Lección n°3: La función maximal de Fefferman-Phong-Shen

Septiembre 2022

En esta lección estudiaremos las propiedades de una función que hasta ahora no hemos mencionado, la función maximal de Fefferman-Phong-Shen (también conocida como la función de radio crítico), la cual viene del análisis armónico, y fue estudiada mucho antes que la función paisaje, en los años 90's. Esta función nos ayudará a entender decaimiento exponencial (*en la distancia Euclideana*) de soluciones al operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$ cuando V es de cierta manera fuertemente no degenerado.

A partir de esta lección, usaremos los símbolos c y C como constantes "universales", cuyo valor exacto no nos interesa tanto como sí nos interesa sus dependencias sobre las variables importantes en el problema. Por ejemplo, será importante en general que estas constantes no dependan del punto $x \in \mathbb{R}^n$, o de propiedades no controladas del potencial V. Pasando de línea a ínea en los argumentos, reusaremos el mismo símbolo para significar una constante universal como hemos detallado anteriormente, pero en cada desigualdad, la constante puede ser un valor distinto, siempre y cuando tengan las mismas dependencias aceptables. Damos un simple ejemplo de cómo esta notación es usada: si $f, g \geq 0$ son funciones tal que $f(x) \leq 3g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces tenemos que

$$(f(x) - g(x))^2 \leq C(f(x)^2 + g(x)^2) \leq Cg^2(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde la C en la última desigualdad no tiene el mismo valor que la C en la primera desigualdad. Lo importante, es que ambas constantes C son independendientes de x.

1. El problema con los resultados de decaimiento exponencial con respecto a la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$

En la lección anterior demostramos varios resultados de decaimiento exponencial de soluciones con respecto a la distancia de Agmon con peso $1/u$, donde u es la función paisaje de M. Filoche y S. Mayboroda. Estos resultados son altamente versátiles, ya que no hay casi ninguna suposición sobre V (salvo que $V \geq 0$), por lo que funcionana para una gran cantidad de potenciales eléctricos. Sin embargo, ¿son éstos realmente resultados de decaimiento exponencial? El problema es que si el potencial eléctrico V es muy degenerado (es decir, muy cercano a 0), entonces generalmente u será muy alto, lo que implica que la distancia de Agmon con peso $1/u$ será bastante degenerada, y entonces, en principio, la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ puede no tener nada que ver con la distancia Euclideana $|x - y|$.

Un ejemplo concreto es el caso en que $V \equiv \mathbf{1}_B$, donde B es la bola de radio 1 alrededor del origen en un dominio Ω acotado pero arbitrariamente grande. En este caso, $u(x)$ tiende a crecer como $|x|^2$ lejos de B y de la frontera $\partial\Omega$, y uno puede calcular que la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ será uniformemente acotada lejos de $\partial\Omega$. Entonces, se puede dar el caso de que $|x - y| \to +\infty$ a pesar de que $\rho(x, y, 1/u) \leq C < +\infty$.

No obstante la clase de ejemplos del párrafo anterior, los teoremas de decaimiento exponencial de la lección anterior son correctos; sólo hay que entender que, cuando $\rho(x, y, 1/u)$ es muy degenerado, entonces realmente no hay ningún decaimiento exponencial en la distancia Euclideana. Es en este sentido que decimos que los resultados de decaimiento exponencial de la lección anterior son *a priori*, ya que, sin mayor conocimiento del comportamiento de V, no podemos establecer decaimiento exponencial en la distancia Euclideana.

Esta cuestión nos lleva naturalmente a preguntarnos, ¿bajo qué condiciones en V podemos decir que el decaimiento exponencial con respecto a la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ implica decaimiento exponencial con respecto a la distancia Euclideana $|x - y|$? En el resto del curso, veremos una respuesta importante a esta pregunta.

