Lección n°4: Decaimiento exponencial de la solución fundamental

Septiembre 2022

En esta lección demostraremos el decaimiento exponencial de la solución fundamental Γ_L del operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$, cuando $V \in RH_{n/2}$, usando la función maximal de Fefferman-Phong-Shen. Además, demostraremos rigurosamente que en las bolas de radio $1/m$, el operador de Schrödinger se comporta muy cercanamente al Laplaciano.

1. Decaimiento exponencial de la solución fundamental

Escribimos nuevamente el Teorema 3.1 de la Lección 3. Recuérdese que la función maximal de Fefferman-Phong-Shen fue definida en la sección 3 de la Lección 3, y la solución fundamental ha sido definida en la sección 4 de la Lección 2.

Teorema 1.1 ([She99]). *Sea $n \geq 3$, $V \in RH_{n/2}$, y Γ_L la solución fundamental del operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$. Entonces, existen constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, C > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}e^{-\varepsilon_1\rho(x,y,m^2)} \leq \Gamma_L(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}}e^{-\varepsilon_2\rho(x,y,m^2)}. \qquad (1)$$

En la Lección 3 discutimos por qué los resultados de decaimiento exponencial a priori con respecto a la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ pueden en realidad no dar ninguna información de decaimiento exponencial con respecto a la distancia Euclideana $|x - y|$; ésto es precisamente lo que ocurre cuando V es muy degenerado, es decir, muy cercano a 0 mucho tiempo. Sin embargo, la suposición $V \in RH_{n/2}$ implica que V es no degenerado en un sentido muy fuerte, y en este caso, debido al Lema 4.1 de la Lección 3 sobre las propiedades de la función m, se puede demostrar que

$$\frac{1}{C}|x-y|^{\frac{1}{k_0}} \leq \rho(x,y,m^2) \leq C|x-y|^{k_0},$$

cuando la distancia $|x - y|$ es grande. Entonces, aunque no se puede decir que $\rho(x, y, m^2)$ es puntualmente equivalente a la distancia Euclideana $|x - y|$, sí que es controlada por poderes racionales de la distancia Euclideana, y ésto es suficiente para concluir que decaimiento exponencial con respecto a $\rho(x, y, m^2)$ *es también decaimiento exponencial en la distancia Euclideana.*

Por el otro lado, como en (1) tenemos desigualdades por arriba y por abajo de decaimiento exponencial de la solución fundamental, entonces vemos que la distancia de Agmon $\rho(x, y, m^2)$ controla muy de cerca el comportamiento real de la solución fundamental Γ_L, pero nótese que ésta no es la distancia de Agmon con respecto a la función paisaje, $\rho(x, y, 1/u)$. Sin embargo, en la Lección 5 veremos que, módulo constantes multiplicativas, estas distancias son de hecho las mismas.

Ahora demostramos el decaimiento exponencial por arriba de la solución fundamental; es decir, demostramos la segunda desigualdad en (1). No demostraremos en estas lecciones la primera desigualdad en (1); para su demostración, véase [She99] o [MP19].

2. Demostración de la segunda desigualdad en el Teorema 1.1

Antes de pasar a la demostración, vamos a introducir notación que simplificará la argumentación luego. Ya hemos visto en las lecciones anteriores que usamos los símbolos c y C como constantes “universales”, cuyo valor exacto no nos interesa tanto como sí nos interesa sus dependencias sobre las variables importantes en el problema. Ahora, si $f, g \geq 0$ son funciones, decimos que $f \lesssim g$ si existe una constante C tal que $f \leq Cg$. Análogamente definimos también $f \gtrsim g$. Escribimos que $f \approx g$ si se tiene que $f \lesssim g$ y que $f \gtrsim g$. Por ejemplo, el Teorema 3.2 de la Lección 3, el cual demostraremos mañana, dice que $1/u \approx m^2$ si $V \in RH_{n/2}$.

Tenemos que demostrar que

$$\Gamma_L(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}} e^{-\varepsilon_2 \rho(x,y,m^2)}, \qquad \text{para todo } x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Para hacerlo, el primer paso es hacer uso de la siguiente proposición importante.

Proposición 2.1. *Sea $v \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \backslash B)$ una solución débil a la ecuación $-\Delta v + Vv = 0$ en $\mathbb{R}^n \backslash B$, y $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\phi \equiv 0$ en $2B$. Sea $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $g \geq 0$ y $|\nabla g(x)| \leq Cm(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} m^2(x) |v\phi|^2 e^{2\varepsilon g}\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} v^2 |\nabla \phi|^2 e^{2\varepsilon g}\, dx.$$

Se tiene que tener en mente que "$g(x) = \rho(x, y_0, m^2)$", aunque por razones técnicas no se puede literalmente escoger g de esta forma, y se tiene que aproximar $\rho(x, y_0, m^2)$ por funciones acotadas y suaves. En esta lección, no nos preocuparemos de este detalle de aproximación, y pretenderemos que podremos escoger $g = \rho(x, y_0, m^2)$.

