Lección n°5: Comparabilidad entre la función paisaje y la función maximal de Fefferman-Phong-Shen

Septiembre 2022

En esta lección demostraremos la equivalencia puntual entre la recíproca de la función paisaje, $1/u$, y el cuadrado de la función maximal de Fefferman-Phong-Shen, m^2, veremos el significado de este resultado, y varios corolarios.

Antes de lanzarnos de lleno a la demostración, motivemos el problema, recordando muchos de los resultados y discusiones que hemos venido llevando en estas lecciones.

1. Motivación

Sea $n \geq 3$ y $V \in RH_{n/2}$. Recuérdese que en la Lección 3 definimos la función maximal de Fefferman-Phong-Shen m, mediante la identidad

$$\frac{1}{m(x)} := \sup\Big\{r > 0 \ : \ \frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \leq 1\Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Cuando $V \in RH_{n/2}$ (el espacio de pesos $RH_{n/2}$ fue definido en la Lección 3), vimos en el Teorema 1.1 de la Lección 4 que la solución fundamental $\Gamma_L(x,y)$ del operador de Schrödinger $-\Delta + V$ tiene decaimiento exponencial en la distancia de Agmon $\rho(x,y,m^2)$, con controles de decaimiento exponencial por arriba *y por debajo*:

$$\frac{1}{C}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}e^{-\varepsilon_1\rho(x,y,m^2)} \leq \Gamma_L(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}}e^{-\varepsilon_2\rho(x,y,m^2)}. \tag{1}$$

En este sentido, la distancia de Agmon $\rho(x,y,m^2)$ controla fuertemente el comportamiento de decaimiento exponencial de Γ_L. Este resultado ya se entendía desde finales de los 90's [She99].

Por el otro lado, vimos en las Lecciones 1 y 2 que si definimos la función paisaje u mediante

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_L(x,y)\,dy, \quad \text{de modo que } -\Delta u + Vu = 1 \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

entonces, bajo mucho más débiles suposiciones sobre V, en este caso también tendremos que las soluciones de Poisson, la solución fundamental $\Gamma_L(x,y)$, y las funciones propias obedecen cotas (por arriba) de decaimiento exponencial, pero esta vez con respecto a la distancia de Agmon $\rho(x,y,1/u)$. Para ser concretos, demostramos en el Teorema 4.1 de la Lección 2 que, si $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\Gamma_L(x,y) \lesssim \|V\|^{n/2}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\sqrt{u(\tilde{x})}\sqrt{u(\tilde{y})}e^{-\frac{1}{2}\rho(\tilde{x},\tilde{y},1/u)}. \tag{2}$$

Consecuentemente, vemos que tenemos dos cotas distintas de decaimiento exponencial para la solución fundamental Γ_L cuando $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap RH_{n/2}$, específicamente, los estimados (1) y (2). Los estimados con la función paisaje u empiezan a estudiarse en artículos recientes desde 2011 en adelante (véase los artículos [FM12, ADFJM19, Pog]).

En luz de los estimados (1) y (2), es natural preguntarse cuál de las dos distancias de Agmon $\rho(x,y,m^2)$ y $\rho(x,y,1/u)$ es la "mejor", en el sentido de que implica mayor decaimiento exponencial. La primera distancia, $\rho(x,y,m^2)$, nos garantiza también un decaimiento exponencial por debajo (1), lo cual parece ser un punto a favor de ella. Otro punto a favor de esta distancia es que, como dijimos en la Lección 4, se puede demostrar que

$$\frac{1}{C}|x-y|^{\frac{1}{k_0}} \leq \rho(x,y,m^2) \leq C|x-y|^{k_0},$$

lo cual demuestra que esta distancia "recuerda" de cierta manera a la distancia Euclideana $|x-y|$; es decir, no se degenera completamente con respecto a ella, como sí puede pasar con la distancia $\rho(x,y,1/u)$ si V es muy degenerado (refiérase a la discusión al inicio de la Lección 3).

Sin embargo, vimos en la Lección 1 que la función paisaje permite obtener resultados numéricos bastante fuertes de decaimiento exponencial, y muchos de los estimados de decaimiento exponencial en la Lección 2 poseen la ventaja de que las constantes en los estimados son bastante buenas y no dependen de la característica $RH_{n/2}$ del potencial V (compárese con las constantes prácticamente inescrutables en el estimado (1) y en las propiedades de m).

