ que proviene de la dualidad con E y la topología *débil* $\sigma(E', E'')$ proveniente de la dualidad[26] con E''.

(iii) Sobre el espacio de Banach bidual E'' se dispone de *dos* topologías: la topología *fuerte* $\|\cdot\|_{E''}$ y la topología *débil-*$*$ $\sigma(E'', E')$.

Los puntos (i) y (iii) no se prestan a ningún tipo de confusión pues han sido estudiados por separado en las páginas anteriores. En la situación central, es decir en el caso (ii), es necesario ser más precisos con la proposición a continuación que compara las tres topologías presentes.

Proposición 1.4.12 *Sea E un espacio de Banach, E' su espacio dual y E'' su espacio bidual. En la situación del gráfico 1.7 anterior, se tiene la siguiente relación entre las tres topologías definidas sobre el espacio dual E' de un espacio de Banach E:*

$$\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}} \tag{1.39}$$

en donde hemos notado $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$ la topología definida sobre E' por la norma $\|\cdot\|_{E'}$.

Dicho de otra manera, la topología débil-$*$ es más débil que la topología débil, que a su vez es más débil que la topología fuerte.

Prueba. Sabemos por la Proposición 1.4.5 que la topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$ es más fuerte que la topología debilitada $\sigma(E', E'')$, de manera que se tiene la inclusión $\sigma(E', E'') \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E'}}$.

Mostremos ahora que la topología $\sigma(E', E)$ es más débil que la topología $\sigma(E', E'')$. Recordemos que por la Proposición 1.4.3 se tiene que la topología $\sigma(E', E)$ puede ser caracterizada por las seminormas

$$p_x(T) = |\langle x, T\rangle_{E\times E'}| = |T(x)|$$

[26]Esta topología puede verse como la topología *debilitada* de la topología fuerte $\|\cdot\|_{E'}$.

en donde $x \in E$ y donde el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times E'}$ entre E y E' es el corchete de dualidad canónico. De la misma manera, la topología $\sigma(E',E'')$ puede ser caracterizada por las semi-normas

$$p_{x''}(T) = |\langle T, x''\rangle_{E'\times E''}| = |x''(T)|$$

con $x'' \in E''$ y el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E'\times E''}$ entre E' y E'' es el corchete de dualidad canónico.

Dado que por el Lema 1.2.3 existe una forma lineal $x'' \in E''$ tal que $x''(T) = T(x)$ para todo $T \in E'$, se tiene que las semi-normas $p_x(T)$ son semi-normas para la topología $\sigma(E',E'')$; de manera que se obtiene la inclusión $\sigma(E',E) \subset \sigma(E',E'')$. ■

Observación 1.35 Notemos que en el caso de la dimensión finita, todas estas tres topologías definidas sobre E' son equivalentes.

Notación:

- Escribiremos B, B' y B'' para designar las bolas abiertas de los espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ y $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ respectivamente.
- Como acabamos de ver, cuando un espacio de Banach E' posee un espacio predual (lo cual no siempre es el caso como lo veremos un poco más adelante) se tienen al menos tres estructuras topológicas. Distinguiremos las vecindades de estas estructuras notando V_f para la topología de espacio normado $(E', \|\cdot\|_{E'})$, V_d para la topología débil y V_{d^*} para la topología débil-$*$.

Una vez que estas notaciones han sido fijadas, vamos a concentrarnos al estudio de la parte central de la figura 1.7. En efecto, ya que se dispone de tres estructuras diferentes, es tiempo de sacar provecho de esta situación explicando las propiedades que se obtienen en este caso.

Teorema 1.4.10 (de Aloaglu) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado separable y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Entonces la bola unidad cerrada $\overline{B'} = \{T \in E' : \|T\|_{E'} \leq 1\}$ es un espacio métrico débilmente-$*$ compacto.*

Demostración. Este resultado fundamental es una consecuencia directa del Teorema 1.4.5 de Banach-Alaoglu-Bourbaki junto con el Teorema 1.4.7. En efecto, sabemos que el conjunto $\{T \in E' : |T(x)| \leq 1 : \text{con } \|x\|_E \leq 1\}$ es compacto para la topología débil-$*$. Utilizando la observación 1.12 sobre las normas de las aplicaciones lineales en espacios normados, tenemos que este conjunto se escribe

$$\{T \in E' : \sup_{\|x\|_E \leq 1} |T(x)| \leq 1\} = \{T \in E' : \|T\|_{E'} \leq 1\} = \overline{B'},$$

de donde se obtiene que la bola unidad fuerte $\overline{B'}$ es compacta para la topología débil-$*$. La metrizabilidad de este conjunto es inmediata a partir del Teorema 1.4.7. ■

Este resultado de compacidad muestra todo el interés de trabajar sobre topologías débiles: en efecto si el espacio considerado E' es de dimensión infinita, la bola unidad cerrada $\overline{B'}$ de la topología fuerte *nunca es compacta*. Nótese además que a la luz de los resultados anteriores, la bola $\overline{B'}$ *tampoco es necesariamente compacta para la topología débil*, de manera que para obtener esta importante propiedad de compacidad es necesario debilitar aún más las estructuras topológicas considerando la topología débil-$*$.

Vamos ahora a estudiar las relaciones existentes entre conjuntos acotados y la propiedad de compacidad. Por homotecia de la bola unidad cerrada, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.4.9 *Sea E un espacio de normado y sea E' su espacio dual. Entonces todo conjunto fuertemente acotado en el espacio $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es débilmente-$*$ relativamente compacto.*

Prueba. En efecto, si $A \subset E'$ es un conjunto fuertemente acotado, existe $\tau > 0$ tal que $\overline{A} \subset \tau \overline{B'}$ de donde se deduce por el Teorema 1.4.10 anterior que A es débilmente-$*$ relativamente compacto. ∎

Este resultado nos proporciona una caracterización de los conjuntos acotados con la proposición a continuación.

Proposición 1.4.13 (Caracterización de los conjuntos acotados) *Sean E un espacio de Banach, E' su espacio dual y sea A una parte de E'. Se tienen las equivalencias siguientes:*

1) A es débilmente-$*$ acotado,

2) A es fuertemente acotado,

3) A es débilmente-$*$ relativamente compacto.

Prueba. La implicación 1) $\Longrightarrow$ 2) es una consecuencia del principio de acotación uniforme dado en el Teorema 1.3.6. En efecto, el hecho que el subconjunto $A \subset E'$ sea débilmente-$*$ acotado, significa que $\sup\limits_{T\in A}|T(x)| < +\infty$ para todo $x \in E$. Aplicando este teorema se tiene que $\sup\limits_{T\in A}\|T\|_{E'} < +\infty$, es decir que A es fuertemente acotado. Para obtener la implicación recíproca 2) $\Longrightarrow$ 1), basta ver que si A es fuertemente acotado en $(E', \|\cdot\|_{E'})$ al existir más semi-normas continuas sobre $(E', \sigma(E', E))$ se tiene que A es débilmente-$*$ acotado. La implicación 2) $\Longrightarrow$ 3) se tiene directamente por el corolario anterior. Finalmente 3) $\Longrightarrow$ 1) se obtiene utilizando la Proposición 1.1.5. ∎

Observación 1.36 Cabe mencionar aquí que, cuando se trabaja sobre un espacio E' que es el espacio dual de un espacio de Banach E, entonces las nociones de acotación fuerte y débil-$*$ coinciden. Además por la Proposición 1.4.12, se tiene gracias al resultado anterior que las nociones de acotación coinciden en las tres topologías definidas sobre E': no es por lo tanto necesario precisar en qué sentido estos conjuntos son acotados. Esto muestra la utilidad de trabajar con este tipo de conjuntos.

Para finalizar, damos una caracterización de la convergencia débil-$*$ en el marco de los espacios de Banach:

Proposición 1.4.14 *Sea E un espacio de Banach y E' su espacio dual. Una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$ converge débilmente-$*$ si y solo si, para todo $x \in E$ la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite. La sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces acotada y si notamos T su límite se tiene*

$$\|T\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty}\|T_n\|_{E'}.$$

Además, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ que converge hacia un límite $x \in E$, la sucesión $(T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $T(x)$.

Prueba. Si la sucesión $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite para todo $x \in E$, el principio de acotación uniforme nos dice que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente-$*$ hacia un elemento $T \in E'$. Notamos ahora que $|T_n(x)| \leq \|T_n\|_{E'}\|x\|_E$ para todo $x \in E$, de donde se obtiene que

$$|T(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty}\|T_n\|_{E'}\|x\|_E.$$

Dado que la sucesión $(\|T_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, esto muestra, por el principio de acotación uniforme que T es una aplicación continua que verifica

$$\|T\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty}\|T_n\|_{E'}.$$

∎

Con este resultado terminamos nuestra exposición sobre las diferentes propiedades que se obtienen al estudiar las propiedades que aparecen en un espacio de Banach E' en función de su espacio dual E'' y de su espacio predual E, tal como lo muestra la figura 1.7. Nótese en particular que en dimensión infinita, la única estructura que tiene por el momento propiedades lo suficientemente interesantes al nivel de la compacidad es la topología débil-$*$.

C) Reflexividad: consecuencias y propiedades

Del estudio anteriormente realizado, podría pensarse que la única topología sobre la cual es deseable trabajar es la topología débil-$*$, pues es en ella en donde hemos enunciado la mayoría de propiedades interesantes. Sin embargo, y este es el punto realmente importante de esta sección, cuando un espacio de Banach es *reflexivo*, se tiene que la topología débil-$*$ coincide con la topología débil. Vamos a ver entonces que es posible juntar los dos extremos de la figura 1.7 y este hecho tiene consecuencias que conviene estudiar en detalle: en efecto, gracias a una aplicación muy especial mostraremos que existe una inyección de un espacio de Banach E en su espacio bidual E''. Las repercusiones de esta inyección al nivel de las estructuras topológicas son muy interesantes y, adelantándonos un poco, permiten justificar plenamente el uso de la topología débil.

Necesitamos, para empezar, describir una aplicación "natural" entre un espacio de Banach E y su espacio bidual E'' que estará a la base de muchos resultados.

Definición 1.4.10 (Aplicación canónica entre un espacio de Banach y su espacio bidual) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual y $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio bidual. Construimos una aplicación, llamada la* aplicación canónica *entre E y E'', por medio de la expresión*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{J} : E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & \mathscr{J}(x) \end{array}$$

en donde $\mathscr{J}$ asocia a todo elemento $x \in E$ una forma lineal continua definida sobre E' y determinada por la fórmula $\mathscr{J}(x)(T) = T(x)$.

Hay que asegurarse que esta aplicación que acabamos de presentar está bien definida. Para ello hay que verificar que, para todo x la aplicación $\mathscr{J}(x)$ pertenece efectivamente a E'', es decir que es una forma lineal continua definida sobre E'. Vemos pues, por la fórmula $\mathscr{J}(x)(T) = T(x)$, que la aplicación $\mathscr{J}(x)$ es lineal dado que $\mathscr{J}(x)(T+S) = (T+S)(x) = T(x)+S(x) = \mathscr{J}(x)(T)+\mathscr{J}(x)(S)$ en donde $T, S \in E'$. Debemos ahora comprobar que la forma lineal $\mathscr{J}(x)$ es continua: basta verificar para todo $T \in E'$ la estimación $|\mathcal{J}(x)(T)| \leq C\|T\|_{E'}$. Pero esto es inmediato por las definiciones de $\mathcal{J}(x)(T)$ y de la norma $\|\cdot\|_{E'}$ pues esta desigualdad se reescribe como $|T(x)| \leq C \sup\limits_{\|y\|_E=1} |T(y)|$.

Esto muestra que se tiene *siempre* la inclusión $\mathscr{J}(E) \subset E''$, pero es posible decir un poco más al respecto de esta aplicación canónica, en particular se tiene la propiedad siguiente.

Proposición 1.4.15 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual, $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio bidual y la $\mathscr{J}$ aplicación canónica entre E y E''. Entonces $\mathscr{J}$ es una isometría lineal, para las topologías fuertes respectivas, de E en un subconjunto de E''.*

Prueba. Basta verificar que $\mathscr{J}$ es una isometría pues sabemos por las lineas anteriores que $\mathscr{J}$ es una aplicación lineal y que $\mathscr{J}(E) \subset E''$. Dado que, por el Corolario 1.2.2 página 25, se tiene que

$$\|\mathscr{J}(x)\|_{E''} = \sup_{T\in E', \|T\|_{E'}\leq 1} |T(x)| = \|x\|_E,$$

se deduce sin problema que $\mathscr{J}$ es una isometría. ■

Observación 1.37 Esta isometría se puede escribir con la ayuda de los corchetes de dualidad canónicos de esta manera:

$$\langle T, \mathscr{J}(x)\rangle_{E'\times E''} = \langle x, T\rangle_{E\times E'}$$

Si estudiamos ahora lo que sucede al nivel de las topologías débiles, tenemos el resultado a continuación.

Proposición 1.4.16 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado. La aplicación canónica $\mathscr{J}$ es un isomorfismo de $(E, \sigma(E, E'))$ sobre el conjunto $\mathscr{J}(E) \subset E''$ dotado de la topología $\sigma(E'', E')$.*

Prueba. La topología $\sigma(E, E')$ está definida por medio de las semi-normas $p_T : x \longmapsto |T(x)|$ mientras que la topología $\sigma(E'', E')$ está dada por las semi-normas $q_T : x'' \longmapsto |x''(T)|$. A partir de esto observamos que se tiene $p_T = q_T \circ \mathscr{J}$, lo que muestra que la biyección lineal $\mathscr{J} : E \longrightarrow \mathscr{J}(E)$ es un isomorfismo para estas dos topologías. ■

Los resultados enunciados en las proposiciones 1.4.15 y 1.4.16 nos indican que será a veces muy útil identificar un espacio de Banach E con el espacio $\mathscr{J}(E)$. De esta manera podemos ver E como un subconjunto de E'' y esto tiene una consecuencia interesante:

Proposición 1.4.17 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Si E' es un espacio separable, entonces la bola unidad $\overline{B}_E$ es metrizable para la topología $\sigma(E, E')$.*

Prueba. Este resultado se deduce directamente de la identificación entre topologías dada en la Proposición 1.4.16 y del Teorema 1.4.7. ■

Sabemos por las líneas precedentes que $\mathscr{J}(E)$ es un subconjunto de E'', pero no sabemos qué tan grande o pequeño es el conjunto $\mathscr{J}(E)$ con respecto a E''. El siguiente teorema nos da una primera respuesta al nivel de las bolas unidades.

Teorema 1.4.11 (Goldstine) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio dual y sean $\overline{B}$ y $\overline{B''}$ la bolas unidad cerradas de E y E'' respectivamente. Entonces $\mathscr{J}(\overline{B})$ es un subconjunto denso en $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$.*

Nótese que la noción de *tamaño* está dada por la propiedad de densidad del conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ en el conjunto $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$.

Demostración. Dado que $\mathscr{J}$ es una isometría de E en E'' se tiene que $\mathscr{J}(\overline{B})$ está contenido en $\overline{B''}$. Supongamos ahora que existe un punto $x_0'' \in \overline{B''}$ que no pertenece a la adherencia de $\mathscr{J}(\overline{B})$ para la topología $\sigma(E'', E')$. Como el conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ es convexo y equilibrado[27], entonces su adherencia también lo es. En efecto, como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es convexo, si consideramos la aplicación $f_t : E\times E \longrightarrow E$ tal que $f_t(x, y) = tx + (1-t)y$, se tiene que $f_t(\mathscr{J}(\overline{B}) \times \mathscr{J}(\overline{B})) \subset \mathscr{J}(\overline{B})$ para todo $0 \leq t \leq 1$. La continuidad de f_t implica entonces que $f_t\left(\overline{\mathscr{J}(\overline{B})} \times \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}\right) \subset \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ lo que muestra que $\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ es convexo. Sea ahora la aplicación continua $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$, como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es equilibrado entonces $h_\lambda(\mathscr{J}(\overline{B})) \subset \mathscr{J}(\overline{B})$ para todo $|\lambda| \leq 1$. Como esta aplicación es continua se tiene entonces que $h_\lambda(\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}) \subset \overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ si $|\lambda| \leq 1$. Tenemos pues que el conjunto $\overline{\mathscr{J}(\overline{B})}$ es un convexo cerrado. Podemos entonces utilizar el Teorema 1.2.4 y la linealidad de las aplicaciones en juego, para obtener una forma lineal $T \in E'$ tal que $|x''(T)| \leq 1$ para todo $x'' \in \mathscr{J}(\overline{B})$ y tal que $x_0''(T) > 1$. De esto se deduce que $|T(x)| \leq 1$ para todo $x \in \overline{B}$ lo que significa que $\|T\|_{E'} \leq 1$ y por lo tanto que $|x_0''(T)| \leq 1$ lo que contradice la desigualdad $x_0''(T) > 1$. ■

[27]Ver la Sección 1.3.3 del Volumen 1 para las definiciones.