La demostración de la Proposición 2.1 es cercana a la demostración del Teorema 2.1 de la Lección 2 sobre el decaimiento exponencial de soluciones de Poisson al operador de Schrödinger con respecto a la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$. Pero, en este caso, se utiliza el principio de incertidumbre de Fefferman-Phong (Teorema 4.1, Lección 3) en vez del principio de incertidumbre de la función paisaje (Proposición 5.2, Lección 1), y se utilizan las propiedades de la función m (Lema 4.1, Lección 3), en vez de las propiedades de la función paisaje. Queda como ejercicio obtener la proposición, siguiendo el esquema aquí planteado.

Ahora nos enfocamos en demostrar la desigualdad (2). Fijamos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, con $x_0 \neq y_0$. De hecho, sin pérdida de generalidad, escogemos $y_0 = 0$ (ejercicio: ¿por qué se puede hacer ésto sin pérdida de generalidad?). Primero, notemos que si $|x_0| \leq C/m(0)$, entonces

$$\rho(x_0, 0, m^2) \leq C;$$

dejamos esta simple observación como ejercicio también. Entonces, si $|x_0| \leq C/m(0)$, tenemos que $e^{-\rho(x_0,0,m^2)} \approx 1$, y consecuentemente,

$$\Gamma_L(x_0, 0) \leq \frac{C}{|x_0|^{n-2}} \approx \frac{1}{|x_0|^{n-2}} e^{-\rho(x_0,0,m^2)}.$$

Ahora nos concentramos en el caso más genérico e importante: el caso de que $x_0 > C/m(0)$. Si C es lo suficientemente grande (y siempre podemos escoger C de esta forma), entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$B(x_0, 2/m(x_0)) \cap B(0, 2/m(0)) = \varnothing.$$

Escribamos $r = 1/m(0)$. Como $\Gamma_L(\cdot, 0)$ satisface la ecuación $-\Delta\Gamma_L(\cdot,0) + V(\cdot)\Gamma_L(\cdot,0) = 0$ en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, podemos aplicar la Proposición 2.1 con $v(x) = \Gamma_L(x, 0)$, $g(x) = \rho(x, 0, m^2)$, y una función $\phi \in C_c^\infty(B(0, 2M) \backslash B(0, r))$ para algún $M \geq 4r$. Nótese que M puede ser arbitrariamente grande, y nos damos la libertad de escogerlo. De hecho, pedimos de ϕ que tenga las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \phi \leq 1, & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ |\nabla\phi(x)| \leq \frac{C}{r}, & \text{for } x \in B(0,2r)\backslash B(0,r), \\ |\nabla\phi(x)| \leq \frac{C}{M}, & \text{for } x \in B(0,2M)\backslash B(0,M). \end{array}$$

Una función como ϕ se conoce como una *función de corte*; es una técnica muy popular en análisis utilizar funciones de corte para localizar estimados globales.

Entonces, a partir de la Proposición 2.1 y las propiedades de la función de corte ϕ, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{2r \leq |x| \leq M} m^2(x) |\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\, dx &\leq \frac{C}{r^2} \int_{r \leq |x| \leq 2r} |\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\, dx \\ &\quad + \frac{C}{M^2} \int_{M \leq |x| \leq 2M} |\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\, dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Como el estimado anterior es correcto para M arbitrariamente grande, como la constante C no tiene dependencia alguna en M, y como (ejercicio)

$$\sup_{M \geq 4r} \left| \int_{M \leq |x| \leq 2M} |\Gamma_L(x,0)|^2\, dx \right| < +\infty,$$

al enviar $M \to \infty$ en la desigualdad (3) y asumiendo que $\rho(x,0,m^2) \leq C$, veremos que

$$\frac{C}{M^2}\int_{M\leq|x|\leq 2M} |\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\,dx \longrightarrow 0, \qquad \text{cuando } M\to\infty,$$

lo que implica que

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} m^2(x)|\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\,dx \leq \frac{C}{r^2}\int_{r\leq|x|\leq 2r} |\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\,dx. \tag{4}$$

