Lección n°2: Decaimiento exponencial a priori con la función paisaje

Septiembre 2022

En esta lección estudiaremos cómo usar el principio de incertidumbre que la función paisaje satisface para demostrar, mediante técnicas de S. Agmon [Agm82], decaimiento exponencial de funciones propias, de la función de Green, y soluciones del problema de Poisson, con respecto a una distancia pesada que depende de la función paisaje.

1. La distancia de Agmon

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un dominio suave acotado.

Definición 1 (Distancia de Agmon)**.** *Sea w un peso positivo en Ω. La* distancia de Agmon *con respecto al peso w es la función $\rho(x, y, w)$ definida mediante*

$$\rho(x, y, w) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{w}\, d\gamma, \qquad x, y \in \Omega,$$

donde el ínfimo ocurre entre todos los caminos contínuos y por piezas contínuamente diferenciables entre x e y. En otras palabras, ρ es la distancia para la métrica Riemanniana degenerada $ds^2 = w\, dx^2$.

Sea $V \in C(\partial\Omega)$, y $V \geq 0$. Originalmente, la distancia de Agmon fue usada con el peso $w = (V - E)_+$, para un número $E \geq 0$ fijo. Nosotros usaremos la distancia de Agmon con el peso $w = 1/u$ donde u es la función paisaje.

Sea u la función paisaje del operador $L := -\Delta + V$ con condición 0 de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u + V u = 1, & \text{dentro de } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Cuando Ω es acotado, la existencia de u que resuelve el problema (1) es una consecuencia fácil del teorema de Lax-Milgram y la teoría elemental de ecuaciones en EDPs elípticas (véase, por ejemplo, el capítulo 6 de [Eva10]). Si Ω no es acotado, entonces en general puede que no exista una función paisaje; éste es el caso cuando $V \equiv 0$ en un dominio Ω no acotado, por ejemplo. Pero si V es suficientemente no degenerado, entonces la función paisaje sí existe incluso en dominios no acotados, véase [Pog] para una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función paisaje. Nosotros procederemos bajo la suposición de que existe la función paisaje.

Para continuar, necesitamos el siguiente resultado sobre distancias de Agmon, el cuál no demostraremos en este curso; véase el libro [Agm82] para más detalles.

Lema 1.1 ([Agm82])**.** *Sea h una función real tal que*

$$|h(x) - h(y)| \leq \rho(x, y, w), \qquad x, y \in \Omega. \tag{2}$$

Entonces h es una función Lipschitz localmente, y

$$|\nabla h(x)|^2 \leq w(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

2. Decaimiento exponencial de soluciones de Poisson

Ahora estamos listos para demostrar un primer resultado de decaimiento exponencial. Consideremos una solución Φ al problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta \Phi + V \Phi = f, & \text{dentro de } \Omega \\ \Phi = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Veamos cómo las soluciones de Poisson decaen exponencialmente con respecto a la distancia de Agmon $\rho(\cdot, \operatorname{supp} f, 1/u)$. El siguiente resultado fue demostrado en [Pog]; su demostración tiene muchos paralelos con el argumento en [ADFJM19] sobre decaimiento exponencial de funciones propias.

Teorema 2.1. *Sea $f \in L^2(\Omega)$ con soporte compacto, y Φ la solución al problema de Poisson (4). Entonces tenemos que*

$$\int_\Omega \frac{1}{u(x)} e^{\frac{1}{2}\rho(x,\operatorname{supp} f,1/u)} |\Phi(x)|^2 \, dx \le 8 \int_\Omega u(x) f^2(x) \, dx. \tag{5}$$

Observación 1. *La constante 8 en la parte derecha de (5) no es óptima, se puede mejorar, por lo menos, a una constante $C \in (1,2)$. Lo importante para nosotros es que la constante 8 no depende de f, ni V, ni Ω, y nisiquiera depende de la dimensión n.*

Observación 2. *El factor de crecimiento exponencial en la parte izquierda de (5), al estar en la parte* izquierda *de una desigualdad $\le$, implica decrecimiento exponencial del resto de los factores en el integrando de la parte izquierda de (5), al menos en el sentido L^2 de que la integral en la parte izquierda de (5) debe ser finita con su valor uniformemente controlado por la parte derecha de la desigualdad.*

Demostración. Sea $h(x) := \rho(x, \operatorname{supp} f, 1/u)$ y $g(x) := e^{h(x)/4}$, para $x \in \Omega$. Queremos usar el *principio de incertidumbre* que demostramos en la lección anterior

$$\int_\Omega \frac{1}{u} F^2 \le \int_\Omega |\nabla F|^2 + V F^2, \qquad F \in C_c^\infty(\Omega), \tag{6}$$

con $F = g\Phi$, pero $g\Phi \notin C_c^\infty(\Omega)$ en general. Sin embargo, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,2}(\Omega)$, donde $W_0^{1,2}(\Omega)$ es el subespacio de $W^{1,2}(\Omega)$ de funciones con traza 0 en la frontera, y sí tenemos que $\Phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (una consecuencia simple del uso del teorema de Lax-Milgram).