Utilizando las traslaciones y homotecias se tiene el corolario siguiente:

Corolario 1.4.10 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, entonces $\mathscr{J}(E)$ es un subconjunto denso en E'' para la topología débil-$*$ $\sigma(E'', E')$.*

Hemos visto que se tiene siempre la inclusión $\mathscr{J}(E) \subset E''$ y con el resultado anterior vemos que es posible ser un poco más precisos, en el sentido que $\mathscr{J}(E)$ no está muy lejos de ser todo el conjunto E''. Sin embargo, la aplicación $\mathscr{J}$ no es necesariamente sobreyectiva, es decir que no hay ningún motivo para tener en toda generalidad la igualdad de conjuntos $\mathscr{J}(E) = E''$ y esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.4.11 (Espacio Reflexivo) *Un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es* reflexivo *si la isometría canónica $\mathscr{J}$ de E en E'' es sobreyectiva. Es decir si $\mathscr{J}(E) = E''$.*

Observación 1.38 Nótese que en la práctica, para determinar si un espacio de Banach es reflexivo, es suficiente verificar que $\mathscr{J}(\overline{B}) = \overline{B''}$. Veremos posteriormente otro tipo de caracterizaciones.

El hecho de usar la isometría canónica $\mathscr{J}$ es esencial en esta definición. En efecto, existen espacios de Banach que no son reflexivos en el sentido de la definición anterior, pero para los cuales es posible construir una isometría sobreyectiva entre ellos y sus espacios biduales. El lector que desea saber más detalles puede leer el artículo [**?**].

Tendremos la oportunidad de mostrar varios ejemplos de espacios de Banach que verifican esta propiedad. Sin embargo, antes de entrar en estos detalles, y de ver con mayor detalle cómo caracterizar esta noción, consideramos importante anunciar directamente el principal interés de trabajar con este tipo de espacios:

Teorema 1.4.12 (Identificación de topología débil y débil-$*$) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo y sea E' su espacio dual. Entonces, sobre E' la topologías $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$ coinciden y la injección canónica $\mathscr{J}$ es un isomorfismo de E en E'' para las topologías $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$.*

Demostración. Si E es reflexivo, entonces la aplicación $\mathscr{J}$ de E en E'' es sobreyectiva. Basta entonces utilizar la Proposición 1.4.16 para obtener la identificación entre estas dos estructuras topológicas. ■

Esta identificación de las topologías débiles y débiles-$*$ tiene muchas consecuencias. En particular se tiene la situación a continuación que simplifica considerablemente la figura 1.7 dada en la página 66.

$$
\begin{tikzcd}
\text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \\
\overset{\textit{fuerte}}{(E, \|\cdot\|_E)} \arrow[r, "\text{dual}"] & \overset{\textit{fuerte}}{(E', \|\cdot\|_{E'})} \arrow[r, "\text{dual}"] & \overset{\textit{fuerte}}{(E, \|\cdot\|_E)} \\
\underset{\textit{débil}}{(E, \sigma(E, E'))} \arrow[rr, dash, bend right, "\text{bidual}"'] & \underset{\textit{débil}}{(E', \sigma(E', E))} & \underset{\textit{débil}}{(E, \sigma(E, E'))}
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.8: Topologías iniciales y débiles en un espacio reflexivo

Cuando un espacio normado es reflexivo, al disponer de la equivalencia entre topologías débiles y débiles-$*$, se obtiene una serie de resultados interesantes. La primera proposición que damos proporciona una caracterización de los conjuntos relativamente compactos y los conjuntos acotados.

Proposición 1.4.18 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo. Un subconjunto A de E es débilmente relativamente compacto si y solo si A es un subconjunto acotado.*

Prueba. El punto de partida está dado por la identificación entre las topologías débiles y débiles-$*$ dada en el Teorema 1.4.12. En efecto, sabemos por la observación 1.36 que sobre un espacio de Banach no hace falta precisar en qué sentido los conjuntos son acotados. Esto implica que si un conjunto es débilmente relativamente compacto se tiene que este conjunto es débilmente acotado por la Proposición 1.1.5 y es entonces fuertemente acotado. La recíproca está dada por el Corolario 1.4.9. ■

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria y suficiente para obtener la reflexividad de un espacio de Banach.

Teorema 1.4.13 (Kakutani) *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ es reflexivo si y solo si su bola unidad cerrada $\overline{B}$ es débilmente compacta.*

Demostración. Empecemos suponiendo que E es reflexivo, se tiene entonces por definición que $\mathscr{J}(\overline{B}) = \overline{B''}$ y se tiene además que la bola $\overline{B''}$ es compacta para la topología $\sigma(E'', E')$. Puesto que esta estructura coincide con la topología débil $\sigma(E, E')$ se tiene que $\overline{B''}$ es débilmente compacta, de donde se deduce que $\overline{B}$ es débilmente compacta.

Recíprocamente, si la bola $\overline{B}$ es débilmente compacta, entonces $\mathscr{J}(\overline{B})$ es compacta para la topología $\sigma(E'', E')$ por la Proposición 1.4.16 y es en particular un conjunto cerrado de E''. Como $\mathscr{J}(\overline{B})$ es denso en $\overline{B''}$ por el teorema de Goldstine 1.4.11, se obtiene que $\overline{B''} = \mathscr{J}(\overline{B})$. De esta manera, aplicando el Corolario 1.4.10 se obtiene que $E'' = \mathscr{J}(E)$ y se deduce que E es un espacio reflexivo. ■

Observación 1.39 Hay que tener un poco de cuidado con el enunciado de este resultado que nos dice lo siguiente: sea E un espacio normado, si E es reflexivo, entonces la bola unidad $\overline{B}$ es compacta para la topología débil $\sigma(E, E')$. La confusión puede aparecer cuando se considera un espacio dual E' cuya bola unidad $\overline{B'}$ *siempre* es compacta para la topología débil estrella $\sigma(E', E)$: en este último caso el concepto de reflexibilidad no interviene y el lector debe tener cuidado pues la situación no es la misma.

Continuamos con nuestra presentación de las propiedades de los espacios de Banach reflexivos.

Lema 1.4.4 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo. Entonces todo subespacio cerrado F de E es reflexivo.*

Prueba. Por el teorema de prolongación de Hahn-Banach, toda forma lineal continua definida sobre F es la restricción a F de una forma lineal continua sobre E. De este hecho se tiene entonces que la topología $\sigma(E, E')$ induce sobre F la topología $\sigma(F, F')$. Por el Teorema 1.4.13 se tiene que la bola unidad $\overline{B}$ de E es débilmente compacta, entonces como F es débilmente cerrado se tiene que $\overline{B} \cap F$ (es decir la bola unidad cerrada de F) es un conjunto compacto para la topología $\sigma(E, E')$ y por lo tanto es compacto para la topología inducida $\sigma(F, F')$. Aplicando una vez más el Teorema 1.4.13 se tiene que F es reflexivo. ■

Proposición 1.4.19 *Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ es reflexivo si y solo si su espacio dual $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que E es reflexivo y sea Z un elemento del bidual de E', es decir Z es una forma lineal continua sobre el espacio de Banach E''. Se tiene entonces que $T = Z \circ \mathscr{J}$ es una forma lineal continua sobre E y que para todo $x'' \in E''$ se tiene

$$Z(x'') = (Z \circ \mathscr{J} \circ \mathscr{J}^{-1})(x'') = (Z \circ \mathscr{J})(\mathscr{J}^{-1}(x'')) = (Z \circ \mathscr{J})(x) = T(x)$$

y esto muestra que E' es reflexivo.

Recíprocamente si E' es reflexivo, entonces por las líneas precedentes se tiene que E'' es reflexivo y entonces E es isométrico a un subespacio cerrado de E'', de manera que E es reflexivo por el Lema 1.4.4. ■

Esta proposición nos permite estudiar desde otro punto de vista el gráfico 1.8. En efecto, en vez de partir del espacio reflexivo E, podemos empezar desde el espacio dual E' para obtener:

$$E' \longrightarrow E \longrightarrow E'$$

De esta manera, el espacio que se encuentra en la posición central (la que disponía del mayor número de propiedades) es el espacio E y vamos a sacar provecho de esta situación.

Recordemos que, para considerar aspectos métricos en subconjuntos de la topología débil-$*$ (ver el Teorema 1.4.7), era necesario añadir una hipótesis adicional que es la separabilidad del espacio considerado.

Cuando se trabaja sobre espacio reflexivos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.4.14 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo, cuyo espacio dual $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es separable. Entonces toda parte fuertemente acotada de E es metrizable para la topología débil.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 1.4.7 que la bola unidad fuerte de un espacio dual (en este caso el espacio E) es metrizable para la topología débil-$*$. Pero como el espacio en cuestión es reflexivo, se tiene que la topología débil coincide con la topología débil-$*$. Como además las nociones de conjuntos acotados coinciden para todas las topologías fuertes y débiles definidas sobre E; y como el espacio E' es separable, se obtiene el resultado deseado aplicando este resultado de metrizabilidad general dado en el Teorema 1.4.7. ■

Este resultado muestra la importancia de estudiar la separabilidad de un espacio E en función de la separabilidad de su espacio dual E'. Esto explica la necesidad del lema a continuación:

Lema 1.4.5 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y sea $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual.*

1) Si E' es separable para la topología fuerte, entonces E es separable para la topología fuerte.

2) Si E es separable para la topología fuerte, entonces E' es separable para la topología débil-$*$.

Prueba.

1) Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en E'. Por definición de la norma $\|\cdot\|_{E'}$, existe $x_n \in E$, tal que $\|x_n\|_E = 1$ con $\|T_n\|_{E'} \leq 2|T_n(x_n)|$ y consideramos entonces el subespacio vectorial F generado por la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea ahora T una forma lineal continua que se anula sobre F, como E' es separable, existe una subsucesión $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge hacia T y se tiene

$$\|T - T_{n_k}\|_{E'} \geq |(T - T_{n_k})(x_{n_k})| = |T_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|T_{n_k}\|_{E'}.$$

de donde se deduce que la subsucesión $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia 0, de donde se obtiene que la aplicación T es idénticamente nula. Aplicamos ahora el Corolario 1.2.6 página 32 para obtener que el espacio E es separable.

2) Podemos escribir $E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B'_n}$ en donde $\overline{B'_n} = \{T \in E' : \|T\|_{E'} \leq n\}$ es un conjunto débilmente-$*$ compacto y metrizable. Entonces $\overline{B'_n}$ es un subconjunto separable de E' dotado de la topología débil-$*$: existe por lo tanto una parte numerable D_n de $\overline{B'_n}$ tal que $\overline{B'_n} \subset \overline{D_n}$ en el sentido de la cerradura débil-$*$. De esto se obtiene que el conjunto numerable $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ es denso en E' dotado de la topología débil-$*$. ■

Tenemos ahora un teorema que estudia las subsucesiones convergentes en los espacios de Banach reflexivos. Lo interesante de este resultado es que no será necesario exigir una hipótesis de separabilidad.

Teorema 1.4.15 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo, entonces toda sucesión acotada de E contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de E y sea F el subespacio vectorial cerrado generado por esta sucesión. Entonces F es un espacio de Banach separable y reflexivo por el Lema 1.4.4 y por lo tanto F'' también es reflexivo, de donde usando el Lema 1.4.5 se obtiene que F' es un espacio separable. En este punto basta aplicar el Teorema 1.4.14 para extraer una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente en F. Es decir que existe un elemento $x \in F \subset E$ tal que para todo $T \in F'$ la sucesión $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia $T(x)$ y esto se mantiene para toda forma lineal $T \in E'$. ■

Como acabamos de ver, cuando un espacio de Banach es reflexivo y separable, se dispone de una cierta cantidad de propiedades que son de gran utilidad, principalmente porque se conjugan las propiedades de la topología débil-$*$ con las propiedades de la topología débil, lo cual representa una economía considerable.

Sabemos por el Teorema 1.4.9 que la topología débil no es metrizable (inclusive en conjuntos débilmente compactos) y esto parece ser un obstáculo significativo para usar argumentos secuenciales. Sin embargo, el siguiente teorema nos indica que se puede aplicar este tipo de argumentos secuenciales en conjuntos débilmente compactos:

Teorema 1.4.16 (Eberlein-Smulian) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea A un subespacio de E. Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) el conjunto A es débilmente compacto,

2) el conjunto A es débilmente secuencialmente compacto: de toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y un elemento $x \in A$ tal que x_{n_k} converge débilmente hacia x.

Demostración. La implicación 1) $\Longrightarrow$ 2) se debe a Eberlein[28] mientras que la recíproca 2) $\Longrightarrow$ 1) se debe a Smulian[29]. Demostraremos aquí unicamente la primera implicación, la segunda implicación puede consultarse en [**?**].

Sea A una parte de E débilmente compacta y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A. Notemos F el subespacio vectorial cerrado engendrado por esta sucesión: se tiene inmediatamente que F es separable y entonces el espacio dual F' es separable para la topología débil-$*$ por el Lema 1.4.5-2). Sea ahora una sucesión $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de F' que es densa para la topología débil-$*$. Por construcción, vemos que cada forma lineal T_j no es más que la restricción al subespacio F de una forma lineal más general, que seguiremos notando T_j, definida sobre todo el espacio E. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, se obtiene que las sucesiónes $(T_j(x_n))$ son acotadas. Se puede entonces extraer una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(T_j(x_{n_k}))$ converja. Como el conjunto A es débilmente relativamente compacto,

[28]William Eberlein (1917-1986), matemático norteamericano.
[29]Vitold Smulian (1914-1944), matemático ruso.

la sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admite un punto de acumulación x para la topología débil y se tiene que este punto x pertenece a F pues éste último conjunto es cerrado. Ahora, como las formas lineales T_j son continuas para la topología débil-$*$, se tiene que $T_j(x)$ es un punto de acumulación de la sucesión $(T_j(x_{n_k}))$, de donde se deduce que $\lim\limits_{k\to+\infty} T_j(x_{n_k}) = Tj(x)$. Vemos además que la sucesión (x_{n_k}) admite un solo punto de acumulación x, de lo contrario se tendría $T_j(x) = T_j(y)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y esto implica que $T(x-y) = 0$ para toda forma lineal $T \in F'$ por la densidad de la sucesión $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de donde se deduce que $x = y$. Se tiene entonces que la sucesión (x_{n_k}) converge débilmente. ■

Observación 1.40 Sabemos que se tiene esta equivalencia en el marco general de los espacios métricos. Como la topología débil no es metrizable en un espacio de Banach de dimensión infinita, es necesario utilizar este teorema y esto muestra toda la fuerza de este resultado.

Continuemos con nuestra exposición. Vimos con el Teorema 1.4.13 de Kakutani y con la Proposición 1.4.19, dos maneras distintas de verificar si un espacio de Banach es reflexivo. Sin embargo, estos dos resultados que permiten caracterizar la reflexividad no siempre son muy fáciles de verificar y es por esto que vamos a presentar ahora un concepto que permite estudiar, de forma relativamente rápida y sencilla, cuando un espacio de Banach tiene la propiedad de reflexividad. En particular vamos ver cómo un resultado de naturaleza métrica puede influir, de forma sorprendente, en un resultado de naturaleza topológica. Para ello necesitaremos la definición siguiente

Definición 1.4.12 (Norma uniformemente convexa) *Sea E un espacio vectorial. Diremos que una norma $\|\cdot\|_E$ definida sobre E es* uniformemente convexa *si*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\left[\forall x, y \in E\ :\ \|x\|_E \leq 1, \|y\|_E \leq 1, \|x-y\|_E > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E < 1-\delta\right]$$

Diremos entonces que el espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es uniformemente convexo.

Esta definición significa que las bolas correspondientes a las normas deben ser relativamente *redondas*. Para cerciorarse de este hecho es útil ver lo que sucede en $\mathbb{R}^2$:

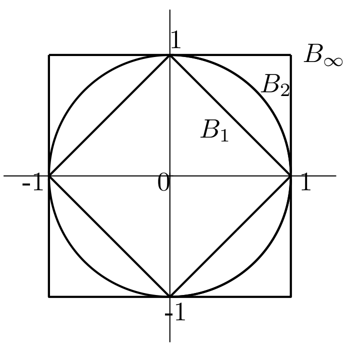

Figura 1.9: Diferentes bolas unidades en $\mathbb{R}^2$

Estas bolas unidades B_1, B_2 y B_∞ corresponden a las normas $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, $\|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ respectivamente. Un estudio rápido muestra que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son uniformemente convexas pues no son lo suficientemente redondas, mientras que la norma $\|\cdot\|_2$ sí lo es.

Observación 1.41 El ejemplo simple anterior sobre $\mathbb{R}^2$ muestra que la uniforme convexidad no es estable al pasar a otra norma equivalente.