Hay un problema técnico con este argumento, y es que la desigualdad $\rho(x,0,m^2) \leq C$ no es correcta para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sin embargo, si usamos $g(x) = g_N(x) = \min\{\rho(x,0,m^2), N\}$ en vez de $g(x) = \rho(x,0,m^2)$, entonces sí tendremos que $g_N(x) \leq N$; luego, se podrá enviar $N \to \infty$ usando el Lema de Fatou para recuperar el estimado (4). Dejamos como ejercicio ver estos detalles. Continuando ahora, usamos que $\rho(x,0,m^2) \leq C$ cuando $x \in B(0,2r)$ y el simple estimado $|\Gamma_L(x,0)| \lesssim 1/|x|^{n-2}$ para ver que

$$\begin{aligned}\int_{x\in\mathbb{R}^n\setminus B(0,2r)} m^2(x)|\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\,dx &\leq \frac{C}{r^2}\int_{r\leq|x|\leq 2r} \frac{1}{|x|^{2(n-2)}} e^{2C}\,dx \leq \frac{C}{r^2}\int_r^{2r} \frac{1}{t^{2(n-2)}} t^{n-1}\,dt \\ &\leq \frac{C}{r^{n-2}}. \end{aligned}\tag{5}$$

Escribamos $R = 1/m(x_0)$. Como $B(x_0,R) \subseteq \{x \in \Omega \ : \ |x| \geq 2r\}$, entonces el estimado (5) en particular implica que

$$\int_{B(x_0,R)} m^2(x)|\Gamma_L(x,0)|^2 e^{2\varepsilon\rho(x,0,m^2)}\,dx \leq \frac{C}{r^{n-2}}.$$

Entonces,

$$\left(\fint_{B(x_0,R)} |\Gamma_L(x,0)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq \frac{C}{(Rr)^{\frac{n-2}{2}}} e^{-\varepsilon\rho(x_0,0,m^2)}.$$

Usando el estimado de Moser (véase, por ejemplo, [HL11, Capítulo 4]), y las definiciiones de R y r, vemos que

$$\Gamma_L(x_0,0) \leq C\{m(x_0)m(0)\}^{\frac{n-2}{2}} e^{-\varepsilon\rho(x_0,0,m^2)}. \tag{6}$$

Para finalizar, usamos lo siguiente: si $|x-y|m(x) \geq 2$, entonces

$$\rho(x,y,m^2)^{k_0+1} \geq c\{1+|x-y|m(x)\}. \tag{7}$$

Asumiendo este resultado, es fácil ver que

$$|x_0|m(x_0) + |x_0|m(0) \leq C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{2(n-2)}\rho(x_0,0,m^2)}.$$

El resultado se tiene ahora cuando se combina este estimado con (6), asumiendo que (7) es correcto. Dejamos la demostración de (7) como ejercicio (pista: usar la definición de ρ y las propiedades de m en el Lema 4.1 de la Lección 3).

3. Comparación entre $\Gamma_L(x,y)$ y $\Gamma_{-\Delta}(x,y)$ cuando $|x-y|$ es pequeño

El siguiente estimado nos dice que en las bolas de radio $1/m$, la solución fundamental del operador de Schrödinger Γ_L se comporta muy de cerca a la solución fundamental del Laplaciano Γ_0.

Lema 3.1. *Sea $x,y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Supongamos que $|x-y| < 1/m(y)$ y que $V \in RH_q$ para $q > n/2$. Entonces*

$$|\Gamma_L(x,y) - \Gamma_0(x,y)| \leq \frac{C\{|x-y|m(y)\}^{2-\frac{n}{q}}}{|x-y|^{n-2}}. \tag{8}$$

El resultado también es correcto para $n = 3$, pero en este caso hay que reemplazar el exponente $2 - n/q$ en (8) por un exponente $\delta \in (0, \min\{1, 2-n/q\})$.

Demostración. Tenemos la siguiente fórmula:

$$\Gamma_0(x,y) = \Gamma_L(x,y) + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,z)\Gamma_L(z,y)V(z)\,dz. \tag{9}$$

Para ver formalmente por qué es correcta esta fórmula, nótese que por definición de la solución fundamental, se tiene que $-\Delta\Gamma_0 = \delta_y$, $-\Delta\Gamma_L + V\Gamma_L = \delta_y$, y restando estas identidades, vemos que

$$-\Delta(\Gamma_0 - \Gamma_L) = V\Gamma_L,$$

por lo que usando la formula de representación para las soluciones al operador $(-\Delta)^{-1}$, concluimos la fórmula (9). Dada esta identidad, solo debemos demostrar que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,z)\Gamma_L(z,y)V(z)\,dz\Big| \leq \frac{C\{|x-y|m(y)\}^{2-\frac{n}{q}}}{|x-y|^{n-2}}.$$

Usando el estimado exponencial sobre Γ_L que demostramos en la sección anterior, se tiene que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,z)\Gamma_L(z,y)V(z)\,dz\Big| \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-x|^{n-2}|z-y|^{n-2}}. \tag{10}$$