Ejercicio. Demostrar que $g\Phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Ejercicio. Demostrar que (6) es cierto para toda función F en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\int_\Omega \frac{1}{u} |g\Phi|^2 \le \int_\Omega |\nabla(g\Phi)|^2 + V(g\Phi)^2.$$

Como

$$|\nabla(g\Phi)|^2 = g^2 |\nabla\Phi|^2 + \Phi^2 |\nabla g|^2 + 2g\Phi\nabla g \nabla\Phi,$$

y

$$g^2|\nabla\Phi|^2 = \nabla\Phi\nabla(g^2\Phi) - 2g\Phi\nabla g\nabla\Phi,$$

entonces

$$|\nabla(g\Phi)|^2 = \Phi^2|\nabla g|^2 + \nabla\Phi\nabla(g^2\Phi).$$

Consecuentemente,

$$\int_\Omega |\nabla(g\Phi)|^2 + V(g\Phi)^2 = \int_\Omega \Phi^2|\nabla g|^2 + \int_\Omega \left[\nabla\Phi\nabla(g\Phi) + V(g\Phi)\Phi.\right.$$

Como $-\Delta\Phi + V\Phi = f$, usando la forma débil de la ecuación, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla\Phi\nabla(g^2\Phi) + V(g^2\Phi)\Phi = \int_\Omega f(g^2\Phi).$$

Poniendo todo junto,

$$\int_\Omega \frac{1}{u} g^2\Phi^2 \le \int_\Omega |\nabla g|^2\Phi^2 + \int_\Omega f(g^2\Phi).$$

Usamos ahora la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon > 0$:

$$\int_\Omega f g^2 \Phi = \int_\Omega \left(g\Phi/\sqrt{u}\right)\left(\sqrt{u} g f\right) \le \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{u} g^2\Phi^2 + 2\int_\Omega u g^2 f^2.$$

Absorbiendo el primer término del lado derecho de la desigualdad, tenemos que

$$\int_\Omega \frac{1}{u} g^2\Phi^2 \le 2\int_\Omega |\nabla g|^2\Phi^2 + 4\int_\Omega u g^2 f^2.$$

Recordamos ahora que $g(x) = e^{h(x)/4} = e^{\rho(x,\operatorname{supp} f,1/u)/4}$, por lo que $g \equiv 1$ en $\operatorname{supp} f$. Entonces

$$\int_\Omega u g^2 f^2 = \int_{\operatorname{supp} f} u g^2 f^2 = \int_{\operatorname{supp} f} u f^2 = \int_\Omega u f^2.$$

Nos queda considerar el término $\int_\Omega |\nabla g|^2\Phi^2$. Usando el Lema 1.1, sabemos que $|\nabla h|^2 \leq 1/u$, y como $\nabla g = \frac{1}{4}\nabla h e^{h/4} = \frac{1}{4}g\nabla h$, entonces

$$|\nabla g|^2 = \frac{1}{16}|\nabla h|^2 g^2 \leq \frac{1}{16}\frac{1}{u}g^2.$$

Consecuentemente,

$$\int_\Omega |\nabla g|^2\Phi^2 \leq \frac{1}{16}\int_\Omega \frac{1}{u}g^2\Phi^2.$$

Absorbiendo este término, obtenemos el resultado deseado. □

3. Decaimiento exponencial de funciones propias

Con una demostración muy similar a la del Teorema 2.1, se puede obtener el siguiente resultado, el cual se lo deja como ejercicio.

Teorema 3.1 ([ADFJM19, Pog]). *Sea ψ una función propia de $L = -\Delta + V$ con valor propio E. Escribimos*

$$w(x) = \left(\frac{1}{u} - E\right)_+ = \max\left\{0, \frac{1}{u} - E\right\},$$

y

$$S := \left\{x \in \Omega : \frac{1}{u(x)} \leq E\right\}.$$

Entonces,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{u} - E\right)_+ e^{\rho(x,S,1/u)/2}|\psi|^2 \leq 8\int_S \left(E - \frac{1}{u}\right)_+ |\psi|^2.$$

Los estimados principales en los Teoremas 2.1 y 3.1 pueden mejorarse a estimados *puntuales* de decaimiento exponencial. En el siguiente resultado veremos un resultado puntual de decaimiento exponencial.