2. El espacio de pesos RH_p

Para definir y estudiar las propiedades de la función maximal de Fefferman-Phong-Shen, será muy útil ver primero el espacio de pesos RH_p. Para simplificar la notación, escribimos que, para toda función medible F y todo conjunto medible S en $\mathbb{R}^n$,

$$\fint_S F(x)\,dx = \frac{1}{|S|}\int_S F(x)\,dx.$$

En otras palabras, $\fint_S F$ es el promedio de F en el conjunto S. Un *peso* es una función no negativa en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1. *Sea w un peso en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, y $p \in (1,\infty)$. Decimos que $w \in RH_p$ si existe una constante positiva C tal que para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\left(\fint_B w^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leq C \fint_B w(x)\,dx. \tag{1}$$

La mejor constante C posible que se puede utilizar en la desigualdad (1) se la conoce como la *característica RH_p de w*. Brevemente hablemos sobre ejemplos de funciones que satisfacen esta propiedad.

1. Si $P(x)$ es un polinomio en $\mathbb{R}^d$, entonces [Ste86] se puede demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|P\|_{L^\infty(B)} \leq C \fint_B |P|\,dy, \qquad \text{para toda bola } B$$

   donde C sólo depende del grado de P y de la dimensión n. Entonces todo polinomio pertenece a RH_p para todo $p \in (1,\infty]$.

2. (Ejercicio) Sea $p \in (1,\infty)$, y $\alpha > 0$. Entonces el peso $w(x) = |x|^\alpha$ está en el espacio RH_p si se tiene que $\alpha p > -n$. Por lo tanto, las funciones en RH_p pueden tener singularidades.

3. Sea w un peso en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Si $w \in A_p$ para algún $p \geq 1$, donde A_p es el espacio de *pesos de Muckenhoupt*, entonces existe $q > 1$ tal que $w \in RH_q$ (no es necesariamente cierto que $q = p$). Este resultado es clásico dentro de la teoría de pesos de Muckenhoupt en el análisis armónico; véase, por ejemplo, [Cha20], o [Gra14].

4. Contraejemplos incluyen los pesos positivos que decaen/crecen exponencialmente, y los pesos Bernoulli aleatorios (estos son los pesos cuyo gráfico es la “estática de televisión” que vimos en la primera lección).

En este curso, no estudiaremos en detalle las propiedades de este espacio; para eso, véase libros de análisis armónico donde se estudian los pesos de Muckenhoupt (por ejemplo, [Cha20, Gra14]). Pero sí usaremos algunas propiedades importantes de los pesos en RH_p, las cuales mencionamos a continuación.

Lema 2.1 (Condición doblante)**.** *Sea $p > 1$ y $w \in RH_p$. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende solo de n, p, y de la característica RH_p de w, tal que para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{2B} w(x)\,dx \leq C\int_B w(x)\,dx.$$

(Ejercicio) Si existe un conjunto abierto U tal que $w \equiv 0$ en U y $w \in RH_p$ para algún p, entonces $w \equiv 0$.

El ejercicio anterior nos dice que los pesos con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ nunca están en RH_p para ningún $p > 1$, al menos de que sean idénticamente 0 en todo $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.2 (Auto mejoramiento de los espacios RH)**.** *Sea $p > 1$ y $w \in RH_p$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in RH_{p+\varepsilon}$.*

Como fue mencionado anteriormente, todo peso de Muckenhoupt A_p es un peso en RH_q para algún $q > 1$; el converso también es cierto, por lo que todo peso en RH_p para algún $p > 1$, pertenece a algún A_q, $q > 1$. Recuérdese que por A_∞ se entiende la unión de todas las clases A_q, $q \in [1,\infty)$. Entonces, si $w \in RH_p$ para algún $p > 1$, tenemos también que $w \in A_\infty$. Es un resultado clásico en análisis armónico el siguiente lema sobre los pesos en A_∞.