El principal interés de trabajar con espacios uniformemente convexos es que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.4.17 (Milman-Pettis) *Si* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach uniformement convexo entonces* $(E, \|\cdot\|_E)$ *es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Vamos a proceder por el absurdo suponiendo que E es un espacio uniformemente convexo pero que no es reflexivo, es decir que podemos suponer que existe un elemento x'' de la bola unidad cerrada $\overline{B''}$ tal que $\|x''\|_{E''} = 1$ y tal que la distancia de x'' a $\mathscr{J}(\overline{B})$ sea igual a $2\varepsilon > 0$.

Dado que por el Teorema 1.4.11 de Goldstine se tiene que el conjunto $\mathscr{J}(\overline{B})$ es denso en $\overline{B''}$ para la topología débil-$*$, se tiene que para toda vecindad W_{d^*} de x'' existe un $x \in \overline{B}$ tal que $\mathscr{J}(x) \in W_{d^*}$. Dicho de otra manera, para toda vecindad débil W_{d^*} de x'' se tiene que x'' pertenece a la cerradura débil-$*$ del conjunto $W_{d^*} \cap \mathscr{J}(\overline{B})$.

Ahora, para este $\varepsilon > 0$ fijado, le corresponde un $\delta > 0$ en la definición de convexidad uniforme. Podemos entonces considerar una forma lineal $T \in E'$ tal que $\|T\|_{E'} = 1$ con $|x''(T) - 1| < \delta$ y podemos definir el conjunto $W = \{y'' \in E'' : |y''(T) - 1| < \delta\}$. De esta manera, si consideramos $y'', z'' \in W \cap \mathscr{J}(\overline{B})$, se tiene que si $|y''(T) + z''(T)| > 2 - 2\delta$ entonces $\|y'' + z''\|_{E''} > 2 - 2\delta$, pero por la isometría de la aplicación $\mathscr{J}$ y por la definición de convexidad uniforme se obtiene entonces que $\|y'' - z''\|_{E''} < \varepsilon$. Si fijamos z'' se tiene entonces que $W \cap \mathscr{J}(\overline{B}) \subset z'' + \varepsilon\overline{B''}$. Dado que el conjunto $z'' + \varepsilon\overline{B''}$ es débilmente-$*$ cerrado, se obtiene que si x'' pertenece a la cerradura débil-$*$ de $W \cap \mathscr{J}(\overline{B})$ entonces $x'' \in z'' + \varepsilon\overline{B''}$, lo que contradice el hecho que el punto x'' se encuentra a una distancia mayor de 2ε de $\mathscr{J}(\overline{B})$. ■

Observación 1.42 Este teorema da una condición necesaria para obtener la reflexividad, pero no es una condición suficiente: existen espacios de Banach reflexivos para los cuales no existe ninguna norma equivalente uniformemente convexa. Sin embargo, este es un criterio bastante cómodo que será utilizado en la práctica.

Con este resultado terminamos nuestra exposición sobre los espacios de Banach reflexivos. Insistimos sobre la gran utilidad de estos espacios que permiten obtener en una sola estructura todas las propiedades de las topologías débiles y débiles-$*$.

1.4.4. Envolturas convexas y puntos extremales

Como hemos podido apreciar con los resultados expuestos en la secciones anteriores, la situación que posee el mayor número de propiedades corresponde a la parte central de la figura 1.7 página 66. Es decir que, cuando un espacio normado posee a la vez un espacio predual y un espacio dual, es posible sacar mucho provecho de las tres estructuras topológicas representadas en este gráfico.

De la misma manera que en el cálculo elemental en donde el proceso de *derivación* puede resultar intuitivamente más sencillo que el proceso inverso de búsqueda de una primitiva, se tiene en el análisis funcional que la obtención del conjunto de formas lineales continuas definidas sobre un espacio E -es decir la obtención de un espacio dual E'- es un problema relativamente más directo de estudiar que el que consiste en encontrar el conjunto F que hace que todos los elementos de este espacio E sean precisamente formas lineales definidas sobre F -es decir la obtención de un espacio predual de E.

Los resultados evocados en el primer párrafo de esta subsección hacen que la búsqueda de este espacio predual resulte de especial interés: esto permitiría situar al espacio considerado *en el centro* de la figura 1.7. Guiados por esta motivación, vamos a estudiar el teorema de Krein-Milman a partir del cual es posible obtener resultados sobre la eventual existencia de espacios preduales. Este teorema hace intervenir las nociones de envoltura convexa, conjuntos totalmente acotados y de puntos extremales y es por esta razón que será necesario hacer una introducción a estas nociones que ofrecen un interés independiente pues poseen varias aplicaciones adicionales.

Recordemos para empezar que una *combinación convexa* de vectores es una combinación lineal en dónde todos los coefficientes son positivos y de suma uno. Es decir que, dada una colección de vectores $x_1, ..., x_n$, su combinación convexa es un vector x definido por la expresión

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad \text{con } \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Definición 1.4.13 (Envoltura convexa) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $A \subset E$ un subconjunto de E. La* envoltura convexa *de A, notada $co(A)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos de E que contienen A. De forma equivalente, $co(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas finitas de los elementos de A.*

Nótese que se tiene que $A \subset co(A)$: así por ejemplo, en el plano, si se consideran tres puntos a, b, c distintos, se tiene que $co(\{a, b, c\})$ es el triángulo que se obtiene tomando estos puntos como vértices. Esto muestra que la envoltura convexa de un conjunto puede ser muy diferente del conjunto inicial y que sus distintas propiedades pueden resultar muy particulares. Evidentemente, si A es un conjunto convexo, se tiene $A = co(A)$.

Hemos visto en secciones anteriores las relaciones existentes entre conjuntos acotados y conjuntos compactos, en particular vimos que todo conjunto compacto es un conjunto acotado. Uno de lo objetivos de esta sección es estudiar las relaciones entre conjuntos compactos y sus envolturas convexas, pues estos ingredientes intervienen en el enunciado del teorema de Krein-Milman, de manera que para llevar a cabo esta misión es necesario precisar un poco la noción de conjunto acotado.

Definición 1.4.14 (Conjuntos Totalmente acotados)

1) Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. Un subconjunto A de E es totalmente acotado *en E si para cada vecindad V del origen de E corresponde un conjunto finito F tal que $A \subset F + V$.*

2) Sea (E, d_E) un espacio métrico. Un subconjunto A de E es totalmente acotado *en E si A está contenido en la unión finita de bolas abiertas de radio ε para todo $\varepsilon > 0$.*

Si E es un espacio vectorial topológico metrizable, entonces estas dos condiciones coinciden si nos restringimos a las distancias compatibles con la estructura topológica.

El siguiente lema nos indica una primera relación entre los conjuntos compactos y los conjuntos totalmente acotados en los espacios métricos completos.

Lema 1.4.6 *Sea K un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo (E, d_E); entonces los tres puntos siguientes son equivalentes*

1) K es compacto,

2) si A es conjunto infinito de K, entonces cada sucesión de A posee un punto límite en K,

3) K es totalmente acotado.

Prueba. Empezamos suponiendo que se tiene 1) y supongamos que ningún punto de K es el límite de una sucesión de puntos de A, entonces existe un recubrimiento abierto $(V_i)_{i \in I}$ de K tal que cada V_i contiene al menos un punto de A. Esto implica que de $(V_i)_{i \in I}$ no se puede extraer un subrecubrimiento finito lo cual es una contradicción con el hecho que K es compacto, de donde se tiene que 1) $\Longrightarrow$ 2).

Supongamos ahora que se tiene 2). Fijemos $\epsilon > 0$ y sea $x_1 \in K$. Supongamos que hemos fijado $x_1, ..., x_n \in K$ puntos tales que $d_E(x_i, x_j) \geq \epsilon$ si $i \neq j$. De ser posible, fijamos $x_{n+1} \in K$ tal que $d_E(x_i, x_{n+1}) \geq \epsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$. Dado que hemos supuesto que se tiene el punto 2), este proceso debe terminarse después de un número finito de pasos, de lo contrario no se cumpliría la condición $d_E(x_i, x_j) \geq \epsilon$. Se tiene entonces que las bolas centradas en los puntos $x_1, ..., x_n$ de radio ϵ forman un recubrimiento de K de manera que se tiene que 2) $\Longrightarrow$ 3).

Finalmente, suponemos que se tiene el punto 3). Sea Λ un recubrimiento abierto de K y supongamos que ninguna subfamilia de Λ recubre K. Sabemos por hipótesis que K es la unión finita de conjuntos cerrados de diámetro $r \leq 1$. Se tiene entonces que uno de estos conjuntos, digamos C_0, no puede ser recubierto por medio de una familia finita de elementos de Λ. Podemos repetir este proceso tomando C_0 en vez de K y el resultado es una sucesión de conjuntos cerrados C_i tales que $K \supset C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 ...$, tales que $diam(C_n) \leq 1/n$ y tales que ningún C_n puede ser recubierto por una familia finita de elementos de Λ. Fijemos ahora un punto $x_n \in C_n$. Dado que el espacio métrico E es completo y que cada conjunto C_n es cerrado se obtiene que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que converge hacia un punto $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. por lo tanto se tiene que $x \in V$ para alguna vecindad $V \in \Lambda$. Dado que $C_n \subset V$ si n es suficientemente grande se obtiene una contradicción y se concluye que 3) $\Longrightarrow$ 1). ∎

Necesitaremos el resultado que sigue pues clarifica lo que sucede en el caso de la dimensión finita:

Lema 1.4.7 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y si $x \in co(A)$, entonces x pertenece a la envoltura convexa de algún subconjunto de A que contiene a lo mucho $n + 1$ puntos.*

Prueba. Es suficiente mostrar que si $k > n$ y si $x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$ es una combinación convexa de vectores $x_i \in \mathbb{R}^n$, entonces x es en realidad una combinación convexa de k de estos vectores. Para ello asumimos, sin pérdida de generalidad que $t_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq k + 1$. Observamos ahora que el núcleo de la aplicación

$$(a_1, ..., a_{k+1}) \longmapsto (\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i)$$

que envía $\mathbb{R}^{k+1}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tiene dimensión positiva puesto que $k > n$. Existe por lo tanto un vector $(a_1, ..., a_{k+1})$ no nulo tal que $\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$. Dado que $t_i > 0$, existe una constante $c > 0$ tal que $|ca_i| \leq t_i$ para todo i y $ca_j = t_j$ para al menos un cierto j. Definimos ahora $b_i = t_i - ca_i$ y obtenemos que $x = \sum_{i=1}^{k+1} b_i x_i$ y que al menos uno de estos b_i es nulo. Notamos también que $\sum_{i=1}^{k+1} b_i = \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$ y que $b_i \geq 1$ para todo i. Hemos verificado que es posible reducir el número de vectores de $k + 1$ a k en la representación convexa del vector x. ∎

Con estos lemas obtenemos la proposición siguiente que explica, en diversos casos, algunas relaciones entre los conjuntos compactos y su envoltura convexa.

Proposición 1.4.20

1) Sea E un espacio vectorial topológico y sean $A_1, ..., A_n$ subconjuntos convexos compactos. Entonces $co(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ es un conjunto compacto.

2) Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Si $A \subset E$ es totalmente acotado, entonces $co(A)$ es un conjunto totalmente acotado.

3) Si $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet y si $K \subset E$ es un conjunto compacto, entonces $\overline{co}(K)$ es un conjunto compacto.

4) Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces $co(K)$ es un conjunto compacto.

Demostración.

1) Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por los vectores $s = (s_1, ..., s_n)$ con $s_i \geq 0$ y tal que $s_1 + \cdots + s_n = 1$. Sea $A = \prod_{i=1}^n A_i$ y definamos la función f por medio de la expresión

$$\begin{array}{rcl} f : S \times A & \longrightarrow & E \\ (s, x) & \longmapsto & f(s,x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n s_i x_i \end{array}$$

Definamos ahora $K = f(S \times A)$. Dado que todos los conjuntos A_i son compactos, se tiene que K es compacto y se tiene por construcción que $K \subset co(\bigcup_{i=1}^n A_i)$. Para demostrar que $co(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ es un conjunto compacto, vamos a demostrar que $co(\bigcup_{i=1}^n A_i) \subset K$.
Vemos que si (s, x) y (t, y) son elementos de $S \times A$ y si $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ son dos escalares, entonces

$$\alpha f(s, x) + \beta f(t, y) = f(r, z)$$

en donde $r = \alpha s + \beta t$ y $z \in A$ puesto que se tiene

$$z_i = \frac{\alpha s_i x_i + \beta t_i y_i}{\alpha s_i + \beta t_i} \in A_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Esto muestra que K es un conjunto convexo. Como se tiene $A_i \subset K$ para cada i, la convexidad de K implica que $co(\bigcup_{i=1}^n A_i) \subset K$ y así terminamos la demostración del primer punto.

2) Sea U una vecindad del origen de E y fijemos una vecindad convexa V del origen de E tal que $V + V \subset U$. Entonces se tiene que $A \subset F + V$ para algún conjunto finito $F \subset E$. Por lo tanto $A \subset co(F) + V$ y observamos que el conjunto $co(F) + V$ es convexo, por lo tanto $co(A) \subset co(F) + V$.
Por el primer punto, se tiene que $co(F)$ es compacto y por lo tanto $co(F) \subset F_1 + V$ para algún conjunto finito $F_1 \subset E$. Se tiene entonces $co(A) \subset F_1 + V + V \subset F_1 + U$, dado que la vecindad U era arbitraria se tiene que $co(A)$ es totalmente acotado.

3) Las cerraduras de conjuntos totalmente acotados son conjuntos totalmente acotados en cada espacio métrico y usando el Lema 1.4.6 vemos que estos conjuntos son compactos en todo espacio métrico completo. Por lo tanto, si K es un conjunto compacto en un espacio de Fréchet entonces K es totalmente acotado y entonces $co(K)$ es totalmente acotado. Aplicamos entonces el punto anterior para obtener que $\overline{co}(K)$ es un conjunto compacto.

4) Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ determinado por todos los vectores $t = (t_1, ..., t_{n+1})$ tales que $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Por el Lema 1.4.7 se tiene que $x \in co(K)$ si y solo si

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$$

para algún $t \in S$ y $x_i \in K$. Dicho de otra manera $co(K)$ es la imagen de $S \times K^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$ bajo la aplicación continua $(t, x_1, ..., x_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$ y por lo tanto $co(K)$ es un conjunto compacto. ■

Cuando el espacio dual E' de un espacio vectorial separa los puntos (en el sentido de la Definición 1.4.3) se tiene el resultado a continuación que es una versión particular del Teorema 1.2.4 de separación de convexos.

Proposición 1.4.21 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico tal que E' separa sus puntos. Si A, B son dos conjuntos disjuntos, no vacíos, convexos y compactos de E, entonces existe una forma lineal $T \in E'$ tal que*

$$\sup_{x\in A} \Re e(T(x)) < \inf_{y\in B} \Re e(T(y))$$

Prueba. Notamos, por comodidad, E_σ el espacio E dotado de su topología débil $\sigma(E, E')$. Vemos que los conjuntos A y B son compactos en E_σ y son cerrados en E_σ puesto que E_σ es un espacio separado. Como E_σ es localmente convexo separado podemos aplicar el Teorema 1.2.4 de separación de conjuntos convexos utilizando el espacio E_σ en vez de E: de esta manera se obtiene que existe una forma lineal $T \in (E_\sigma)'$ que satisface las desigualdades buscadas. Pero sabemos, por el Corolario 1.4.2 que $(E_\sigma)' = E'$, lo que termina la prueba. ■

Pasamos ahora a presentar una noción que será de gran utilidad.

Definición 1.4.15 (Conjuntos extremales y puntos extremales) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea A un subconjunto de E.*

1) *Diremos que el conjunto $S \subset A$ es un* conjunto extremal *de A si para todo $x, y \in A$ y todo $0 < t < 1$ tal que $(1-t)x + ty \in S$ se tiene que $x, y \in S$.*

2) *Los* puntos extremales *de A son los conjuntos extremales que están formados por un solo punto. Dicho de otra manera, $x \in A$ es un* punto extremal *si para todo $y, z \in A$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que la identidad $x = ty + (1-t)z$ implica que $x = y$ ó $x = z$.*

El conjunto de todos los puntos extremales de A será notado $\mathcal{E}(A)$.

Observación 1.43 Para verificar que un punto x de un conjunto A no es extremal, basta exhibir dos puntos $y, z \in A$ tal que $x \in A$ pertenece al segmento formado por estos dos puntos. En particular, toda parte del interior de un espacio convexo no puede ser extremal; esto significa que los puntos extremales están de alguna manera "en el borde".

Veamos un ejemplo. Consideremos el cuadrado $A = [0, 1] \times [0, 1]$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Por la observación anterior vemos que todo punto en el interior de A no puede ser extremal, de manera que hay que buscarlos en el borde de A. Sin embargo no todos los puntos del borde del cuadrado son puntos extremales: si fijamos $x_1 \in]0, 1[$ y definimos un punto de $\mathbb{R}^2$ por $(x_1, 0) = x_1(1, 0)$ vemos que este punto no es un punto extremal, a pesar de estar en el borde del cuadrado. Se puede ver sin mayor problema que en este ejemplo los puntos extremales están dados por los vértices del cuadrado.