Esta pregunta, de cuál distancia es "mejor", nos lleva naturalmente a cuatro distintas posibilidades:

- $\frac{1}{u} \lesssim m^2$ en $\mathbb{R}^n$,
- $\frac{1}{u} \gtrsim m^2$ en $\mathbb{R}^n$,
- $\frac{1}{u} \approx m^2$ en $\mathbb{R}^n$,
- No hay relacion puntual entre $1/u$ y m^2.

¿Cuál de estas posibilidades se cumple? La respuesta correcta es la tercera posibilidad (y disculpen que ya hemos hecho *spoilers* de este asunto desde la Lección 3), con constantes que dependen de la característica $RH_{n/2}$ de V. Este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1.1 ([Pog]). *Sea $n \geq 3$ y $V \in RH_{n/2}$. Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C} m^2(x) \leq \frac{1}{u(x)} \leq C m^2(x).$$

Este teorema será demostrado en la Sección 3. Primero, veamos varios corolarios de este teorema.

2. Corolarios del Teorema 1.1

Observemos que debido al Teorema 1.1, en muchos de los resultados que hemos visto durante estas lecciones, podemos reemplazar la función $1/u$ puntualmente con la función m^2, preservando el mismo resultado. Un primer ejemplo de esto es que

$$\rho(x, y, 1/u) \approx \rho(x, y, m^2), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto estas distancias se comportan esencialmente de la misma manera. En otras palabras, la respuesta a cuál distancia es mejor, termina siendo "ambas" (si quieren ver el vaso medio lleno), o "ninguna" (si quieren ver el vaso medio vacío).

En particular, también tenemos el estimado

$$\frac{1}{C} |x - y|^{\frac{1}{k_0}} \leq \rho(x, y, 1/u) \leq C |x - y|^{k_0},$$

lo que implica una respuesta concreta a una pregunta que nos planteamos en la Lección 3. ¿Qué condiciones sobre V son suficientes para tener que la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ no sea degenerada con respecto a la distancia Euclideana $|x - y|$? Una respuesta, dada por el estimado anterior, es que es suficiente que $V \in RH_{n/2}$.

Ahora resaltamos otro resultado inmediato del Teorema 1.1, pero importante. El siguiente corolario nos dice que el estimado (1) sigue siendo correcto si reemplazamos $\rho(x, y, m^2)$ con $\rho(x, y, 1/u)$.

Corolario 2.1. *Sea $n \geq 3$, $V \in RH_{n/2}$, y Γ_L la solución fundamental del operador de Schrödinger $L = -\Delta + V$. Entonces, existen constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, C > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} e^{-\varepsilon_1 \rho(x, y, 1/u)} \leq \Gamma_L(x, y) \leq \frac{C}{|x - y|^{n-2}} e^{-\varepsilon_2 \rho(x, y, 1/u)}.$$

Este corolario evidencia concretamente que la función paisaje controla muy de cerca a una propiedad muy importante del operador de Schrödinger como lo es la solución fundamental Γ_L.

Finalmente, veamos que debido al Teorema 1.1, la función $1/u$ hereda todas las propiedades previamente mencionadas de la función m^2. Queda como un muy simple ejercicio demostrar el siguiente corolario a partir de las propiedades de m estudiadas en la Lección 3.

Corolario 2.2. *Existen constantes $C, C_0 > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que*

1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que*
$$\frac{1}{C}\frac{1}{u(x)} \leq \fint_{B(x,\sqrt{u(x)})} V(y)\,dy \leq C\frac{1}{u(x)}.$$

2. *Si $|x-y| \leq C_0\sqrt{u(x)}$, entonces*
$$\frac{1}{C}u(x) \leq u(y) \leq Cu(x).$$

3. *Tenemos que*
$$\frac{1}{\sqrt{u(y)}} \leq C\Big(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{u(y)}}\Big)^k \frac{1}{\sqrt{u(x)}}, \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4. *Tenemos que*
$$\frac{1}{\sqrt{u(y)}} \geq \frac{1}{C}\frac{1}{\sqrt{u(x)}(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{u(x)}})^{k/(k+1)}}, \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

El primer enunciado nos dice exactamente cómo u se compara con el potencial V. El segundo enunciado es una desigualdad de Harnack para u, mucho más fuerte de lo que podríamos obtener usando la teoría cásica de ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Los enunciados 3 y 4 nos permiten comparar los valores de u en puntos lejanos entre sí.