Lema 2.3. *Sea $n \geq 1$ y $w \in RH_p$ para algún $p > 1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda bola B,*

$$\left|\left\{y \in B \ :\ w(y) \geq \varepsilon \fint_B w(z)\,dz\right\}\right| \geq \frac{1}{2}|B|.$$

Ahora usemos la propiedad de RH_p para demostrar un lema muy simple que usaremos luego.

Lema 2.4. *Sea $n \geq 3$, y $w \in RH_{n/2}$. Entonces existe $q > n/2$ y una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y r, R con $0 < r < R < +\infty$, tenemos que*

$$\frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} w(y)\, dy \leq C \Big(\frac{R}{r}\Big)^{\frac{n}{q}-2} \frac{1}{R^{n-2}} \int_{B(x,R)} w(y)\, dy.$$

Demostración. Como $w \in RH_{n/2}$, entonces usando el Lema 2.2, sabemos que existe $q > n/2$ tal que $w \in RH_q$. Ahora sea $x \in \mathbb{R}^n$ y r, R con $0 < r < R < +\infty$, y entonces

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,r)} w(y)\, dy \leq \Big(\fint_{B(x,r)} w^q(y)\, dy\Big)^{1/q} &= \Big(\frac{|B(x,R)|}{|B(x,r)|} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,r)} w^q(y)\, dy\Big)^{1/q} \\ &\leq \Big(\frac{R}{r}\Big)^{\frac{n}{q}} \Big(\fint_{B(x,R)} w^q(y)\, dy\Big)^{1/q} \leq C \Big(\frac{R}{r}\Big)^{\frac{n}{q}} \fint_{B(x,R)} w(y)\, dy,\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos la desigualdad de Hölder, en la siguiente desigualdad usamos el hecho de que $B(x,r) \subset B(x,R)$, y finalmente usamos la desigualdad (1) en la bola $B(x,R)$. □