La noción de borde utilizada anteriormente merece ser precisada. Recordemos que la frontera de un subconjunto A de un espacio topológico está definida por $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Esta notación permite enunciar un resultado que será de gran utilidad, pero antes una definición.

Definición 1.4.16 (Norma estrictamente convexa) *Sea E un espacio vectorial normado. Una norma $\|\cdot\|_E$ definida sobre E es una norma* estrictamente convexa *si para todo $\|x\|_E = \|y\|_E = 1$ con $x \neq y$, con $0 < t < 1$, entonces $\|tx + (1-t)y\|_E < 1$.*
Diremos entonces que el espacio $(E, \|\cdot\|_E)$ es estrictamente convexo.

Es muy importante notar que esta propiedad no se mantiene al pasar a otras normas equivalentes. Demos ahora un ejemplo de aplicación de esta noción de norma estrictamente convexa relativo a los puntos extremales.

Proposición 1.4.22 *Si E es un espacio vectorial normado que admite una norma $\|\cdot\|_E$ estrictamente convexa y si notamos B_E la bola unidad de E, entonces se tiene la identidad*

$$\mathcal{E}(B_E) = \partial B_E.$$

Prueba. Tenemos por la observación anterior que $\mathcal{E}(B_E) \subset \partial B_E$, pues los puntos extremales no pueden ser puntos interiores en los conjuntos convexos. Debemos pues verificar la inclusión recíproca para terminar la demostración, para ello mostraremos que todo punto de la frontera ∂B_E es un punto extremal de la bola unidad y procedemos por el absurdo. Sea $x \in \partial B_E$ un punto que no es extremal, entonces existen dos puntos $y, z \in \partial B_E$ distintos de x y $t \in]0, 1[$ tales que $x = ty + (1-t)z$. Dado que $x \in \partial B_E$ y que la norma es estrictamente convexa, se tiene

$$1 = \|x\|_E = \|ty + (1-t)z\|_E < 1,$$

de donde se obtiene una contradicción: los elementos de la frontera ∂B_E son puntos extremales de la bola unidad. ■

Podemos ahora sí enunciar y demostrar uno de los resultados más importantes de esta subsección. Como lo veremos un poco más adelante, este teorema permitirá verificar si un cierto espacio normado posee o no un espacio predual.

Teorema 1.4.18 (de Krein-Milman) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico tal que E' separa sus puntos. Si K es un conjunto no vacío, convexo y compacto en E, entonces K es la cerradura de la envoltura convexa de sus puntos extremales. Es decir*

$$K = \overline{co}(\mathcal{E}(K)).$$

Demostración. Sea $\mathscr{P}$ la colección de todos los conjuntos extremales compactos de K. Como por hipótesis $K \in \mathscr{P}$ se tiene que este conjunto no es vacío. Empezamos por un par de observaciones:

i) La intersección de cualquier familia no vacía de $\mathscr{P}$ pertenece a $\mathscr{P}$ (a menos que la intersección sea ella mismo vacía),

ii) Si $S \in \mathscr{P}$, si $T \in E'$ es una forma lineal continua, si notamos μ el máximo de $\Re e(T(x))$ sobre S y si definimos el conjunto $S_T = \{x \in S : \Re e(T(x)) = \mu\}$, entonces se tiene que $S_T \in \mathscr{P}$.

El primer punto no causa ningún problema, de manera que nos concentramos en el segundo. Si suponemos que $tx + (1-t)y = z \in S_T$ con $x, y \in K$ y $0 < t < 1$, dado que $z \in S$ y que $S \in \mathscr{P}$, se tiene que $x \in S$ y $y \in S$. Por lo tanto $\Re e(T(x)) \leq \mu$ y $\Re e(T(y)) \leq \mu$. Puesto que $\Re e(T(z)) = \mu$ y que T es una forma lineal, se obtiene que $\Re e(T(x)) = \Re e(T(y)) = \mu$ y entonces se tiene que $x, y \in S_T$.

Fijemos ahora un conjunto $S \in \mathscr{P}$ y sea $\mathscr{P}'$ la colección de todos los elementos de $\mathscr{P}$ que son subconjuntos de S. Vemos que este conjunto no es vacío pues $S \in \mathscr{P}'$ y podemos ordenar parcialmente $\mathscr{P}'$ utilizando la inclusión de conjuntos. Sea ahora Ω una subcolección maximal, totalmente ordenada, de $\mathscr{P}'$ y sea M la intersección de todos los miembros de Ω. Como Ω es una colección de conjuntos compactos, se tiene que $M \neq \emptyset$ y además se tiene que $M \in \mathscr{P}'$. La maximalidad de Ω implica que no existe un subconjunto propio de M que pertenece a $\mathscr{P}$. Podemos ver entonces por el punto *ii*) que cada forma lineal continua $T \in E'$ es constante sobre M, como E' separa los puntos de E se obtiene que M está reducido a un solo punto y por lo tanto M es un punto extremal de K.

Hemos demostrado que

$$\mathcal{E}(K) \cap S \neq \emptyset \tag{1.40}$$

para todo $S \in \mathscr{P}$. Como K es compacto y convexo se tiene que $\overline{co}(\mathcal{E}(K)) \subset K$ y esto muestra que $\overline{co}(\mathcal{E}(K))$ es compacto.

Falta verificar la inclusión recíproca. Para ello procedemos por el absurdo. Supongamos pues que existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin \overline{co}(\mathcal{E}(K))$. La Proposición 1.4.21 nos dice entonces que existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $\Re e(T(x)) < \Re e(T(x_0))$ para cada $x \in \overline{co}(\mathcal{E}(K))$. Si K_T es definido como S_T, entonces se tiene que $K_T \in \mathscr{P}$. Pero por la forma de escoger T se tiene que K_T es disjunto de $\overline{co}(\mathcal{E}(K))$ y esto contradice (1.40). ■

En el caso en que se trabaje sobre espacios localmente convexos separados, es posible utilizar directamente el Teorema 1.2.4 en vez de la Proposición 1.4.21, de manera que repitiendo los mismos argumentos se obtiene:

Corolario 1.4.11 *Si K es un subconjunto compacto de un espacio localmente convexo separado, entonces $K \subset \overline{co}(\mathcal{E}(K))$ y se tiene además $\overline{co}(K) = \overline{co}(\mathcal{E}(K))$.*

Pasamos ahora a estudiar lo que sucede con los puntos extremales del conjunto $\overline{co}(K)$ en relación al conjunto K.

Teorema 1.4.19 (Milman) *Si K es un conjunto compacto de un espacio localmente convexo separado E y si $\overline{co}(K)$ es compacto, entonces todo punto extremal de $\overline{co}(K)$ pertenece a K.*

Demostración. Supongamos que algún punto extremal p de $\overline{co}(K)$ no pertenece a K. Entonces existe una vecindad convexa y equilibrada V del origen tal que

$$(p + \overline{V}) \cap K = \emptyset. \tag{1.41}$$

Fijemos $x_1, ..., x_n$ puntos de K tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V)$. Cada uno de los conjuntos $A_i = \overline{co}(K \cap (x_i + V))$ con $1 \leq i \leq n$ es convexo y compacto puesto que $A_i \subset \overline{co}(K)$. Observamos además que $K \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Entonces, por el punto 1) de la Proposición 1.4.20 tenemos que

$$\overline{co}(K) \subset \overline{co}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = co(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n).$$

Pero la inclusión recíproca también se tiene puesto que $A_i \in \overline{co}(K)$ para cada i de manera que

$$\overline{co}(K) = co(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n). \tag{1.42}$$

En particular, $p = t_1y_1 + \dots + t_ny_n$ en donde cada y_i pertenece a algún A_i con $t_i > 0$ tal que $\sum_i^n t_i = 1$. Escribimos ahora

$$p = t_1y_1 + (1 - t_1)\frac{t_2y_2 + \dots + t_ny_n}{t_2 + \dots + t_n} \tag{1.43}$$

para ver que p es una combinación convexa de dos puntos de $\overline{co}(K)$. Se tiene entonces que p es un punto extremal de $\overline{co}(K)$ y se obtiene utilizando (1.43) que $y_1 = p$, de manera que, para algún i, se tiene

$$p \in A_i \subset x_i + \overline{V} \subset K + \overline{V}$$

lo cual es una contradicción con (1.41). ■

A partir del Teorema 1.4.18 podemos deducir un resultado relativo a la eventual existencia de un espacio predual y de esta manera cumplimos nuestro propósito mostrando cómo el estudio de las envolturas convexas y de los puntos extremales permite tratar este problema.

Tenemos pues el siguiente criterio clásico:

Corolario 1.4.12 (Criterio de existencia de un espacio predual) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado. Sea $\mathcal{E}(\overline{B}_E)$ el conjunto de puntos extremales de la bola unidad cerrada de E.*

1) Si $\overline{B}_E \neq \overline{co}(\mathcal{E}(\overline{B}_E))$, entonces E no es el espacio dual de ningún espacio.

2) Si el conjunto extremal de la bola unidad B_E es vacío, entonces E no es el espacio dual de ningún espacio.

Prueba.

1) Razonamos por una reducción al absurdo: si E es el predual de algún espacio F, por el Teorema 1.4.5 de Banach-Aloaglu-Bourbaki, se tendría que la bola unidad cerrada de E sería compacta para la toplogía débil-$*$. Entonces, por el teorema 1.4.18 de Krein-Milman esta bola sería la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremales; de donde se obtendría una contradicción con el hecho $\overline{B}_E \neq \overline{co}(\mathcal{E}(\overline{B}_E))$.

2) Inmediato a partir de 1): la bola unidad cerrada de un espacio normado nunca es vacía pues contiene el vector cero. ■

1.5. Realización de los espacios duales y aplicación a los espacios de sucesiones

Hasta ahora hemos presentado los diferentes objetos, resultados y conclusiones desde un punto de vista puramente teórico y formal. El objetivo de esta última sección es ilustrar, por medio de casos prácticos elementales, la teoría estudiada en las páginas anteriores. En este sentido nos concentraremos aquí únicamente en los espacios de sucesiones pues permiten mostrar de una manera bastante tangible los diferentes aspectos de esta teoría. La razón de esta elección reside principalmente en el hecho que es posible estudiar directamente estos espacios sin desarrollar ningún tipo de teoría adicional; por el contrario, en el caso de sus homólogos continuos, será necesario disponer de unos cuantos teoremas más, que serán debidamente estudiados en los capítulos siguientes.

Vamos a descomponer esta sección en tres partes. Antes de entrar directamente en los principales detalles, expondremos un algoritmo general para la *realización* de los espacios duales. En un segundo tiempo recordaremos las definiciones y principales propiedades de los espacios de sucesiones, para luego terminar con los resultados relativos a los espacios duales de estos espacios de sucesiones y las aplicaciones concretas de los teoremas y resultados estudiados anteriormente.

1.5.1. Realización de los espacios duales

En esta primera subsección vamos a mostrar cómo los espacios duales pueden ser realizados de forma concreta. Expliquemos un poco esta noción de *realización*.

Definición 1.5.1 (Realización del espacio dual) *Sean E un espacio vectorial topológico, E' su espacio dual y supongamos que tenemos a nuestra disposición un espacio vectorial F y una aplicación lineal ψ de F en E'. Supongamos además que esta aplicación $\psi : F \longrightarrow E'$ es biyectiva. Diremos entonces que el espacio F es una* realización *del espacio dual de E.*

Esta definición debe ser puesta en perspectiva utilizando el Teorema 1.4.3 presentado en la página 52. En efecto, si un espacio E está puesto en dualidad con varios espacios F_1,F_2,... y F_n, se tiene que cada uno de estos espacios es topológicamente isomorfo al espacio dual E' y disponemos entonces de muchas realizaciones posibles: el problema reside por lo tanto en fijar una realización que sea la más adecuada. Para ello, vamos a ser más exigentes con la noción de realización, pues solo aceptaremos las realizaciones que son naturales en cierto sentido. Es decir, de todas las realizaciones posibles, privilegiaremos únicamente las que son interesantes desde el punto de vista del análisis matemático. Por ejemplo, si E es un espacio de funciones, estamos interesados en las realizaciones F de E' que también son espacios de funciones y de igual forma si se trata de espacios de sucesiones. Este programa es interesante; sin embargo, como lo veremos muy pronto, es necesario indicar que no siempre será posible obtener espacios duales de misma naturaleza que los espacios iniciales; pero dejaremos para luego este tipo de consideraciones.

En el caso particular de los espacio de Banach, en donde cada uno de los espacios está dotado de su estructura de espacio normado natural, la realización de los espacios duales se llevará a cabo mediante la construcción de un corchete de dualidad adecuado. En efecto, si tenemos dos espacios de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ y si queremos estudiar las relaciones de dualidad entre estos espacios, debemos mostrar la existencia de una isometría de E' sobre F y esto se realiza por medio de una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$ definida sobre $E \times F$ que verifica ciertas propiedades.

Este proceso general se desarrollará en tres etapas distintas:

1) **Continuidad Fuerte:** La forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$ debe verificar, para todo $x \in E$ y todo $f \in F$, la siguiente desigualdad de *continuidad fuerte*:

$$|\langle x, f \rangle_{E\times F}| \leq \|x\|_E \|f\|_F. \tag{1.44}$$

Recuérdese que, por el Teorema 1.1.3 de la página 18, la continuidad de la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$ se expresa por medio de la desigualdad $|\langle x, f \rangle_{E\times F}| \leq C\|x\|_E \|f\|_F$. El adjetivo *fuerte* se refiere entonces al hecho que se exige aquí que $C = 1$. Esta estimación tiene muchas consecuencias. En particular nos asegura que para cada $f \in F$ fijo la aplicación T_f definida por

$$\begin{array}{rcl} T_f : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \langle x, f \rangle_{E\times F} \end{array}$$

es una forma lineal continua definida sobre E, es decir que $T_f \in E'$, y que además se tiene

$$\|T_f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E = 1} |\langle x, f \rangle_{E\times F}| \leq \|f\|_F.$$

Esto muestra que la aplicación Φ de F en E' definida por

$$\begin{array}{rcl} \Phi : F & \longrightarrow & E' \\ f & \longmapsto & \Phi(f) = T_f \end{array}$$

es lineal y continua y además es una contracción pues es de norma menor o igual a 1: se tiene que $\|\Phi(f)\|_{E'} \leq \|f\|_F$, de donde se deduce que $F \subset E'$.

2) **Isometría:** La forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E\times F}$ debe cumplir la siguiente condición: para todo $f \in F$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in E$ tal que $\|x\|_E \leq 1$ y

$$|\langle x, f \rangle_{E\times F}| \geq \|f\|_F - \varepsilon. \tag{1.45}$$

Esta propiedad nos permite decir que la aplicación $\Phi : f \longmapsto T_f$ es una isometría de F en E'. En efecto, se tiene

$$\|f\|_F - \varepsilon \leq |T_f(x)| \leq \|T_f\|_{E'}$$

y por lo tanto se tiene $\|f\|_F = \|T_f\|_{E'}$ puesto que el real $\varepsilon > 0$ es arbitrario.

3) **Sobreyección:** El último punto consiste en mostrar que la aplicación $\Phi : f \longmapsto T_f$ es sobreyectiva. Para ello se considera una forma lineal y continua L sobre E y se construye un elemento $f \in F$ tal que $\langle x, f \rangle = L(x)$ para todo $x \in E$ y se muestra así que toda forma lineal continua $L \in E'$ puede expresarse con la ayuda de un elemento $f \in F$. Es decir que $F \simeq E'$.

Al proceder de esta manera en la construcción de la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$ obtenemos una realización del espacio dual de E. Para convencer al lector de este hecho, relacionamos ahora esta noción con los conceptos presentados en las páginas anteriores en la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1 *Si una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times F}$ verifica los tres puntos anteriores entonces es un corchete de dualidad entre E y F.*

Prueba. Debemos verificar los dos puntos dados en la Definición 1.4.4 que caracterizan un corchete de dualidad entre dos espacios vectoriales. Vemos en particular, gracias a la desigualdad (1.45) que si $\langle x, f\rangle_{E\times F} = 0$ para todo $x \in E$ entonces se tiene que $f = 0$ pues el real ε es arbitrario. Dado que la aplicación $\Phi : f \longmapsto T_f$ es una isometría sobreyectiva, se puede aplicar el Corolario 1.2.2 y entonces podemos escribir:

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{T\in E'\\ \|T\|_{E'}\leq 1}} |T(x)| \leq |\langle x, f\rangle_{E\times F}|$$

de esta manera vemos que si $\langle x, f\rangle_{E\times F} = 0$ para todo $f \in F$ se tiene que $x = 0$ y con esto hemos demostrado la proposición. ■

Indiquemos que, si bien los puntos 1) y 2) pueden verificarse de forma relativamente directa, el punto 3) se obtiene en cada situación por medio de técnicas particulares que varían según el marco de trabajo. En algunos casos, como en la mayoría de los espacios de sucesiones que serán estudiados en la subsección a continuación, este punto se verifica fácilmente mientras que, en otros casos, como por ejemplo los espacios de Lebesgue, será necesario desarrollar más herramientas.