4. Decaimiento exponencial para la función de Green

Primero, recordemos la definición de la función de Green. La función de Green $G(x,y)$ definida en $\Omega \times \Omega$ para el operador L da una fórmula de representación para las soluciones del problema de Poisson:

$$(L^{-1}f)(x) := \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy, \qquad \text{para todo } f \in L^\infty_c(\Omega). \tag{7}$$

La función de Green además satisface (formalmente) la ecuación

$$-\Delta_x G(x,y) + V(x)G(x,y) = \delta_y$$

donde δ_y es la medida de Dirac-Delta en Ω:

$$\langle \delta_y, f\rangle = f(y), \qquad \text{para todo } f \in C(\Omega).$$

Además,

$$G(x,y) = 0, \qquad \text{para todo } x \in \Omega, y \in \partial\Omega,$$
$$G(x,y) = G(y,x), \qquad \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, la función de Green se conoce como la *solución fundamental* Γ. Decaimiento exponencial de estas funciones es muy útil para aplicaciones en análisis armónico, pero este decaimiento sólo es cierto cuando V es fuertemente no degenerado. Por ejemplo, la solución fundamental del Laplaciano es $\frac{c}{|x-y|^{n-2}}$, para una constante c determinada. Nótese claramente que esta función no decae exponencialmente. Sin embargo, si Γ_1 es la solución fundamental para el operador de Schrödinger $-\Delta + 1$, entonces

$$\Gamma_1(x,y) = \frac{c}{|x-y|^{n-2}}e^{-|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, n \geq 3.$$

Si aplicamos la función de Green para la función paisaje, notamos que, como $u = L^{-1}1$,

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\,dy.$$

Esta identidad sigue siendo correcta incluso cuando Ω no es acotado.

Teorema 4.1. *Si $n \geq 3$, entonces existe una constante C, que depende solo de n, tal que para todo $x, y \in \Omega$ con*

$$B\Big(x, \frac{1}{\sqrt{\|V\|_{L^\infty(\Omega)}}}\Big) \cap B\Big(y, \frac{1}{\sqrt{\|V\|_{L^\infty(\Omega)}}}\Big) =: B_x \cap B_y = \varnothing,$$

y $4B_x \cup 4B_y \subset \Omega$, existen puntos $\tilde{x} \in B_x$ y $\tilde{y} \in B_y$ que satisfacen

$$G(x,y) \leq C\|V\|^{n/2}_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{u(\tilde{x})}\sqrt{u(\tilde{y})} e^{-\rho(\tilde{x},\tilde{y},1/u)/2} \tag{8}$$

Antes de pasar a la demostración, necesitamos dos resultados auxiliares.

Lema 4.1 (Desigualdad de Harnack, [GT01])**.** *Sea w una solución no-negativa a la ecuación*

$$-\Delta w + Vw = f$$

en Ω. Entonces tenemos que, para toda bola B de radio R con $2B \subset \Omega$,

$$\sup_{x \in B} w(x) \leq C\Big[\inf_{x \in B} w(x) + R^2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\Big].$$

Lema 4.2. *Si u es la función paisaje con la condición de Neumann 0, entonces*

$$u(x) \geq \frac{1}{\|V\|_{L^\infty(\Omega)}}, \qquad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{9}$$

Este último resultado claramente no puede ser correcto para la función paisaje con condición de Dirichlet 0 en la frontera (queda como ejercicio ver por qué); sin embargo, se puede obtener un resultado local en este caso que se puede utilizar en la demostración rigurosa del Teorema 4.1. Para no preocuparnos por detalles muy técnicos, nosotros demostraremos el Teorema 4.1 pretendiendo que el estimado (9) es correcto para la función paisaje con condición de Dirichlet 0 en la frontera; asumiendo que (9) es correcto, podemos tomar $\tilde{x} = x$ e $\tilde{y} = y$, pero no es claro que en la demostración rigurosa se puede tomar $\tilde{x} = x$ e $\tilde{y} = y$.