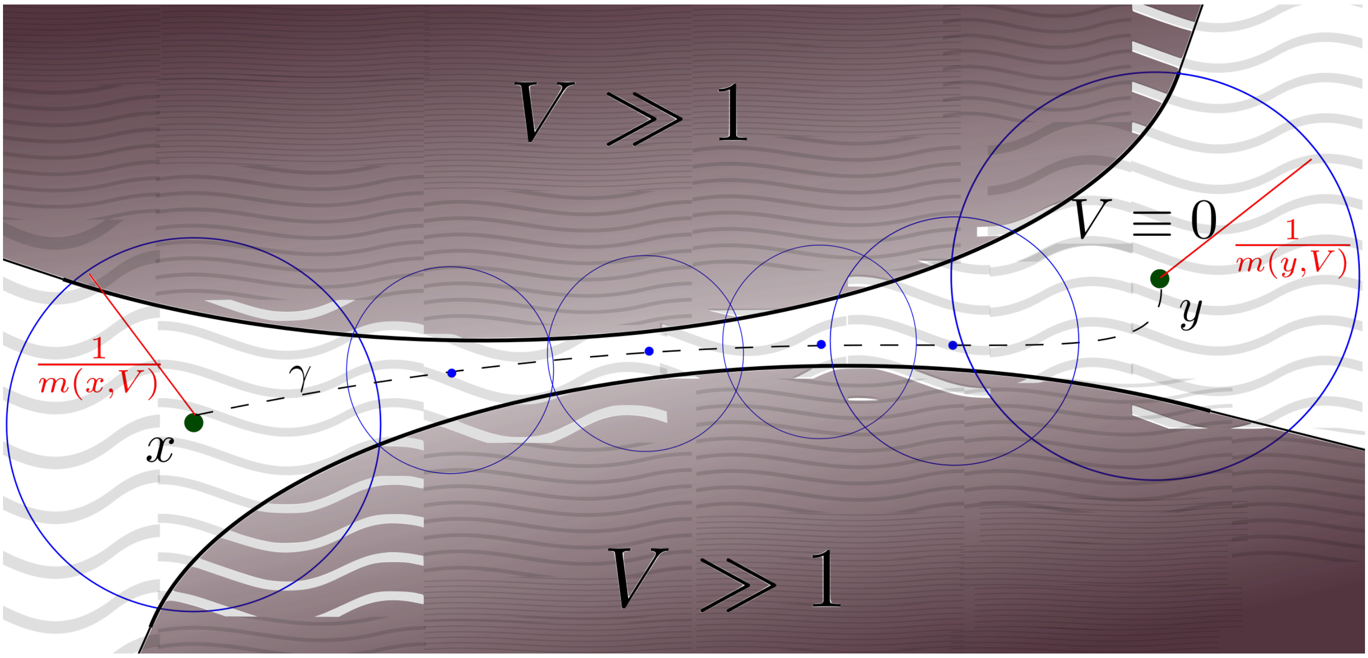
3. La función de Fefferman-Phong-Shen

Definición 2. *Sea $n \geq 3$ y $V \in RH_{n/2}$. La* función de Fefferman-Phong-Shen *es la función $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\frac{1}{m(x)} := \sup \Big\{ r > 0 \ :\ \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq 1 \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede entender, informalmente, que $1/m(x)$ es el máximo radio tal que el operador de Schrödinger se comporta como el Laplaciano dentro de la bola $B(x, 1/m(x))$. De hecho, en la lección 4 veremos que

$$\big|\Gamma_{-\Delta+V}(x,y) - \Gamma_{-\Delta}(x,y)\big| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}} \big(|x-y| m(x)\big)^{2-\frac{n}{q}}, \qquad y \in B(x, 1/m(x)), x \in \mathbb{R}^n.$$



Esta función es extremadamente útil para entender el decaimiento exponencial de las funciones asociadas al operador de Schrödinger, como las funciones propias, las soluciones fundamentales, y las soluciones de Poisson, *bajo la suposición de que $V \in RH_{n/2}$*. Usamos la distancia de Agmon, definida en la lección anterior, pero con el peso m^2: $\rho(x,y,m^2)$. Tenemos el siguiente teorema. En la siguiente lección, demostraremos una desigualdad del siguiente teorema.

Teorema 3.1. *[She99] Sea $n \geq 3$, $V \in RH_{n/2}$, y Γ_L la solución fundamental del operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$. Entonces, existen constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, C > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} e^{-\varepsilon_1 \rho(x,y,m^2)} \leq \Gamma_L(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}} e^{-\varepsilon_2 \rho(x,y,m^2)}. \tag{2}$$

En la siguiente lección, demostraremos la segunda desigualdad en (2). Brevemente comparemos esta desigualdad con el Teorema 4.1 de la lección 2; si asumimos que $V \in RH_{n/2} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces, además de los estimados en (2), tenemos el estimado

$$\Gamma_L(x,y) \le C\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{n/2}\sqrt{u(\tilde{x})}\sqrt{u(\tilde{y})}e^{-\rho(\tilde{x},\tilde{y},1/u)/2}.$$

Consecuentemente vemos que hay estimados de decaimiento exponencial para la solución fundamental en términos tanto de m^2 como de $1/u$. ¿Cuál es el "mejor" resultado? ¿Hay alguna relación entre $1/u$ y m^2? Esta pregunta es resuelta por el siguiente teorema.

Teorema 3.2 ([Pog]). *Sea $n \ge 3$ y $V \in RH_{n/2}$. Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C}m^2(x) \le \frac{1}{u(x)} \le Cm^2(x).$$

En otras palabras, m^2 y $1/u$ son *puntualmente equivalentes*. Por lo tanto, las distancias de Agmon $\rho(x,y,m^2)$ y $\rho(x,y,1/u)$ son puntualmente equivalentes también. Entonces, la respuesta a cuál distancia de Agmon es mejor, es que ¡son igual de buenas, módulo una constante multiplicativa! Demostraremos este teorema en la lección 5.