1.5.2. Definiciones y algunas propiedades de los espacios de sucesiones

Es necesario recordar en la definición a continuación los principales actores de esta sección.

Definición 1.5.2 (Espacios de sucesiones)

- ***Espacios*** $\ell^p(\mathbb{N})$*: sea $0 < p < +\infty$ un real y sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$. Definimos el espacio de sucesiones p-eme sumables con la expresión*

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

- ***Espacio*** $\ell^\infty(\mathbb{N})$*: caracterizamos el espacio de sucesiones acotadas con la fórmula*

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}.$$

- ***Espacio*** $c(\mathbb{N})$*: definimos el espacio de sucesiones convergente hacia un límite con la expresión*

$$c(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} a_n < +\infty \right\}.$$

- ***Espacio*** $c_0(\mathbb{N})$*: notaremos el espacio de sucesiones que tienden hacia cero por*

$$c_0(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \right\}.$$

En el Volumen 1 se hace un primer estudio de las propiedades topológicas de estos espacios. Recopilamos en las proposiciones que siguen los puntos más importantes para el desarrollo de los temas de este capítulo.

Proposición 1.5.2 (Propiedades estructurales)

1) Si $0 < p < 1$, los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ no son normables, pero son espacios métricos completos.

2) Si $1 \leq p < +\infty$, los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ son espacios de Banach para la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$.

3) Los espacios $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $c(\mathbb{N})$ y $c_0(\mathbb{N})$ son espacios de Banach para la norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

Proposición 1.5.3 (Relaciones de inclusión) *Sean p y q dos índices tales que $1 < p < q < +\infty$. Se tienen las siguientes relaciones de inclusión:*

$$\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \cdots \subsetneq \ell^q \subsetneq \cdots \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty$$

Una particularidad que hace que el estudio de estos espacios sea muy agradable, es que se dispone de una base muy importante:

Definición 1.5.3 (base canónica de sucesiones) *El conjunto formado por las sucesiones de tipo $e(j) = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, es decir $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, es llamada la* base canónica *de los espacios de sucesiones.*

Teorema 1.5.1 *Si $1 \leq p < +\infty$, la base canónica de sucesiones $(e(j))_{j\in\mathbb{N}}$ es un sistema total en $\ell^p(\mathbb{N})$, en $c_0(\mathbb{N})$ y en $c(\mathbb{N})$. Estos espacios son por lo tanto espacios de Banach separables.*

Proposición 1.5.4 *El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es separable. Sin embargo, el conjunto $(\mathbb{1}_A)_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ es un sistema total en $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

Las demostraciones de estos hechos, y más informaciones relativas a estos espacios de sucesiones, pueden encontrarse en la Sección 4.6 del Volumen 1.

1.5.3. Resultados generales y algunos ejemplos

En esta última sección vamos a mostrar cómo obtener los espacios duales de los espacios de sucesiones considerados anteriormente. Una vez que se han obtenido las identificaciones de estos diversos espacios duales, aplicaremos directamente la teoría estudiada en todo este capítulo y veremos de qué manera esto permite obtener muchísima información adicional relativa a la estructura topológica de estos espacios, completando así nuestra presentación realizada en el primer volumen.

A) Resultados clásicos

Empezamos ahora con la exposición de una serie de resultados totalmente básicos. En esta subsección vamos a explicitar los espacios duales de todos los espacios de sucesiones que han sido presentados en las sección anterior. Nuestro primer resultado es el siguiente.

Teorema 1.5.2 (Dualidad $\ell^p - \ell^q$) *Sea $1 < p < +\infty$ un real y sea $1 < q < +\infty$ su conjugado armónico, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces el espacio dual del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones $\ell^q(\mathbb{N})$; es decir $(\ell^p)' = \ell^q$.*

Demostración. Para empezar es necesario fijar una forma bilineal que nos servirá de hilo conductor. Definimos entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^p\times\ell^q} : \ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \longmapsto & \langle a,b\rangle_{\ell^p\times\ell^q} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n. \end{array}$$

Verificar que esta aplicación es una forma bilineal es un ejercicio sencillo que es dejado al lector. Vamos ahora aplicar el método explicado en la sección anterior para realizar el dual del espacio de sucesiones $\ell^p(\mathbb{N})$.

1) Continuidad fuerte: esta propiedad se deduce de la desigualdad de Hölder puesto que se tiene para toda sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$|\langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q\right)^{1/q} = \|a\|_{\ell^p}\|b\|_{\ell^q}.$$

Como anunciado, una vez que se fija una cierta sucesión $b \in \ell^q(\mathbb{N})$, este resultado nos permite construir formas lineales continuas T_b definidas sobre $\ell^p(\mathbb{N})$. En efecto, si escribimos

$$\begin{aligned} T_b : \ell^p(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto T_b(a) = \langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}, \end{aligned}$$

se obtiene sin problema que $T_b \in (\ell^p)'$ cuya norma $\|T_b\|_{(\ell^p)'} = \|T_b\|_{\ell^p\to\mathbb{K}}$ (usaremos indistintamente estas dos notaciones) verifica la estimación $\|T_b\|_{\ell^p\to\mathbb{K}} \leq \|b\|_{\ell^p}$. De esta manera se construye toda una familia de formas lineales continuas sobre $\ell^p(\mathbb{N})$, que será notada por $F = \{T_b : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K} : b \in \ell^q\}$; obsérvese que se tiene $F \subset (\ell^p)'$.

2) Isometría: vamos a mostrar que se tiene una isometría entre los espacios $(\ell^p)'$ y F. Para ello fijamos $b \in \ell^q(\mathbb{N})$ una sucesión cualquiera y definimos una nueva sucesión (compleja) escribiendo

$$\begin{cases} a_n = \overline{b_n}|b_n|^{q-2} \text{ si } b_n \neq 0 \\ \\ a_n = 0 \text{ sino.} \end{cases}$$

A partir de esta definición se tiene que $|a_n|^p = |b_n|^{pq-p} = |b_n|^q$ lo que implica inmediatamente que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Se tiene además que

$$\langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q = \|b\|^q_{\ell^q}.$$

Sin embargo, por la continuidad fuerte se tiene $|T_b(a)| = |\langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}| \leq \|a\|_{\ell^p}\|T_b\|_{\ell^p\to\mathbb{K}}$. Ahora, dado que se tiene por construcción $\|a\|_{\ell^p} = \|b\|^{q/p}_{\ell^q}$, podemos deducir que

$$\|b\|^q_{\ell^q} \leq \|b\|^{q/p}_{\ell^q}\|T_b\|_{\ell^p\to\mathbb{K}}$$

pero como $q - q/p = 1$, se obtiene la isometría buscada: $\|T_b\|_{\ell^p\to\mathbb{K}} = \|b\|_{\ell^q}$.

3) Sobreyección: vamos a ver aquí que $(\ell^p)' \subset F$. Para mostrar este punto, consideramos una forma lineal continua T definida sobre $\ell^p(\mathbb{N})$ y vamos a construir una sucesión $b \in \ell^q(\mathbb{N})$ tal que se tenga $T(a) = \langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}$, para todo $a \in \ell^p(\mathbb{N})$.

Empezamos pues definiendo los coeficientes $b_n = T(e_n)$ en donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de sucesiones. Si consideramos $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión finita de orden M (es decir que para todo $n > M$ se tiene $c_n = 0$), entonces se tiene que $c = \sum_{n\leq M} c_n e_n$ y por linealidad se obtiene $T(c) = \sum_{n\leq M} c_n b_n$.

Definimos ahora una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$\begin{cases} a_n = \overline{b_n}|b_n|^{q-2} \text{ si } b_n \neq 0 \text{ y si } n \leq M, \\ \\ a_n = 0 \text{ sino.} \end{cases} \tag{1.46}$$

En las líneas a continuación, adoptaremos la siguiente notación: escribiremos $c^M = (c_n^M)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión truncada $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al nivel M, es decir que todos los coeficientes c_n^M con $n > M$ serán anulados.

Vemos entonces sin problema que, por construcción de la sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada en (1.46), se tiene $T(a) = \|b^M\|_{\ell^q}^q$ y $\|a\|_{\ell^p} = \|b^M\|_{\ell^q}^{q/p}$. Pero sabemos que la forma lineal T es continua y existe por lo tanto una cierta constante $C > 0$ tal que, para toda sucesión $c \in \ell^p(\mathbb{N})$ se tiene $|T(c)| \leq C\|c\|_{\ell^p}$. En particular, para la sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada en (1.46), se tiene $\|b^M\|_{\ell^q}^q = |T(a)| \leq C\|b^M\|_{\ell^p}^{p/q}$ y entonces $\|b^M\|_{\ell^q}^{q-q/p} \leq C$. Pero dado que $q - q/p = 1$ se tiene que $\|b^M\|_{\ell^q} \leq C$. Como esta desigualdad es válida para todo M se deduce finalmente que $b \in \ell^q(\mathbb{N})$. De esta manera vemos que, toda forma lineal continua T definida sobre $\ell^p(\mathbb{N})$ se puede escribir como $T(a) = \langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}$ con $b \in \ell^q(\mathbb{N})$.

Con estos tres puntos, aplicando la Proposición 1.5.1, hemos *realizado* el espacio dual de $\ell^p(\mathbb{N})$ y vemos que este espacio dual corresponde isométricamente al espacio de sucesiones $\ell^q(\mathbb{N})$. ■

Pasamos ahora al caso cuando $p = 1$ y cuando $q = +\infty$ y se tiene el teorema a continuación.

Teorema 1.5.3 (Dualidad $\ell^1 - \ell^\infty$) *El espacio dual del espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$: es decir $(\ell^1)' = \ell^\infty$.*

Demostración. Utilizaremos aquí básicamente la misma forma bilineal:

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty} : \ell^1(\mathbb{N}) \times \ell^\infty(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \longmapsto & \langle a,b\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n. \end{array}$$

1) Continuidad fuerte: por la desigualdad de Hölder se tiene directamente

$$|\langle a,b\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty} \leq \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| \leq \|a\|_{\ell^1}\|b\|_{\ell^\infty}.$$

Esto muestra, una vez más, que si fijamos una sucesión $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, se obtiene una forma lineal continua asociada T_b, definida sobre $\ell^1(\mathbb{N})$, al escribir $T_b(a) = \langle a, b\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty}$ cuya norma verifica la desigualdad $\|T_b\|_{\ell^1\to\mathbb{K}} \leq \|b\|_{\ell^\infty}$.

2) Isometría: sea $b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ un sucesión cualquiera y sea e_n un elemento de la base canónica de sucesiones. Se tiene entonces que $|b_n| = |T_b(e_n)| = |\langle e_n, b\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty}| \leq \|T_b\|_{\ell^1\to\mathbb{K}}$, de donde se deduce directamente que $\|b\|_{\ell^\infty} \leq \|T_b\|_{\ell^1\to\mathbb{K}}$ y se obtiene la isometría $\|b\|_{\ell^\infty} = \|T_b\|_{\ell^1\to\mathbb{K}}$ buscada.

3) Sobreyección: debemos verificar que toda forma lineal continua T definida sobre $\ell^1(\mathbb{N})$ se puede escribir usando el corchete definido al inicio de la demostración. Sea pues $T \in (\ell^1)'$ una forma lineal continua arbitraria, a la cual asociamos la sucesión $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = T(e_n)$. Dado que esta forma lineal T es continua, existe una constante $C > 0$ tal que se tiene la desigualdad $|b_n| = |T(e_n)| \leq C\|e_n\|_{\ell^1} = C$. Es decir que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   Dado que la base canónica de sucesiones $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema total en $\ell^1(\mathbb{N})$, se deduce que toda forma lineal T puede escribirse como $T(a) = \langle a, b\rangle_{\ell^1\times\ell^\infty}$ con $b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

De todo eso se obtiene que el espacio dual del espacio de sucesiones $\ell^1(\mathbb{N})$ corresponde al espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$. ■

Sigamos con la descripción de los espacios duales de los espacios de sucesiones presentados en la sección anterior.

Teorema 1.5.4 (Dualidad $c_0 - \ell^1$) *El espacio dual del espacio $c_0(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones $\ell^1(\mathbb{N})$: es decir $(c_0)' = \ell^1$.*

Demostración. Seguimos usando una variante de la aplicación bilineal presentada en el Teorema 1.5.2:

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot\rangle_{c_0\times\ell^1} : c_0 \times \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto \langle a,b\rangle_{c_0\times\ell^1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n. \end{aligned}$$

Y ahora, continuamos con nuestro programa.

1) Continuidad fuerte: usando la desigualdad de Hölder, para todo $a \in c_0(\mathbb{N})$ y todo $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ se tiene
$$|\langle a,b\rangle_{c_0\times\ell^1}| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| \leq \|a\|_{\ell^\infty}\|b\|_{\ell^1}.$$
En particular, para todo $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ fijo, la aplicación $T_b(a) = \langle a,b\rangle_{c_0\times\ell^1}$ define una forma lineal continua sobre $c_0(\mathbb{N})$ tal que $\|T_b\|_{c_0\to\mathbb{K}} \leq \|b\|_{\ell^1}$.

2) Isometría: sea $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ una sucesión cualquiera y sea T_b la forma lineal continua asociada. Para la sucesión truncada $(b_n^M)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos las cantidades $\epsilon_n = \pm 1$ por
$$\begin{cases} b_n^M = \epsilon_n |b_n^M| \text{ si } b_n \neq 0, \\ \\ \epsilon_n = +\infty \text{ sino.} \end{cases}$$
(en el caso complejo, se considerarán los coeficientes de módulo 1 que verifican estas relaciones) y con estos coeficientes definimos la sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escribiendo $a_n = \epsilon_n^{-1}$ para todo $n \leq M$. Vemos entonces que $\|a\|_{\ell^\infty} \leq 1$ y que se tiene $T_b(a) = \|b^M\|_{\ell^1}$. Pero, por la continuidad fuerte se deduce la desigualdad $\|b^M\|_{\ell^1} = T_b(a) \leq \|a\|_{c_0}\|T_b\|_{c_0\to\mathbb{K}}$, de donde se obtiene la estimación uniforme $\|b^M\|_{\ell^1} \leq \|T_b\|_{c_0\to\mathbb{K}}$. Pasando al límite se obtiene la desigualdad $\|b\|_{\ell^1} \leq \|T_b\|_{c_0\to\mathbb{K}}$ y se tiene de esta manera la isometría deseada.

3) Sobreyección: debemos, para terminar, verificar que toda forma lineal continua T definida sobre el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ se puede escribir por medio del corchete utilizado en esta demostración. Sea pues T una tal forma lineal continua. Definimos $b_n = T(e_n)$ en donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de sucesiones. Dado que se tiene, para todo elemento $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $c_0(\mathbb{N})$, la identidad $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^k a_n e_n = a$, utilizando la continuidad de la forma lineal T se tiene que $T(a) = \lim\limits_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^k a_n b_n$. Como $\|T\|_{c_0\to\mathbb{K}} = \sup\limits_{\|c\|_{\ell^\infty}\leq 1} |T(c)| \geq |T(a)|$, en dónde la sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha sido definida en el punto anterior, se tiene que $\sum_{n\leq M} |b_n| \leq \|T\|_{c_0\to\mathbb{K}}$. Al ser esta cantidad acotada, se puede pasar al límite y esto nos indica que la forma lineal continua T se puede escribir como $T(a) = \langle a,b\rangle_{c_0\times\ell^1}$ con $b \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Hemos demostrado que el espacio dual del espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ es el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$. ■

Teorema 1.5.5 (Dualidad $c - \ell^1$) *El espacio dual del espacio $c(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones $\ell^1(\mathbb{N})$: es decir $(c)' = \ell^1$.*

Demostración. Consideramos la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot\rangle_{c\times\ell^1} : c \times \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto \langle a,b\rangle_{c\times\ell^1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n. \end{aligned}$$

1) Continuidad fuerte: para verificar este hecho, basta repetir los mismos argumentos utilizados en el teorema anterior para obtener, para todo $a \in c(\mathbb{N})$ y todo $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ la desigualdad

$$|\langle a, b\rangle_{c\times\ell^1}| \leq \|a\|_{\ell^\infty}\|b\|_{\ell^1}.$$

Con esto vemos una vez más que, a partir de un elemento $b \in \ell^1(\mathbb{N})$, se define una forma lineal continua T_b sobre el espacio $c(\mathbb{N})$ escribiendo $T_b(a) = \langle a, b\rangle_{c\times\ell^1}$ cuya norma verifica la desigualdad $\|T_b\|_{c\to\mathbb{K}} \leq \|b\|_{\ell^1}$.