3. Demostración del Teorema 1.1

Primero demostramos el estimado $u \gtrsim 1/m^2$, el cual no es relativamente elemental. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$. Usando el Lema 3.1 de la Lección 4, se puede demostrar que (queda como ejercicio ver los detalles)
$$\Gamma(x,y) \geq \frac{c_n}{2|x-y|^{n-2}}, \qquad \text{para todo } y \in B\Big(x, \frac{c}{m(x)}\Big),$$
donde c_n es la constante dimensional tal que $\Gamma_{-\Delta} = \frac{c_n}{|x-y|^{n-2}}$. Entonces,
$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,y)\,dy \geq \int_{B(x,c/m(x))} \Gamma(x,y)\,dy \gtrsim \int_0^{c/m(x)} \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1}\,dr \gtrsim \frac{1}{m^2(x)},$$
lo cual termina la demostración de este resultado.

Nos tornamos ahora a la demostración del estimado $u \lesssim 1/m^2$, el cual es más complicado. Primero, con un argumento parecido al del Teorema 2.1 de la Lección 2, tenemos que (queda como ejercicio obtener este estimado)
$$\int_{\mathbb{R}^n} m^2(y) e^{2\varepsilon\rho(y,\operatorname{supp} f, m^2)} |L^{-1}f(y)|^2\,dy \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{m^2(y)} f^2(y)\,dy \tag{3}$$
para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto. Nótese que la función paisaje sobre $\mathbb{R}^n$ decididamente no es una solución Poisson de Lax-Milgram, por lo que no podemos usar el estimado (3) para la función paisaje u directamente. Nuestra estrategia en cambio radicará en re-escribir a u como la suma de soluciones de Poisson, mediante una descomposición de la función 1 en anillos. Luego, explotaremos el hecho de que estas descomposiciones exhiben decaimiento exponencial gracias al estimado (3) para terminar la demostración.

Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$, sea $A_0 := B\big(x, \frac{1}{m(x)}\big)$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $A_k := B\big(x, \frac{2^k}{m(x)}\big) \backslash B\big(x, \frac{2^{k-1}}{m(x)}\big)$. Escribamos
$$f_k := \mathbf{1}_{A_k}, \qquad u_k := L^{-1} f_k, \qquad U_M := \sum_{k=0}^{M} u_k.$$
Por el principio maximal, tenemos que $U_N \geq U_M$ cuando $N \geq M$. Además, como (ejercicio)
$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z,y)\,dy = \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z,y) \sum_{k=0}^{M} \mathbf{1}_{A_k}(y)\,dy = \lim_{M\to\infty} U_M,$$

entonces $U_M \nearrow u$ puntualmente mientras $M \to \infty$.

Ahora estimamos cada $u_k(x)$. Para $u_0(x)$, debido al estimado (3), tenemos que

$$\int_{B(x,1/m(x))} u_0^2(y)\,dy \lesssim \int_{B(x,1/m(x))} \frac{1}{m^4(y)}\,dy \lesssim \frac{1}{m^4(x)}|B(x,1/m(x))|,$$

donde hemos usa las propiedades de m. Entonces se tiene que

$$\left(\fint_{B(x,1/m(x))} u_0^2(y)\,dy\right)^{1/2} \lesssim \frac{1}{m^2(x)}.$$

Siguiente, aplicando la desigualdad de Harnack para la ecuación $-\Delta w + Vw = 1$, concluimos que

$$u_0(x) \lesssim \frac{1}{m^2(x)}. \tag{4}$$

Sea ahora $k \geq 1$. Usando (3), vemos que

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1/m(x))} u_k^2(y) e^{2\varepsilon\rho(y,\operatorname{supp} f_k, m^2)}\,dy &\lesssim \frac{1}{m^2(x)}\int_{A_k}\frac{1}{m^2(y)}\,dy\\ &\lesssim \frac{1}{m^4(x)}\int_{A_k}\left[1+|y-x|m(x)\right]^{\frac{a}{a+1}}dy \lesssim \frac{1}{m^4(x)}\int_{2^{k-1}/m(x)}^{2^k/m(x)}\left[1+rm(x)\right]^{\frac{a}{a+1}} r^{n-1}\,dr\\ &\lesssim \frac{1}{m^4(x)}|B(x,1/m(x))|2^{2kn},\end{aligned}$$

donde una vez más usamos las propiedades de m. Usando otra vez la desigualdad de Harnack (nótese que u_k resuelve $-\Delta w + Vw = 0$ en la bola $B(x,1/m(x))$), obtenemos