Para continuar con nuestro análisis, tenemos que romper la integral en tres partes: Escribamos $r = |x-y|$, y entonces, como

$$\mathbb{R}^n = B(x,r/2)\bigcup B(y,r/2)\bigcup\big\{z\in\mathbb{R}^n : |z-x|\geq r/2,\ |z-y|\geq r/2\big\},$$

definimos las integrales

$$I_1 := \int_{B(x,r/2)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-x|^{n-2}|z-y|^{n-2}},$$

$$I_2 := \int_{B(y,r/2)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-x|^{n-2}|z-y|^{n-2}},$$

$$I_3 := \int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|z-x|\geq r/2,\ |z-y|\geq r/2\}} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-x|^{n-2}|z-y|^{n-2}},$$

y consecuentemente, podemos re-escribir el estimado (10) como

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0(x,z)\Gamma_L(z,y)V(z)\,dz\Big| \leq C\big\{I_1 + I_2 + I_3\big\}.$$

Ahora estimaremos cada una de las integrales I_1, I_2, e I_3 por separado. Empezamos con I_1. Primero, como ejercicio dejamos las siguientes dos desigualdades (la primera es muy fácil, para la segunda hay que usar el hecho de que $V \in RH_q$ y las propiedades del espacio RH_q, $q > n/2$)

$$I_1 \leq \frac{C}{r^{n-2}}\int_{B(x,r/2)} \frac{V(z)\,dz}{|z-x|^{n-2}} \leq \frac{C}{r^{n-2}}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r/2)} V(z)\,dz.$$

Ahora escribamos $R := 1/m(x)$, nótese que $R \approx 1/m(y)$, usando el Lema 2.4 de la Lección 3 y la definición de m, tenemos que

$$I_1 \leq \frac{C}{r^{n-2}}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{2-n/q}\frac{1}{R^{n-2}}\int_{B(x,R)} V(z)\,dz \leq \frac{C}{r^{n-2}}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{2-n/q}. \tag{11}$$

Véase que el estimado final en (11) es precisamente el que intentamos demostrar (una vez que escribimos lo que r y R son por definición), por lo que ya hemos terminado con la integral I_1. Nos preocupamos ahora de la integral I_2; sin embargo, es un ejercicio muy fácil ver que ésta se controla con casi el mismo argumento que nos permitió controlar la integral I_1. El resultado final para la integral I_2 es:

$$I_2 \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}}\Big(|x-y|m(y)\Big)^{2-n/q}.$$

Nos falta estudiar la integral I_3. De hecho, estimaremos I_3 rompiéndolo en dos partes más: nótese que

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(y,r/2)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-y|^{2n-4}} \\ &\leq C\int_{\frac{r}{2}\leq|z-y|<2R} \frac{V(z)\,dz}{|z-y|^{2n-4}} + C\int_{|z-y|>R/2} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)}V(z)\,dz}{|z-y|^{2n-4}} =: I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio obtener el siguiente estimado para la integral I_{31} (argumentar como lo hicimos para la integral I_1):

$$I_{31} \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}}\Big(|x-y|m(y)\Big)^{2-n/q}.$$

Nos falta I_{32}, en el cual ahora nos enfocamos. La idea es romper $\mathbb{R}^n \backslash B(y, R/2)$ en ánulos y usar el decaimiento exponencial. Vemos que

$$\begin{aligned} I_{32} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j R \leq |z-y| < 2^{j+1}R} \frac{e^{-\varepsilon\rho(z,y,m^2)} V(z)\,dz}{|z-y|^{2n-4}} &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(c^j)}}{(2^j R)^{2n-4}} \int_{B(y,2^{j+1}R)} V(z)\,dz \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(c^j)}}{(2^j R)^{2n-4}} C_0^j R^{n-2} \leq \frac{C}{R^{n-2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(c^j)}}{(2^j)^{2n-4}} C_0^j \leq \frac{C}{R^{n-2}} \\ &\leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{2-n/q} \frac{1}{r^{n-2}}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración del estimado (8) cuando reunimos los estimados para I_1, I_2, I_{31}, e I_{32}. □

Referencias

[Cha20] D. Chamorro. Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volume 3 of *Colección de Matemáticas Universitarias*. Amarun, 2020.

[Gra14] L. Grafakos. Classical Fourier analysis, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.

[HL11] Q. Han and F. Lin. Elliptic partial differential equations, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2011. 3

[MP19] S. Mayboroda and B. Poggi. Exponential decay estimates for fundamental solutions of Schrödinger-type operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(6):4313–4357, 2019. 1

[She99] Z. Shen. On fundamental solutions of generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 167(2):521–564, 1999. 1

[Ste86] E. M. Stein. Oscillatory integrals in Fourier analysis. In *Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984)*, volume 112 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 307–355. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.