2) Isometría: sea $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ una sucesión cualquiera y consideremos su forma lineal continua asociada T_b. Definimos unos coeficientes $\epsilon_n = \pm 1$ por medio de la relación $b_n = \epsilon_n|b_n|$ si $b_n \neq 0$ y $\epsilon_n = +\infty$ sino. Una vez más, en el caso complejo, se considerarán los coeficientes de módulo 1 que verifican estas relaciones. A partir de estos coeficientes, definimos una nueva sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $a_n^M = \epsilon_n^{-1}$ si $n \leq M$ y $a_n = \epsilon_0^{-1}$ sino. Nótese que se tiene entonces $a \in c(\mathbb{N})$, $\|a\|_{\ell^\infty} \leq 1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 = \epsilon_0^{-1}$. Calculamos ahora $T_b(a) = \langle a, b\rangle_{c\times\ell^1} = |b_0| + \sum_{n=1}^{M}|b_n| + \epsilon_0^{-1}\sum_{n>M} b_n$. Usando la continuidad de la aplicación T_b y haciendo $M \to +\infty$ en la fórmula anterior se obtiene

$$\|b\|_{\ell^1} = |T_b(a)| \leq \|T_b\|_{c\to\mathbb{K}},$$

de donde se obtiene la isometría buscada.

3) Sobreyección: para terminar, debemos verificar que toda forma lineal T continua definida sobre el espacio de sucesiones $c(\mathbb{N})$ se escribe por medio del corchete definido al inicio de esta prueba. Consideremos ahora un elemento $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera de $c(\mathbb{N})$; si definimos $e_0 = (1, 1, 1, \dots)$, vemos que se tiene $a = a_0 e_0 + \lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_n - a_0)e_n$ en donde $(e_n)_{n\geq 1}$ es la base canónica de sucesiones. Definimos los coeficientes $b_0 = T(e_0)$ y $b_n = T(e_n)$ para todo $n \geq 1$. Usando la representación de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anterior y la continuidad de la aplicación T se obtiene $T(a) = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_0)b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$; y se obtiene de esta manera la representación deseada.

Se ha demostrado que el espacio dual del espacio de sucesiones $c(\mathbb{N})$ es el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$. ■

Con todos estos resultados hemos realizado los espacios duales de todos los espacios de sucesiones presentados en la sección anterior -excepto $\ell^\infty(\mathbb{N})$- y hemos hecho un énfasis especial en las diferentes etapas de estas realizaciones. Antes de pasar al estudio del espacio dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, es necesario hacer algunas observaciones.

- En todos estos teoremas que acabamos de presentar, el uso de la base canónica ha sido fundamental: al ser esta base un sistema total en cada uno de estos espacios, esto permite obtener procedimientos relativamente unificados.

- La base canónica de sucesiones no es un sistema total en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (ver el Teorema 4.6.5 del Volumen 1) y esta notable diferencia explica el hecho que sea necesario dar un tratamiento ligeramente diferente al estudio del espacio dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

- Dos espacios de Banach distintos pueden tener un mismo espacio dual: como acabamos de ver, se tiene $(c_0)' = (c)' = \ell^1$; y, recíprocamente, el espacio ℓ^1 posee dos espacios preduales. Esto muestra que no hay necesariamente unicidad cuando se consideran espacios preduales. Veremos las consecuencias de este hecho cuando comparemos, en el párrafo siguiente, las diferentes topologías que surgen de estas dualidades.

Pasemos ahora sí a la construcción del espacio dual del espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Sabemos que este espacio no es separable, pero disponemos de la Proposición 1.5.4. Esta propiedad nos da una pauta para construir el espacio dual de este espacio de sucesiones: en efecto, gracias a este resultado podemos describir toda forma lineal T si conocemos sus valores en los puntos $\mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dicho de otra manera se obtiene una aplicación inyectiva al escribir:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (\ell^\infty)' & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & \Phi(T), \end{array} \tag{1.47}$$

en donde $\Phi(T)(A) = T(\mathbb{1}_A)$ y $\mathscr{F}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K})$ es el conjunto de aplicaciones definidas sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a valores en $\mathbb{K}$.

Veremos la importancia de esta aplicación Φ un poco más adelante, por ahora consideremos el subconjunto $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K})$ determinado por todas las aplicaciones $\psi \in \mathscr{F}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K})$ que verifican, para todo $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que $A \cap B = \emptyset$, la relación:

$$\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B). \tag{1.48}$$

Como vemos, los elementos $\psi \in \mathscr{E}$ son entonces aplicaciones que a conjuntos asocian escalares.

No es muy difícil ver que el espacio $\mathscr{E}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{F}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K})$ y sobre este espacio podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_{\mathscr{E}} : \mathscr{E} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ \psi & \longmapsto & \|\psi\|_{\mathscr{E}} = \sup \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |\psi(A_\lambda)| \end{array} \tag{1.49}$$

en donde el supremo corre sobre el subconjunto de de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ formado de todas las familias finita $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que son disjuntas dos a dos.

Verifiquemos rápidamente que la aplicación $\|\cdot\|_{\mathscr{E}}$ es una norma sobre el espacio $\mathscr{E}$: observamos que si $\|\psi\|_{\mathscr{E}} = 0$ entonces ψ es una aplicación nula puesto que el supremo corre sobre una familia suficientemente grande de subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Las dos propiedades restantes, es decir $\|\alpha\psi\|_{\mathscr{E}} = |\alpha|\|\psi\|_{\mathscr{E}}$ y la desigualdad triangular $\|\psi + \phi\|_{\mathscr{E}} \leq \|\psi\|_{\mathscr{E}} + \|\phi\|_{\mathscr{E}}$, se deducen directamente de la definición (1.49). Obtenemos pues que $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ es un espacio normado.

Con estos nuevos ingredientes, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1.5.6 (Dualidad $\ell^\infty - \mathscr{E}$) *La aplicación lineal Φ dada en la fórmula (1.47) es una isometría del espacio dual del espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sobre el espacio $\mathscr{E}$.*

Demostración.

1) Continuidad fuerte: empecemos verificando que la aplicación Φ envía efectivamente las formas lineales continuas T definidas sobre $\ell^\infty(\mathbb{N})$ en el espacio $\mathscr{E}$: sean pues A, B dos subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$, se tiene entonces $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, y podemos escribir $\Phi(T)(A \cup B) = T(\mathbb{1}_{A\cup B}) = T(\mathbb{1}_A + \cup \mathbb{1}_B) = T(\mathbb{1}_A) + T(\mathbb{1}_B) = \Phi(T)(A) + \Phi(T)(B)$, de donde se obtiene (1.48).

   Veamos ahora que, para una forma lineal continua $T \in (\ell^\infty)'$, se tiene $\|\Phi(T)\|_{\mathscr{E}} < +\infty$. Existe $a_\lambda \in \mathbb{K}$ de módulo 1 tal que $|T(\mathbb{1}_{A_\lambda})| = a_\lambda T(\mathbb{1}_{A_\lambda})$ de donde se deduce que $|\Phi(T)(A_\lambda)| = a_\lambda T(\mathbb{1}_{A_\lambda})$, de modo que, por las propiedades de la forma lineal T, se obtiene

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\Phi(T)(A_\lambda)| = T\big(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}\big)$$

En este punto es interesante notar que la sucesión $a_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}$ pertenece a $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y es de norma 1; esta observación simple nos permite escribir

$$\|\Phi(T)\|_{\mathscr{E}} = \sup T\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}\right) \leq \|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{K}}.$$

Hemos demostrado que $\Phi(T) \in \mathscr{E}$ y que se tiene la mayoración $\|\Phi(T)\|_{\mathscr{E}} \leq \|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{K}}$.

2) Sobreyección: vamos a mostrar aquí que a todo elemento $\psi \in \mathscr{E}$ le corresponde una forma lineal continua $T \in (\ell^\infty)'$ tal que $\Phi(T) = \psi$; para ello empezamos considerando el espacio vectorial $\mathcal{M}$ generado por el conjunto de funciones $\mathbb{1}_A$ en donde $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos luego una aplicación S sobre $\mathcal{M}$ de la siguiente manera: $S(\mathbb{1}_A) = \psi(A)$. Demos un poco más de detalles sobre esta construcción. Vemos que todo elemento $a \in \mathcal{M}$ se escribe como $a = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}$, en donde $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una partición finita de $\mathbb{N}$. Esta descomposición no es necesariamente única, pero es posible escribir
$$S(a) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \psi(A_\lambda).$$
En efecto, si se parte de otra partición finita $(B_\pi)_{\pi\in\Pi}$ se obtiene otra descomposición, pero realizando un reparticionamiento más fino (considerando, por ejemplo, las intersecciones de los conjuntos que conforman estas dos particiones), se obtiene una descomposición totalmente equivalente.

   Una vez que se dispone de esta aplicación, vamos a verificar que es en realidad una forma lineal sobre $\mathcal{M}$. Por un lado se tiene que $S(\lambda a) = \lambda S(a)$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$; por otro lado, si a, b son dos elementos de $\mathcal{M}$, se puede encontrar una partición finita $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $a = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}$ y $b = \sum_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda \mathbb{1}_{A_\lambda}$. Esta descomposición nos permite escribir $a + n = \sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha_\lambda + \beta_\lambda)\mathbb{1}_{A_\lambda}$, de donde se deduce $S(a+b) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha_\lambda+\beta_\lambda)\phi(A_\lambda) = S(a)+S(b)$, es decir la linealidad de la aplicación S.

   Para terminar, verifiquemos que esta aplicación S es una forma lineal continua sobre $\mathcal{M}$: por definición de S se tiene $|S(a)| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda||\psi(A_\lambda)| \leq \max\limits_{\lambda\in\Lambda}|\alpha_\lambda| \sum_{\lambda\in\Lambda} |\psi(A_\lambda)|$, y como $\|a\|_{\ell^\infty} = \max\limits_{\lambda\in\Lambda}|\alpha_\lambda|$ se obtiene que
$$|S(a)| \leq \|\psi\|_{\mathscr{E}} \|a\|_{\ell^\infty}.$$
Hemos entonces obtenido una forma lineal continua S de norma inferior o igual a $\|\psi\|_{\mathscr{E}}$, aplicando el teorema de prolongación de Hahn-Banach, se obtiene de esta manera una forma lineal T, definida sobre todo el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y que verifica $\|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{K}} \leq \|\psi\|_{\mathscr{E}}$. Finalmente, dado que $T(\mathbb{1}_{A_\lambda}) = S(\mathbb{1}_{A_\lambda}) = \psi(A_\lambda)$, se deduce que $\psi = \Phi(T)$.

3) Isometría: en la primera parte habíamos verificado que $\|\Phi(T)\|_{\mathscr{E}} \leq \|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{K}}$ y en las líneas precedentes hemos demostrado la desigualdad $\|T\|_{\ell^\infty\to\mathbb{K}} \leq \|\Phi(T)\|_{\mathscr{E}}$, de donde se deduce la isometría entre el espacio $(\ell^\infty)'$ y el espacio $\mathscr{E}$.

Se ha demostrado que el espacio dual del espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es el espacio $\mathscr{E}$. ■

Observación 1.44 El espacio $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}})$ es un espacio de Banach por el Corolario 1.4.8, pero no es un espacio de sucesiones: es un espacio de funciones de conjuntos. Esto muestra, como anunciado, que no siempre se obtienen espacios duales de misma naturaleza que los espacios iniciales.

Con este resultado hemos terminado nuestros pequeño estudio de realización de espacios duales de los espacios de sucesiones y en los párrafos que siguen estudiaremos a modo de ejemplo, y más concretamente de lo que se ha hecho en las páginas anteriores, las diversas propiedades que se obtienen al tener diversas topologías sobre todos estos espacios.

B) Comparación de topologías, propiedades adicionales y reflexividad

Espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < +\infty)$: La primera propiedad que vamos a presentar nos permitirá estudiar de manera más simple y unificada las diversas estructuras topológicas de estos espacios . En efecto se tiene:

Proposición 1.5.5 *Sea $1 < p < +\infty$ un parámetro real, entonces los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ son espacios reflexivos.*

Prueba. Dado que $1 < p < +\infty$, como los índices p y q son conjugados armónicos, se tiene que $1 < q < +\infty$. La misma demostración del Teorema 1.5.2 proporciona el hecho que el espacio dual de $\ell^q(\mathbb{N})$ es el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. ■

Corolario 1.5.1 *Sea $1 < p < +\infty$ un real. El espacio predual del espacio de sucesiones $\ell^p(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones $\ell^q(\mathbb{N})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Esto tiene como consecuencia inmediata que las topologías débiles y débiles estrella coinciden, de manera que solo debemos comparar dos estructuras topológicas. Empecemos pues con la estructura fuerte determinada por la norma $\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p}$ para todo $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$. Una de las primeras aplicaciones prácticas que se deducen de la realización del espacio dual de $\ell^p(\mathbb{N})$ está dada por la siguiente identidad:

$$\|a\|_{\ell^p} = \sup_{\|b\|_{\ell^q}\leq 1} \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right|, \qquad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de esta manera se obtiene una segunda caracterización de la norma en estos espacios de sucesiones que puede ser muy útil.

Como espacio de Banach, los conceptos de bolas, convergencia, cerradura, acotación, etc, están directamente determinados por la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$, de manera que no insitiremos demasiado en ellos.

Veamos ahora un primer ejemplo de una sucesión que converge débilmente, pero que no converge fuertemente. Sea $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de elementos de $\ell^p(\mathbb{N})$, con $1 < p < +\infty$, a valores reales definida por $a^{(n)} = (0, \cdots, 0, \underbrace{1, 1, 1}_{n,n+1,n+2}, 0, \cdots)$. Es inmediato ver que $a^{(n)} \in \ell^p(\mathbb{N})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que esta sucesión no converge fuertemente puesto que se tiene para todo $n \neq m$ $\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^p} \geq 1$.

Estudiemos lo que sucede al nivel de la convergencia débil. Sabemos que $a^{(n)} \rightharpoonup a$ si, para toda forma lineal continua $T \in (\ell^p)'$ se tiene $T(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(a)$; pero, por el Teorema 1.5.2, tenemos que $(\ell^p)' = \ell^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de manera que toda forma lineal T definida sobre $\ell^p(\mathbb{N})$ se escribe $T(\cdot) = \langle \cdot, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q}$ para algún $b \in \ell^q(\mathbb{N})$. Podemos entonces escribir este límite como

$$\langle a^{(n)}, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle a, b\rangle_{\ell^p\times\ell^q} \iff \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^{(n)} b_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j b_j.$$

Por construcción de la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vemos que $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^{(n)} b_j = b_n + b_{n+1} + b_{n+2}$, pero como $b \in \ell^q(\mathbb{N})$ se tiene que $b_n + b_{n+1} + b_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Notando que este límite se mantiene para toda sucesión $b \in \ell^q(\mathbb{N})$, se deduce finalmente que $a^{(n)} \rightharpoonup 0$.

Este pequeño ejemplo ilustra de forma concreta que la noción de convergencia débil es mucho menos estricta que la convergencia fuerte.

Espacio $\ell^1(\mathbb{N})$: tenemos aqui la siguiente situación, por un lado se tiene que $(c_0)' = \ell^1$ y $(c)' = \ell^1$, y por otro lado que $(\ell^1)' = \ell^\infty$ y que $(\ell^\infty)' = \mathscr{E}$, en donde $\ell^1 \neq \mathscr{E}$. Esto muestra que el espacio ℓ^1:

- posee *dos* espacios preduales,
- no es un espacio reflexivo, en particular las topologías débiles y débiles estrella son distintas.

Es por lo tanto necesario mostrar, de forma concreta, la diferencia entre estas dos topologías, para ello consideraremos la siguiente cadena:

$$c_0 \overset{dual}{\longrightarrow} \ell^1 \overset{dual}{\longrightarrow} \ell^\infty.$$

En este marco vamos a construir un ejemplo que nos permitirá ver cláramente las diferencias existentes entre todas las estructuras topológicas que aparecen en este caso.

Sea pues la sucesión $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ determinada por $a^{(n)} = (0, \cdots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots)$. Se tiene enseguida que $a^{(n)} \in \ell^1(\mathbb{N})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que esta sucesión no converge en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{\ell^1}$. Veamos que esta sucesión tampoco converge para la topología débil que se obtiene de la dualidad $\ell^1 - \ell^\infty$: en efecto, si este fuera el caso, se tendría que $T(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(a)$ para toda forma lineal continua T definida sobre $\ell^1(\mathbb{N})$. Sin embargo, por el Teorema 1.5.3 sabemos que estas formas lineales continuas pueden ser representadas por medio de sucesiones en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Entonces, si consideramos la sucesión $d = ((-1)^j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, se tiene para la forma lineal T_d asociada a esta sucesión que, $T_d(a^{(n)}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} d_j a_j^{(n)} = (-1)^n$ de manera que no se tiene la convergencia de la cantidad $T_d(a^{(n)})$, y vemos así que esta sucesión no converge en el sentido de la topología débil.