$$\begin{aligned}u_k(x) \lesssim \left(\fint_{B(x,1/m(x))} u_k^2(y)\,dy\right)^{1/2} &\lesssim \frac{1}{m^2(x)}2^{kn}e^{-\varepsilon\rho(x,\operatorname{supp} f_k, m^2)}\\ &\lesssim \frac{1}{m^2(x)}2^{kn}e^{-\varepsilon[1+\operatorname{dist}(x,\operatorname{supp} f)m(x)]^{\frac{1}{a+1}}} \lesssim \frac{1}{m^2(x)}2^{kn}e^{-\varepsilon 2^{\frac{k}{a+1}}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Estamoms listos para recolectar nuestros estimados. Para cada $M \in \mathbb{N}$, usamos (4) y (5) para ver que

$$U_M(x) = \sum_{k=0}^{M} u_k(x) \lesssim \frac{1}{m^2(x)}\sum_{k=0}^{M} 2^{kn}e^{-\varepsilon 2^{\frac{k}{a+1}}} \lesssim \frac{1}{m^2(x)}.$$

Como $U_M(x) \nearrow u(x)$ y U_M está acotado puntualmente por $1/m^2(x)$, el resultado deseado se consigue finalmente. □

4. Conclusión y problemas abiertos

En estas lecciones hemos estudiado en detalle algunas técnicas contemporáneas en la intersección entre el análisis armónico, las ecuaciones en derivadas parciales, y la física matemática, y demostrado resultados muy recientes, al filo de lo entendido, a la orilla de lo que se entenderá. Vimos métodos matemáticos que nos permiten entender algo sobre el decaimiento exponencial de las funciones propias, de las soluciones de Poisson, y de la solución fundamental, en términos de la función paisaje.

El área de la función paisaje y sus aplicaciones es en la actualidad un área muy emocionante y popular de estudio, con colaboraciones interdisciplinarias entre las matemáticas y la física, y queda mucho por descubrirse aún. Y en realidad, en estas lecciones hemos estudiado solo un aspecto de la función paisaje, cuando existe una literatura cada vez más creciente de resultados relacionados e impresionantes en este tema. Brevemente, veamos unas pocas de las muchas preguntas abiertas relacionadas a los temas estudiados. ¡Quién sabe, tal vez usted, estimada lectora, tenga una muy buena idea que permita responderlas!

1. El Teorema 1.1 ha sido demostrado bajo la suposición de que $V \in RH_{n/2}$. De hecho, esta suposición se puede generalizar un poco más, pero no mucho más. Sin embargo, no queda claro que el Teorema 1.1 deja de ser correcto mucho más allá del espacio $RH_{n/2}$. ¿Existe algún V no degenerado (específicamente, tal que la condición (ii) en el Teorema 1.18 del artículo [Pog] se cumpla) tal que la conclusión del Teorema 1.1 se quiebra?

2. Como es evidente, la demostración del Teorema 1.1 utiliza muy fuertemente la maquinaria de la función maximal de Fefferman-Phong-Shen, la cual estudiamos en detalle en las Lecciones 3 y 4. Sin embargo, sería interesante obtener la conclusión del Teorema 1.1, y/o el Corolario 2.2, sin utilizar los resultados de decaimiento exponencial con respecto a $\rho(x, y, m^2)$, y en vez, usar puramente técnicas de EDPs y análisis armónico.

3. El estimado (3) está ahora demostrado para $V \in RH_{n/2}$, pero debería ser correcto más allá del espacio $RH_{n/2}$. Por ejemplo, en el caso del operador de Schrödinger aleatorio de la Lección 1, con potenciales aleatorios Bernoulli, se especula que se debería tener también que la distancia de Agmon $\rho(x, y, 1/u)$ se comporte cercanamente a la distancia Euclideana, aunque seguramente este caso sería mucho más complicado que el caso $V \in RH_{n/2}$, ya que no se pueden utilizar las mismas técnicas.

Y eso es. ¡Hasta la próxima!

Referencias

[ADFJM19] D. N. Arnold, G. David, M. Filoche, D. Jerison, and S. Mayboroda. Localization of eigenfunctions via an effective potential. *Comm. Partial Differential Equations*, 44(11):1186–1216, 2019. 1

[FM12] M. Filoche and S. Mayboroda. Universal mechanism for Anderson and weak localization. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 109(37):14761–14766, 2012. 1

[HL11] Q. Han and F. Lin. Elliptic partial differential equations, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2011.

[MP19] S. Mayboroda and B. Poggi. Exponential decay estimates for fundamental solutions of Schrödinger-type operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(6):4313–4357, 2019.

[Pog] B. Poggi. Applications of the landscape function for SchrÃ¶dinger operators with singular potentials and irregular magnetic fields. Preprint. July 2021. 1, 2, 5

[She99] Z. Shen. On fundamental solutions of generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 167(2):521–564, 1999. 1