Por el resto de esta lección, estudiemos propiedades de la función m, y el *principio de incertidumbre de Fefferman-Phong*, el cual es el mecanismo que nos permitirá estudiar el decaimiento exponencial de la solución fundamental en términos de la distancia de Agmon $\rho(x,y,m^2)$.

4. Propiedades de la función de Fefferman-Phong-Shen

En toda esta sección, asumimos que $n \ge 3$ y que $V \in RH_{n/2}$. Los siguientes resultados son fáciles y quedan como ejercicios.

(Ejercicio) Demostrar que, si $r = 1/m(x)$, entonces

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy = 1.$$

(Ejercicio) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Usando el Lema 2.4, demostrar que si existen constantes c_1, C_1 tal que

$$c_1 \le \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le C_1,$$

entonces existen constantes c_2, C_2, que solo dependen de n, c_1, c_2, y la característica $RH_{n/2}$ de V, tal que

$$\frac{c_2}{m(x)} \le r \le \frac{C_2}{m(x)}.$$

Lema 4.1. *Existen constantes $C, C_0 > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que*

1. *Si $|x-y| \le \frac{C_0}{m(x)}$, entonces*
$$\frac{1}{C}m(x) \le m(y) \le Cm(x).$$

2. *Tenemos que*
$$m(y) \le C(1+|x-y|m(x))^k m(x), \qquad \textit{para todo } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

3. *Tenemos que*
$$m(y) \ge \frac{1}{C}\frac{m(x)}{(1+|x-y|m(x))^{k/(k+1)}}, \qquad \textit{para todo } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. (1.) Sea $r = 1/m(x)$, y asumimos que $|x-y| \le C_0 r$. Entonces

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(y,r)} V \le \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,(C_0+1)r)} V \le \frac{C}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V = C,$$

donde en la primera desigualdad usamos la desigualdad triangular, y en la segunda desigualdad usamos la condición doblante, Lema 2.1. Mediante un argumento parecido, queda como ejercicio demostrar que

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(y,r)} V \ge \frac{1}{C}.$$

Por el ejercicio previo a este lema, concluimos las desigualdades deseadas.

(2.) Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j-1}r < |x-y| \leq 2^j r$. Sea $r_1 \in (0,r)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$c2^{j-1}r \leq 2^k r_1 \leq 2^j r.$$

Entonces, usando el Lema 2.4, la desigualdad triangular, y el Lema 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B(y,r_1)} V \leq C\Big(\frac{2^k r_1}{r_1}\Big)^{\frac{n}{q}-n} \int_{B(y,2^k r_1)} V \leq C(2^k)^{\frac{n}{q}-n} \int_{B(y,2^j r)} V \leq C(2^k)^{\frac{n}{q}-n} \int_{B(x,2^{j+1}r)} V \\ \leq C^j (2^k)^{\frac{n}{q}-n} \int_{B(x,r)} V \leq C^j (2^k)^{\frac{n}{q}-n} r^{n-2}. \quad (3)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{r_1^{n-2}} \int_{B(y,r_1)} V \leq C(2^k)^{\frac{n}{q}-n} C^j \Big(\frac{r}{r_1}\Big)^{n-2} \leq \frac{1}{2},$$

para todo $r_1 \leq C_1^{-j} r$, escogiendo C suficientemente grande. Por definición ahora, sabemos que

$$\frac{1}{m(y)} \geq C_1^{-j} r = \frac{C_1^{-j}}{m(x)}.$$

Queda como ejercicio ver que esta desigualdad implica el estimado deseado.

(3.) Ejercicio (usar (2.)). ☐

Para finalizar esta lección, demostremos el principio de incertidumbre de Fefferman-Phong:

Teorema 4.1. *Existe $C > 0$, que depende solo de n y de la característica $RH_{n/2}$ de V, tal que para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} m^2(x) f^2(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Big[|\nabla f(x)|^2 + V(x) f^2(x)\Big]\,dx. \quad (4)$$

Compárese la desigualdad (4) con el principio de incertidumbre que satisface la función paisaje, el cual estudiamos en la Lección 1, y usamos en la Lección 2 para concluir decaimiento exponencial de funciones asociadas al operador de Schrödinger.