Estudiemos ahora lo que sucede en el nivel de la topología débil estrella dada por la dualidad $c_0 - \ell^1$. La situación en este caso es muy diferente pues los elementos de la sucesión $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ son ahora formas lineales continuas sobre el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ y, para saber si esta sucesión de formas lineales converge, debemos concentrarnos en el corchete de dualidad evaluando estas formas lineales en puntos del espacio $c_0(\mathbb{N})$. Sea pues $n \in \mathbb{N}$ y sea $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera de $c_0(\mathbb{N})$. Al considerar la forma lineal continua $T_{a^{(n)}}$ evaluada sobre b se obtiene $T_{a^{(n)}}(b) = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j a_j^{(n)} = b_n$, pero como $b \in c_0(\mathbb{N})$, se tiene que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de donde se deduce que la sucesión $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia cero para la topología débil estrella que resulta de la dualidad $c_0 - \ell^1$.

Observación 1.45

1) Este ejemplo muestra que la topología débil estrella es efectivamente más débil que las dos otras estructuras topológicas consideradas sobre el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$. En efecto, esta sucesión no converge, ni para la topología fuerte, ni para la topología débil, y, para obtener la convergencia, es necesario debilitar aún más estas estructuras considerando la topología débil-$*$.

2) Este mismo ejemplo muestra que la bola unidad (cerrada) del espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ no es un conjunto compacto para la topología fuerte ni para la topología débil: en efecto no se puede extraer de la sucesión $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ninguna subsucesión convergente para estas dos estructuras topológicas. En el caso de la topología fuerte, esto es suficiente para ver que la bola unidad no es compacta -pues es un espacio métrico- pero, para la topología débil, es necesario aplicar el Teorema 1.4.16 para usar este argumento y deducir que este conjunto no es débilmente compacto. Si consideramos en cambio la topología débil estrella se obtiene, por la teoría desarrollada anteriormente, que la bola unidad es un conjunto compacto.

3) Es interesante notar que si se considera la cadena $c \longrightarrow \ell^1 \longrightarrow \ell^\infty$, entonces el mismo ejemplo dado en las líneas precedentes tampoco converge para la topología débil estrella resultante de la dualidad $c - \ell^1$. Esto muestra que las estructuras débiles estrellas obtenidas de la dualidad $c_0 - \ell^1$ y $c - \ell^1$ no son las mismas.

Este espacio de sucesiones posee propiedades muy especiales. En particular se tiene:

Teorema 1.5.7 (Convergencia fuerte y convergencia débil en ℓ^1) *En el espacio de Banach $\ell^1(\mathbb{N})$, una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente si y solo si converge fuertemente.*

Demostración. Sabemos que la convergencia fuerte implica la convergencia débil, de manera que solo debemos verificar que, en este marco muy especial, la convergencia débil de sucesiones implica la convergencia fuerte de las mismas.

Sea pues $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\ell^1(\mathbb{N})$ que converge débilmente hacia un punto $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Como el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ es separable, se tiene por el Teorema 1.4.7 que la bola unidad cerrada del espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$, que notaremos $\overline{B}_{\ell^\infty}$, es metrizable. Sea ahora a, b dos elementos de $\ell^1(\mathbb{N})$ y sea $\epsilon > 0$, se tiene entonces que el conjunto $\{T \in \overline{B}_{\ell^\infty} : |T(a) - T(b)| \leq \epsilon/3\}$ es un conjunto cerrado para la topología débil-$*$ de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos entonces, para $m \geq 1$, el conjunto

$$B_m = \bigcap_{n\geq m} \{T \in \overline{B}_{\ell^\infty} : |T(a_n) - T(a)| \leq \epsilon/3\},$$

que es, por lo anterior, débilmente-$*$ cerrado en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ para todo $m \geq 1$. Ahora, como se tiene la convergencia débil de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces para toda forma lineal $T \in (\ell^1)' = \ell^\infty$ se tiene $T(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(a)$, en particular, para todo $T \in \overline{B}_{\ell^\infty}$ tenemos $T(a_n) - T(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Fijemos $\epsilon > 0$ y sea $T \in \overline{B}_{\ell^\infty}$, existe entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, $|T(a_n) - T(a)| \leq \epsilon/3$ y, por lo tanto, se deduce de esto que $T \in B_m$. De esta manera obtenemos que

$$\overline{B}_{\ell^\infty} = \bigcup_{m\geq 1} B_m.$$

Dado que el conjunto $\overline{B}_{\ell^\infty}$ es un espacio métrico compacto, usando el Teorema 1.3.1 de Baire y la descomposición anterior del conjunto $\overline{B}_{\ell^\infty}$, vemos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{\overline{B_{m_0}}} \neq \emptyset$, en donde se considera la apertura y cerradura en el sentido de la topología débil-$*$ de $\overline{B}_{\ell^\infty}$. Como este conjunto B_{m_0} es débilmente-$*$ cerrado, se deduce que $\overset{\circ}{B}_{m_0} \neq \emptyset$. Esto nos permite escoger $T_0 \in \overline{B}_{\ell^\infty}$, $b^1, ..., b^k$ elementos de $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\tau > 0$ tales que

$$V_{d*}(T_0, b^i, \tau) \cap \overline{B}_{\ell^\infty} = \{T \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : |(T - T_0)(b^i)| < \tau\} \cap \overline{B}_{\ell^\infty} \subset B_{m_0}.$$

Mostremos ahora que, en vez de tomar cualquier elementos $(b^i)_{1\leq i\leq k} \in \ell^1(\mathbb{N})$, podemos fijar elementos de la base canónica de sucesiones. Sea pues $\kappa \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=\kappa+1}^{+\infty} |b^i_j| < \tau/4$ y sea $T \in \overline{B}_{\ell^\infty}$, si

$$|(T - T_0)(e_\iota)| \leq \delta = \frac{\tau}{2(\max\{\|b_i\|_{\ell^1} : i = 1, ..., k\} + 1)}, \qquad \text{con } \iota = 1, ..., \kappa;$$

entonces

$$\begin{aligned} |(T - T_0)(b_i)| &\leq \left|\sum_{j=0}^{+\infty} \big((T)_j - (T_0)_j\big) b^i_j\right| \leq \sum_{j=0}^{\kappa} \big|(T)_j - (T_0)_j\big||b^i_j| + \big(\|T\|_{\ell^\infty} + \|T_0)_j\big| \sum_{j=\kappa+1}^{+\infty} |b^i_j| \\ &\leq \delta \sum_{j=0}^{+\infty} |b^i_j| + \frac{\tau}{2} \leq \delta \max_{i=1,...,k} \|b^i\|_{\ell^1} + \frac{\tau}{2} \leq \tau. \end{aligned}$$

Con esto hemos probado que existe $\kappa \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que

$$V_{d*}(T_0, e^\iota, \delta) \cap \overline{B}_{\ell^\infty} \subset V_{d*}(T_0, b^i, \tau) \cap \overline{B}_{\ell^\infty}, \qquad \text{con } \iota = 1, ..., \kappa.$$

Volvamos a nuestra sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Dado que $a_n \rightharpoonup a$, entonces se tiene, para todo $k \in \mathbb{N}$, que $\pi_k(a_n) \longrightarrow \pi_k(a)$ en donde las aplicaciones $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son las proyecciones canónicas: dicho de otra manera, la convergencia débil implica la convergencia puntual de las coordenadas de las sucesiones a_n. Entonces existe un entero $m > m_0$ tal que $\sum_{k=1}^{\kappa} |a_n(k) - a(k)| \leq \epsilon/3$, para todo $n \geq m$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|a_n - a\|_{\ell^1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} |a_n(k) - a(k)| = \sum_{k=0}^{\kappa} |a_n(k) - a(k)| + \sum_{k=\kappa+1}^{+\infty} |a_n(k) - a(k)| \\
&= \sum_{k=0}^{\kappa} |a_n(k) - a(k)| - \sum_{k=\kappa+1}^{+\infty} (T_0)_k |a_n(k) - a(k)| \\
&\quad + \sum_{k=\kappa+1}^{+\infty} |a_n(k) - a(k)| + \sum_{k=\kappa+1}^{+\infty} (T_0)_k |a_n(k) - a(k)| \\
&\leq 2\sum_{k=0}^{\kappa} |a_n(k) - a(k)| + |T(a_n - a)|, \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

en donde $T \in \ell^\infty$ está determinado por $\big((T_0)_1, ..., (T_0)_\kappa, sgn(a_n(\kappa + 1 - a(\kappa + 1)), ...\big) \in \overline{B}_{\ell^\infty}$; pero $(T - T_0)(e_\iota) = 0$ para $\iota = 1, ..., \kappa$, y por lo tanto

$$T \in V_{d*}(T_0, e^\iota, \delta) \cap \overline{B}_{\ell^\infty} \subset B_{m_0} \subset B_n, \qquad \text{para todo } n \geq m_0.$$

De esto se obtiene que $|T(a_n - a)| < \epsilon/3$ para todo $n \geq m_0$, de donde se deduce, volviendo a (1.50) que, para todo $n \geq \text{máx}(m, m_0)$:

$$\|a_n - a\|_{\ell^1} \leq 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon;$$

es decir que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente hacia a en $\ell^1(\mathbb{N})$. ■

Observación 1.46

1) Como el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ es de dimensión infinita, sabemos que las topologías fuertes y débiles son distintas. Este resultado no es una contradicción con este hecho pues nos dice que la convergencia de sucesiones coincide para la topología fuerte y la topología débil de $\ell^1(\mathbb{N})$, lo cual es una noción más débil.

2) Se dice de un espacio topológico normado que posee la *propiedad de Schur*[30] si la convergencia débil de sucesiones implica la convergencia fuerte de sucesiones. Se tiene entonces que el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ posee la propiedad de Schur.

3) Si $1 \leq p < +\infty$, entonces $\ell^p(\mathbb{N})$ posee la propiedad de Schur si y solo si $p = 1$.

Espacio $c_0(\mathbb{N})$: por los resultados de las páginas anteriores tenemos que $(c_0)' = \ell^1$ y $(\ell^1)' = \ell^\infty$; pero como $c_0 \neq \ell^\infty$ vemos directamente que el espacio $c_0(\mathbb{N})$ no es reflexivo.

Como habíamos mencionado en las páginas precedentes; en la figura 1.7 la situación que procura el mayor número de propiedades está dada por la parte central. Es por esta razón que es interesante investigar si el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ dispone de un espacio predual. En este sentido tenemos el siguiente resultado.

[30]Issai Schur (1875-1941), matemático alemán.

Proposición 1.5.6 *El espacio de sucesiones* $c_0(\mathbb{N})$ *no dispone de un espacio predual.*

Prueba. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar sucesiones a valores reales. Para la demostración de esta proposicón vamos a usar el Corolario 1.4.12, página 82 y verificaremos que el conjunto extremal de la bola unidad $B_{c_0} = \{a \in c_0(\mathbb{N}) : \|a\|_{\ell^\infty} < 1\}$ es vacío. Para empezar, recordamos, usando la observación 1.43, que el conjunto extremal $\mathcal{E}(B_{c_0})$ está contenido en el borde; Es decir que se tiene

$$\mathcal{E}(B_{c_0}) \subset \{a \in \overline{B}_{c_0} : \|a\|_{\ell^\infty} = 1\}.$$

Sea ahora b un punto de $\mathcal{E}(B_{c_0})$, como $b \in c_0(\mathbb{N})$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|b_k| < 1$. Definimos $\alpha > 0$ de tal forma que $|b_k| + \alpha < 1$, de esta manera se tiene que $b_k + \alpha < 1$ y $-1 < b_k - \alpha$. A partir de esto definimos dos sucesiones $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escribiendo $c_n = d_n = b_n$ para todo $n \neq k$ y $c_k = b_k + \alpha$ y $d_k = b_k - \alpha$ sino. Con esta construcción vemos que los puntos c y d pertenecen a la frontera ∂B_{c_0}, y vemos además que se tiene $b = \frac{c+d}{2}$, de manera que el punto b no puede ser extremal: es decir que el conjunto de puntos extremales de la bola unidad es vacío de donde se deduce que el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N})$ no dispone de un espacio predual. ■

Ese resultado muestra que sobre este espacio no se dispone de una estructura topológica débil estrella, de manera que no se tienen todas las propiedades interesantes que ofrece esta topología.

Indiquemos que se puede dar una caracterización que puede resultar útil de la convergencia débil que resulta de la dualidad $c_0 - \ell^1$:

Proposición 1.5.7 *Sea* $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* $c_0(\mathbb{N})$. *Entonces* $a^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ *débilmente en* $c_0(\mathbb{N})$ *si y solo si la sucesión* $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *es fuertemente acotada en* $c_0(\mathbb{N})$ *y si se tiene la convergencia puntual* $\pi_k(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_k(a)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$; *en donde* $\pi_k : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *son las proyecciones canónicas.*

Prueba. Empecemos suponiendo que $a^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ débilmente en $c_0(\mathbb{N})$. Dado que, a partir de esto se tiene que $a^{(n)} - a \rightharpoonup 0$, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $a^{(n)} \rightharpoonup 0$. Como se tiene la convergencia débil, entonces, para toda forma lineal continua $T \in (c_0)'$ se tiene $T(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(0)$. Además, por la continuidad de T se tiene $|T(a^{(n)})| \leq \|a^{(n)}\|_{\ell^\infty}\|T\|_{c_0\to\mathbb{K}}$.

Notamos además que las proyecciones canónicas $\pi_k : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$ son formas lineales continuas de manera que se tiene $\pi_k(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, sea $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada tal que $\pi_k(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $T \in (c_0)'$ una forma lineal continua cualquiera, que puede representarse como $T(a) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j b_j$ con $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ y $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Volviendo a nuestra sucesión $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene entonces que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N_\epsilon}^{+\infty} |b_n| \leq \frac{\epsilon}{2M}$ en donde hemos fijado $M = 1 + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty}$. Puesto que se tiene $\pi_k(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir $|\pi_1(a^{(n)})| \leq \frac{\epsilon}{2(1+\sum_{j=0}^{N_\epsilon})b_j}, \ldots, |\pi_{N_\epsilon}(a^{(n)})| \leq \frac{\epsilon}{2(1+\sum_{j=0}^{N_\epsilon})b_j}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|T(a^{(n)})| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} b_j\pi_j(a^{(n)})\right| \leq \sum_{j=0}^{N_\epsilon} |b_j||\pi_j(a^{(n)})| + \sum_{j=N_\epsilon+1}^{+\infty} |b_j||\pi_j(a^{(n)})| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N_\epsilon} \frac{|b_j|}{2(1+\sum_{j=0}^{N_\epsilon}|b_j|)} + \sum_{j=N_\epsilon+1}^{+\infty} |b_j|\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $T(a^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y por lo tanto que $a^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Espacio $c(\mathbb{N})$: la situación de este espacio de sucesiones es muy similar a la del espacio $c_0(\mathbb{N})$. Se dispone de la cadena

$$c \overset{dual}{\longrightarrow} \ell^1 \overset{dual}{\longrightarrow} \ell^\infty,$$

de manera que este espacio no es reflexivo: por el momento solo se dispone de la topología fuerte dada por la norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ y de la topología débil que se deduce de la dualidad $c - \ell^1$. Evidentemente estas dos estructuras son diferentes, como el lector puede darse cuenta adaptando uno de los ejemplos dado en las líneas anteriores.

Nos concentramos ahora en estudiar si el espacio $c(\mathbb{N})$ es un espacio dual. En este caso vemos que no será posible aplicar directamente el criterio dado en el Corolario 1.4.12: en efecto, el punto $(1, 1, 1....)$ es un punto extremal de la bola unidad cerrada $\overline{B}_c$ de $c(\mathbb{N})$ y verificar que $\overline{B}_c \neq \overline{co}(\mathcal{E}(\overline{B}_c))$ es una tarea delicada. Vamos por lo tanto a seguir una vía distinta para mostrar que $c(\mathbb{N})$ no es un espacio dual. Para ello necesitaremos la siguiente observación:

Lema 1.5.1 *El espacio $c(\mathbb{N})$ contiene isomórficamente al espacio $c_0(\mathbb{N})$*

Prueba. La verificación es directa: sabemos que $c_0(\mathbb{N}) \subsetneq c(\mathbb{N})$ y que estos dos espacios están dotados de la misma norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$; de manera que la aplicación identidad $Id : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c(\mathbb{N})$ basta para obtener el isomorfismo. ■

Proposición 1.5.8 *El espacio de sucesiones $c(\mathbb{N})$ no dispone de un espacio predual.*

Prueba. Por falta de espacio, y dado que este capítulo no es más que una corta introducción, no daremos todos los detalles de la demostración de esta proposición. Indicamos solamente que se tiene el hecho siguiente: *Si un espacio de Banach separable E contiene isomórficamente al espacio $c_0(\mathbb{N})$, entonces este espacio E no posee un espacio predual.* La verificación de este hecho puede encontrarse en [**?**]. Una vez que suponemos esto, como el espacio $c(\mathbb{N})$ es separable, basta aplicar el Lema 1.5.1 para concluir. ■

Espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$: en este caso se tiene

$$\ell^1 \overset{dual}{\longrightarrow} \ell^\infty \overset{dual}{\longrightarrow} \mathscr{E},$$

es por lo tanto inmediato que este espacio de sucesiones $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es reflexivo. Sin embargo, al ser $\ell^1(\mathbb{N})$ su espacio predual -que es un espacio separable- se obtienen cierto tipo de propiedades interesantes, principalmente porque la topología débil estrella puede ser usada conjuntamente con esta propiedad de separabilidad. Así se obtiene, por ejemplo, que la bola unidad cerrada $\overline{B}_{\ell^\infty} = \{a \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \|a\|_{\ell^\infty} \leq 1\}$ es un conjunto compacto y metrizable para la topología débil estrella que resulta de la dualidad $\ell^1 - \ell^\infty$.