Demostración del Lema 4.2. Sea $\bar{V} := \|V\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces

$$-\Delta(1/\bar{V}) + V/\bar{V} = V/\bar{V} \leq 1 = -\Delta u + Vu.$$

Por el principio maximal, entonces tenemos que $u \geq 1/\bar{V}$. □

Demostración del Teorema 4.1. Fijemos $x_0, y_0 \in \Omega$, $\delta, \varepsilon > 0$. Sea

$$f(x) := \mathbf{1}_{B(y_0,\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(y_0,\varepsilon) \\ 0, & x \in \Omega \backslash B(y_0,\varepsilon). \end{cases}$$

Entonces $f \in L^\infty(\Omega)$ y tiene soporte compacto. Denotemos $\Phi = L^{-1}f$. Tenemos que

$$\Phi(x) = \int_\Omega G(x,z) f(z)\, dz = \int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,z)\, dz.$$

Usamos ahora el Teorema 2.1 con Φ:

$$\int_\Omega \frac{e^{2\alpha\rho(x,B(y_0,\varepsilon))}}{u(x)} \Big|\int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,z)\, dz\Big|^2 dx \leq 8 \int_{B(y_0,\varepsilon)} u(y)\, dy. \tag{10}$$

Escribamos $\rho(x) = \rho(x, B(y_0,\varepsilon))$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{B(x_0,\delta)} \int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,z)\, dz\, dx\Big|^2 \\
&\qquad = \Big|\int_{B(x_0,\delta)} \Big(\int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,z)\, dz\Big) \frac{e^{\alpha\rho(x)}}{\sqrt{u(x)}} \sqrt{u(x)} e^{-\alpha\rho(x)}\, dx\Big|^2 \\
&\qquad \leq \Big\{\int_{B(x_0,\delta)} \frac{e^{2\alpha\rho(x)}}{u(x)} \Big|\int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,z)\, dz\Big|^2 dx\Big\}\Big\{\int_{B(x_0,\delta)} u(x) e^{-2\alpha\rho(x)}\, dx\Big\} \\
&\qquad \leq \Big\{\frac{1}{(1-\alpha^2)^2} \int_{B(y_0,\varepsilon)} u(y)\, dy\Big\}\Big\{\int_{B(x_0,\delta)} u(x) e^{-2\alpha\rho(x)}\, dx\Big\},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder y (10). Entonces,

$$\int_{B(x_0,\delta)} \int_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,y)\,dy\,dx \leq \frac{1}{(1-\alpha^2)} \Big(\int_{B(y_0,\varepsilon)} u \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{B(x_0,\delta)} u e^{-2\alpha\rho} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

o, dicho de otra forma,

$$\fint_{B(x_0,\delta)} \fint_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,y)\,dy\,dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \frac{1}{(1-\alpha^2)} \delta^{-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \Big(\fint_{B(y_0,\varepsilon)} u \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\fint_{B(x_0,\delta)} u e^{-2\alpha\rho} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

Ahora tomamos $\delta = \varepsilon = \|V\|_{L^\infty(\Omega)}^{-1/2}$. Como $-\Delta_x G(x,y) + V(x) G(x,y) = 0$ para todo $x, y \in \Omega$ con x lejos de y, podemos usar la desigualdad de Harnack dos veces para obtener que

$$G(x_0,y_0) \leq C \fint_{B(x_0,\delta)} \fint_{B(y_0,\varepsilon)} G(x,y)\,dy\,dx.$$

Así mismo, como $-\Delta u + V u = 1$, entonces

$$\fint_{B(y_0,\varepsilon)} u \leq C u(y_0), \qquad \fint_{B(x_0,\delta)} u \leq C u(x_0).$$

Por la desigualdad de Harnack y el Lema 4.2, para todo $x \in B(x_0,\delta)$ sabemos que

$$\rho\Big(x, B(y_0,\varepsilon), \frac{1}{u}\Big) \geq \rho\Big(x_0, y_0, \frac{1}{u}\Big) - C.$$

Finalmente, tenemos que

$$G(x_0,y_0) \leq C \sqrt{u(y_0)} \sqrt{u(x_0)} \|V\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{n}{2}} e^{-\alpha\rho(x_0,y_0,\frac{1}{u})},$$

como deséabamos. $\square$

Referencias

[Agm82] S. Agmon. Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982. 1

[ADFJM19] D. N. Arnold, G. David, M. Filoche, D. Jerison, and S. Mayboroda. Localization of eigenfunctions via an effective potential. *Comm. Partial Differential Equations*, 44(11):1186–1216, 2019. 1, 3

[Eva10] L. C. Evans. Partial differential equations, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. 1

[GT01] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. 4

[Pog] B. Poggi. Applications of the landscape function for SchrÃ¶dinger operators with singular potentials and irregular magnetic fields. Preprint. July 2021. 1, 3