Demostración. Fijamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = 1/m(x_0)$, y escribimos $B = B(x_0, r_0)$. Usando la desigualdad de Poincaré, se puede demostrar que

$$\int_B \int_B |f(x) - f(y)|^2\,dx\,dy \leq C r_0^{n+1} \int_B |\nabla f(x)|^2\,dx.$$

Por el otro lado, es fácil ver que

$$\int_B V(x) f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{C}\frac{1}{r_0^n} \int_B \int_B V(y) f^2(y)\,dx\,dy.$$

Sumando estas desigualdades, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_B |\nabla f|^2 + V f^2 &\geq \frac{1}{C}\frac{1}{r_0^n} \int_B \int_B \Big[\frac{c_0}{r_0^2}|f(x)-f(y)|^2 + V(y)|f(y)|^2\Big]\,dy\,dx \\ &\geq \frac{1}{C}\frac{1}{r_0^n} \int_B \int_B \Big[\min\Big\{\frac{c_0}{r_0^2}, V(y)\Big\}|f(x)-f(y)|^2 + \min\Big\{\frac{c_0}{r_0^2}, V(y)\Big\}|f(y)|^2\Big]\,dy\,dx \\ &\geq \frac{1}{C}\frac{1}{r_0^n} \int_B \int_B \min\Big\{\frac{c_0}{r_0^2}, V(y)\Big\}|f(x)|^2\,dy\,dx. \quad (5)\end{aligned}$$

Como $V \in RH_{n/2}$, podemos aplicar el Lema 2.3, para obtener la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Big|\Big\{y \in B \;:\; V(y) \geq \varepsilon \fint_B V(z)\,dz\Big\}\Big| \geq \frac{1}{2}|B|.$$

Escogiendo $c_0 = \frac{\varepsilon}{|B(0,1)|}$, tenemos que

$$\int_B \min\left\{\frac{c_0}{r_0^2}, V(y)\right\} dy \geq \int_{\{y \in B \,:\, V(y) \geq \varepsilon \fint_B V\}} \min\left\{\frac{c_0}{r_0^2}, V(y)\right\} dy \geq c r_0^{n-2} = c m(x_0)^2 r_0^n.$$

Entonces, tenemos que

$$\int_{B(x_0,r_0)} |\nabla f|^2 + V f^2 \geq c \int_{B(x_0,r_0)} m(x_0)^2 f^2(x)\, dx \geq c \int_{B(x_0,r_0)} m^2(x) f^2(x)\, dx, \qquad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Para tener el resultado sobre $\mathbb{R}^n$ en vez de la bola B, se debe multiplicar la desigualdad anterior por $m(x_0)^n$, integrar la desigualdad sobre $x_0 \in \mathbb{R}^n$, usar las propiedades de m y el Teorema de Fubini. Queda como ejercicio realizar estos últimos pasos. □

Referencias

[Agm82] S. Agmon. Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[ADFJM19] D. N. Arnold, G. David, M. Filoche, D. Jerison, and S. Mayboroda. Localization of eigenfunctions via an effective potential. *Comm. Partial Differential Equations*, 44(11):1186–1216, 2019.

[Cha20] D. Chamorro. Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volume 3 of *Colección de Matemáticas Universitarias*. Amarun, 2020. 2

[Eva10] L. C. Evans. Partial differential equations, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[GT01] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[Gra14] L. Grafakos. Classical Fourier analysis, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014. 2

[Pog] B. Poggi. Applications of the landscape function for SchrÃ¶dinger operators with singular potentials and irregular magnetic fields. Preprint. July 2021. 4

[She99] Z. Shen. On fundamental solutions of generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 167(2):521–564, 1999. 3

[Ste86] E. M. Stein. Oscillatory integrals in Fourier analysis. In *Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984)*, volume 112 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 307–355. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986. 2