Resumen

Este capítulo no es más que una pequeñísima introducción al análisis funcional y nos hemos limitado a dos temas muy precisos que son los teoremas clásicos del análisis funcional y las topologías débiles. Sin embargo, y a pesar de haber tratado solo una fracción de esta teoría matemática, es necesario recopilar algunos resultados:

1. Para las aplicaciones lineales continuas $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ se tiene la equivalencia entre:
   - Continuidad en un punto
   - Uniforme continuidad
   - Lipschitz-continua.
2. El teorema de Hahn-Banach, en sus versiones analítica y geométrica poseen una multitud de aplicaciones:
   - a las normas de las aplicaciones lineales (corolarios 1.2.1 y 1.2.2)
   - a la separación de conjuntos convexos (teorema 1.2.4)
   - al estudio de la densidad de subconjuntos (Corolario 1.2.6)
3. Las aplicaciones del lema de Baire son *clásicas* y su uso es imprescindible:
   - el teorema de la aplicación abierta
   - el teorema del grafo cerrado
   - el principio de acotación uniforme.
4. Las diversas estructuras topológicas que se obtienen sobre un espacio puesto en dualidad.
   - en dimensión infinita, la topología débil nunca es metrizable. Sin embargo la noción de compacidad y de compacidad secuencial coinciden (Teorema 1.4.16).
   - la bola unidad cerrada $\overline{B}_E$ de un espacio de Banach E nunca es compacta para la topología fuerte. Tampoco lo es necesariamente para la topología débil.
   - Si un espacio de Banach posee un espacio predual, su bola unidad cerrada es compacta para la topología débil estrella y este conjunto es metrizable (Teorema 1.4.5 y 1.4.7).
   - Un espacio de Banach E se inyecta por medio de la aplicación canńonica $\mathscr{J}$ en un subconjunto de su espacio bidual E''.
   - Si un espacio de Banach es reflexivo, entonces la topología débil coincide con la topología débil estrella.
   - La hipótesis de separabilidad es importante para muchos resultados (Teorema 1.4.7 y 1.4.10).

Síntesis de resultados sobre los espacios de sucesiones

Espacio predual	Espacio E	Espacio dual E'	Reflexivo
$\ell^q(\mathbb{N})$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	$\ell^p(\mathbb{N})$ con $1<p<+\infty$	$\ell^q(\mathbb{N})$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	Si
$c_0(\mathbb{N}), c(\mathbb{N})$	$\ell^1(\mathbb{N})$	$\ell^\infty(\mathbb{N})$	No
No	$c_0(\mathbb{N})$	$\ell^1(\mathbb{N})$	No
No	$c(\mathbb{N})$	$\ell^1(\mathbb{N})$	No
$\ell^1(\mathbb{N})$	$\ell^\infty(\mathbb{N})$	$\mathscr{E}$	No

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.1 *En este ejercicio vamos a ver que las nociones de acotación en el sentido métrico y de acotación en el sentido de los espacios vectoriales topológicos son distintas*

1. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *dotado de la topología inducida por la norma usual* $|\cdot|$. *Notaremos este conjunto por* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. *Sea ahora* $\mathbb{R}$ *dotado de la distancia* $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

   a) *Mostrar que* d *es una distancia sobre* $\mathbb{R}$.

   b) *Dar ejemplos de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que son acotados en el sentido de la distancia* d, *pero que no son acotados en el sentido de la Definición 1.1.9 en el espacio topológico* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

2. *Mostrar que si la estructura de espacio topológico vectorial es engendrada por una distancia homogénea*[31] *(como es el caso de una distancia inducida por una norma) entonces las nociones de acotación en el sentido métrico y en el sentido de la Definición 1.1.9 coinciden.*

Ejercicio 1.2 *Dar ejemplos de aplicaciones en donde no se tienen las implicaciones del Teorema 1.1.2. Para ello considerar por ejemplo*

1. *una aplicación discontinua en el origen, pero continua en el resto de su dominio de definición,*

2. *una aplicación que es continua, pero que no es uniformemente continua,*

3. *una aplicación que es continua, pero que no es lipschitziana.*

¿Los ejemplos producidos, son aplicaciones lineales?

Ejercicio 1.3 *Consideremos el espacio vectorial real* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, *formado por las aplicaciones continuas definidas sobre* $[0,1]$ *a valores en* $\mathbb{R}$ *y dotado de la norma*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : E & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|. \end{array}$$

1. *Definimos la aplicación* T *por*

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & T(f) = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx. \end{array}$$

   Mostrar que T *es una aplicación lineal.*

2. *Mostrar que para todo elemento* f *de* E *se tiene* $|T(f)| \leq \|f\|_\infty$.

3. *Sea* $(f_n)_{n\geq 2}$ *una sucesión de funciones definidas de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} - nx & si\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -1 & si\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{array} \right. \end{array}$$

   Verificar que $(f_n)_{n\geq 2}$ *es una sucesión de elementos de* E.

[31] Recuérdese que una distancia *homogénea* sobre un e.v.t. E verifica la identidad $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$

4. *Mostrar que se tiene, para todo* $n \geq 2$, $\|f_n\|_\infty = 1$.

5. *Demostrar que* $T(f_n) = 1 - \frac{1}{n}$ *y verificar que* $\|T\|_{E\to\mathbb{R}} = 1$.

6. *El objetivo de las siguientes preguntas es mostrar que no existe un elemento* $f \in E$ *tal que* $\|f\|_\infty = 1$ *y tal que* $|T(f)| = 1$. *Vamos a proceder por el absurdo.*

   a) *Sea* $f \in E$ *tal que* $\|f\|_\infty = 1$. *Mostrar que las aplicaciones* $g(x) = 1 - f(x)$ *y* $h(x) = 1 + f(x)$ *son continuas y positivas sobre los segmentos* $[0, 1/2]$ *y* $[1/2, 1]$.

   b) *Verificar que se tiene la expresión*

$$1 - T(f) = \int_0^{1/2} g(x)dx + \int_{1/2}^1 h(x)dx$$

   c) *Deducir que* $1 - T(f) > 0$ *y que* $1 + T(f) > 0$.

   d) *Mostrar que la norma* $\|T\|_{E\to\mathbb{R}} = 1$ *no es alcanzada sobre la esfera unidad del espacio vectorial normado* $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio 1.4

1. *Mostrar que la única aplicación que es lineal y multilineal al mismo tiempo es la aplicación idénticamente nula.*

2. *Sean* $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ *espacios localmente convexos de dimensión finita y* F *un espacio localmente convexo. Mostrar que toda aplicación multilineal* $M : \prod_{i=1}^n E_i \longrightarrow F$ *es continua.*

Ejercicio 1.5 (Cálculo de normas de Aplicaciones lineales)

1. *Sea* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ *y sea* $T : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *una aplicación definida por* $T(a)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$, *para todo* $x \in [0, 1]$ *y toda sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$.

   a) *Mostrar que* T *está bien definida, es lineal y continua*

   b) *Mostrar que* $\|T\|_{\ell^1\to\mathcal{C}} = \sup_{n\geq 0} |b_n|$.

2. *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y sea* $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow L^p([0, 1], dx)$ *una aplicación dada por* $T(b)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[}(x)$, *para todo* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y todo* $x \in [0, 1]$.

   a) *Mostrar que* T *está bien definida,*

   b) *Verificar que* T *es lineal, continua y calcular su norma.*

Ejercicio 1.6 (Isometría) *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y sea* $T : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow L^p([0, +\infty[, dx)$ *una aplicación determinada por* $T(a)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathbb{1}_{[n-1,n[}(x)$ *para toda sucesión* $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ *y todo* $x \in [0, +\infty[$. *Mostrar que* T *es una isometría.*

Ejercicio 1.7 (Prolongaciones de Hahn-Banach)

1. *Sea* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$ *y sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación definida por* $f(x, y) = x$. *Mostrar que* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *determinada por* $g(x, y) = x/5 + 2/5y$ *es la única extensión que mantiene la norma de* f *a todo el espacio* $\mathbb{R}^2$ *dotado de su métrica euclídea.*

2. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{K}$ *un escalar fijo. Definimos el conjunto* $A = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^2$ *y consideramos la aplicación* $f : (A, \|\cdot\|_p) \longrightarrow \mathbb{K}$ *determinada por* $f(x) = \alpha x_1$. *Verificar que* f *es una aplicación lineal y continua y mostrar que las prolongaciones de Hahn-Banach* f *son:*
   - *para* $p = 1$: $T(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, *para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ *con* $|\beta| \leq |\alpha|$. *Observar que hay entonces una infinidad de posibles extensiones.*
   - *para* $1 < p \leq +\infty$: $T(x_1, x_2) = \alpha x_1$, *para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$.

Ejercicio 1.8 (Subespacios Densos)

1. *Definimos* $A = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 0\Big\}$. *Mostrar que* $A \subset \ell^p(\mathbb{N})$ *es un subespacio denso.*

2. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de escalares tal que* $|a_n| > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $1 < p < +\infty$. *Encontrar una condición necesaria y suficiente en esta sucesión para que el subespacio* $A = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n = 0\Big\}$ *sea denso en* $\ell^p(\mathbb{N})$.

Indicación: A *es denso en* $\ell^p(\mathbb{N}) \iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell^q(\mathbb{N})$.

Ejercicio 1.9 (Suplementarios) *Sean* E *un espacio de Banach y* E_1 *y* E_2 *dos subespacios vectoriales cerrados de* E *tales que*

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \quad y \quad E = E_1 + E_2,$$

es decir que E_1 *y* E_2 *son* suplementarios algébricos. *El objetivo de este ejercicio es mostrar que en este caso,* E_1 *y* E_2 *son suplementarios topológicos: es decir que las proyecciones asociadas son continuas.*

Para ello, seguir los siguientes pasos.

1. *Verificar que la aplicación*
$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}$$
es una norma sobre $E_1 \times E_2$.

2. *Mostrar que* $E_1 \times E_2$ *es un espacio normado completo.*

3. *Mostrar que la aplicación*
$$\begin{array}{rcl} T : E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$
es una aplicación lineal biyectiva continua.

4. *Utilizar el teorema del isomorfismo de Banach (Corolario 1.3.2) para deducir que las aplicaciones* $\pi_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ *y* $\pi_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$ *son continuas.*

Ejercicio 1.10 *Considerar el espacio*

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e(n) : k \in \mathbb{N}, \alpha_n > 0 \right\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$$

en donde $(e(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es la base canónica de* $\ell^2(\mathbb{N})$. *Si definimos* $B = -A$ *mostrar que:*

1. A *y* B *son dos conjuntos disjuntos.*

2. *A y B son conjuntos convexos.*

3. *Verificar que para toda forma lineal $T \in (\ell^2)' \setminus \{0\}$, se tiene $T(A) = T(B) = \mathbb{R}$.*

4. *¿Qué se puede deducir de esto?*

Ejercicio 1.11 (Cerraduras)

1. *Verificar que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$, que $\ell^p(\mathbb{N}) \neq c_0(\mathbb{N})$ para todo $1 \leq p < +\infty$.*

2. *Encontrar la cerradura de $c_0(\mathbb{N})$ en $c(\mathbb{N})$ y en $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

3. *Encontrar la cerradura de $\ell^p(\mathbb{N})$ en $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

Ejercicio 1.12 *Sea $\varphi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y sea $A = \big\{f\varphi : f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\big\}$.*

1. *Considerar la aplicación $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f\varphi$. Mostrar que T es una aplicación lineal continua.*

2. *Dar una condición sobre la función φ para que T sea una aplicación sobreyectiva.*

3. *Mostrar que A es un conjunto magro si y solo si existe $x \in [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 0$.*

Ejercicio 1.13 (Espacios de sucesiones con peso) *Sea $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales estrictamente positivos tales que $\omega_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Para todo $1 \leq p < +\infty$, definimos los espacios de sucesiones con peso ω por:*

$$\ell^p_\omega(\mathbb{N}) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|a\|_{\ell^p_\omega} < +\infty\},$$

en donde $\|a\|_{\ell^p_\omega} = \big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \omega_n\big)^{1/p}$.

1. *Mostrar que el espacio $(\ell^p_\omega(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p_\omega})$ es un espacio de Banach.*

2. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido con μ una medida positiva finita. Suponiendo que existe un recubrimiento de X por medio de conjuntos dos a dos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ tales que $\omega_n = \mu(A_n)$, mostrar que para todo $1 \leq p < q < +\infty$ no se puede tener la identificación $L^p(X, d\mu) = L^q(X, d\mu)$.*

   Proceder por el absurdo: suponer que $L^p(X, d\mu) = L^q(X, d\mu)$ y utilizar para ello el hecho que la aplicación inclusión $i : \ell^p_\omega(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^q_\omega(\mathbb{N})$ sería entonces una aplicación lineal continua.
   Para ello seguir las siguientes etapas:

   a) *Mostrar que la aplicación $i : \ell^p_\omega(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^q_\omega(\mathbb{N})$ está bien definida y es lineal.*
   b) *Utilizando el teorema del grafo cerrado, obtener una contradicción.*

Ejercicio 1.14 (Grafo Cerrado y una aplicación que no es continua) *Sea $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las funciones de clase $\mathcal{C}^1$ dotado de la norma de la convergencia uniforme del espacio $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y consideremos el operador $D : \big(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ definido por $D(f) = f'$.*

1. *Mostrar que D es un operador lineal.*

2. *Verificar que su grafo es cerrado.*

3. *•tem Considerando las funciones $f_n(x) = x^n$ definidas sobre $[0,1]$, demostrar que el operador D no es un operador continuo.*

4. *¿Hay una contradicción con el teorema del grafo cerrado?*

Ejercicio 1.15 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales tal que para toda sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ se tiene que el producto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio $c_0(\mathbb{N})$.*

1. *Sea la aplicación $T : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c_0(\mathbb{N})$ definida por $T(b_n) = a_n b_n$ y sea $T_n : c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c_0(\mathbb{N})$ una aplicación dada por $T_n(b_0, b_1, ...) = (a_0 b_0, ..., a_n b_n, 0, 0, ...)$. Mostrar que T_n está bien definida, y que es una aplicación lineal continua.*
2. *Verificar que $\|T_n\|_{c_0\to c_0} = \text{máx}(|a_0|, ..., |a_n|)$.*
3. *Verificar que se tiene $\|T_n(b) - T(b)\|_\infty = \sup\limits_{k\geq n+1} |a_k b_k|$ y deducir que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$.*
4. *Utilizando el Principio de Acotación Uniforme deducir que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$.*

Ejercicio 1.16

1. *Sea $x_0 \in \ell^1(\mathbb{N})$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Mostrar que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ débilmente-$*$ si y solo si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en ℓ^1 y si para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi_k(x_n) \longrightarrow \pi_k(x_0)$, en donde π_k son las proyecciones canónicas.*
2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores reales. Definimos las formas lineales $T_n \in (c_0)'$ por $T_n(x_0, ..., x_n, ...) = a_n x_n$ para todo $(x_0, ..., x_n, ...) \in c_0(\mathbb{N})$. Mostrar que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente-$*$ convergente si y solo si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Mostrar que en este caso se tiene $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ débilmente-$*$.*

Ejercicio 1.17 *Sea X un espacio compacto separado. Para todo $x \in X$ definimos la funcional de Dirac por*

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathcal{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \delta_x(f) = f(x) \end{array}$$

1. *Mostrar que $\delta_x \in (\mathcal{C}(X))'$ para todo $x \in X$.*
2. *Mostrar que la aplicación $\varphi : X \longrightarrow (\mathcal{C}(X))'$ determinada por $\varphi(x) = \delta_x$ es continua en la topología débil-$*$ de $(\mathcal{C}(X))'$.*

Ejercicio 1.18 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach separable. Mostrar que el espacio dual $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es separable.*
Indicación: usando el teorema de Hahn-Banach, construir un subconjunto numerable de E' cuyo conjunto ortogonal esté reducido al elemento cero.

Ejercicio 1.19 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Mostrar que si E es un espacio reflexivo, entonces toda forma lineal continua definida sobre E realiza su norma en la bola unidad cerrada de E.*

La propiedad recíproca, es decir, si toda forma lineal continua definida sobre E realiza su norma en la bola unidad de E, se conoce como el teorema de James.

Índice alfabético