Lección n°1: Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

UPS, julio 2015

Índice

Introducción

A partir de la invención del cálculo diferencial por Newton y Leibniz en el siglo XVII, se modelizan los fenómenos físicos por medio de ecuaciones que hacen intervenir las variaciones (es decir las derivadas) de ciertas cantidades observables (es decir funciones). Cuando todos los objetos considerados en el sistema físico dependen de una sola variable y cuando se consideran derivadas en esta variable, las ecuaciones obtenidas se denominan *ecuaciones diferenciales ordinarias* (E.D.O.). Este tipo de ecuaciones ha sido estudiada por varios matemáticos durante varios siglos y aún existen problemas abiertos relativos a las propiedades de las soluciones de estas ecuaciones. Cuando el fenómeno físico observado depende de dos o más variables y cuando se consideran derivadas en estas diferentes variables, entonces las ecuaciones resultantes se llaman *ecuaciones en derivadas parciales* (E.D.P.) y esta es una rama muy activa en la investigación de las matemáticas. Antes de empezar a trabajar con ecuaciones en derivadas parciales, es necesario recordar algunas técnicas usuales en ecuaciones diferenciales ordinarias pues algunas de estas técnicas serán indispensables para estudiar las E.D.P.s.

1. Dos ejemplos simples como punto de partida

(i) Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'(t) = 1. \tag{1}$$

Lo primero que deseamos saber es qué funciones verifican esta identidad. En este caso sencillo vemos directamente que las funciones $\varphi_1(t) = t+2$ y $\varphi_2(t) = t+3$ (y más generalmente las funciones de tipo $\varphi(t) = t+c$ con $c \in \mathbb{R}$) verifican esta ecuación. Este ejemplo muestra que, sin mayores informaciones, esta ecuación diferencial tiene una *infinidad* de soluciones y esta situación es bastante incómoda pues si bien estamos en capacidad de encontrar soluciones de esta ecuación, ¿cuál de todas ellas es la que nos interesa?

En este ejemplo vemos sin embargo que existe una sola solución que verifica $\varphi(0) = 2$. Obtenemos de esta manera un *problema de valor inicial* (también llamado *problema de Cauchy*) que podemos escribir

$$\begin{cases} \varphi'(t) = 1, \\ \varphi(0) = 2, \end{cases}$$

y que admite una única solución $\varphi(t) = t + 2$.

$\Longrightarrow$ Vemos entonces que no basta con escribir la ecuación (1) para obtener un problema *bien planteado.*

(ii) Sea ahora el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(\varphi(t)) = \varphi(t)^2, \\ \varphi(1) = -1, \end{cases} \tag{2}$$

que admite una única solución dada por $\varphi(t) = -t^{-1}$. El problema aquí está dado por el hecho que esta función φ no está definida en el punto $t = 0$, a pesar de que el segundo miembro f es una función continua (regular) en todo su dominio de definición.

$\Longrightarrow$ Vemos entonces que todo resultado de existencia es necesariamente de naturaleza *local* y que para obtener resultados *globales* será indispensable ser más precisos. En particular, este ejemplo muestra la importancia del dominio de resolución de las ecuaciones diferenciales.

2. Definiciones y notaciones generales

Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector del espacio euclídeo en dimensión $n \geq 1$ y definimos $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ (no necesariamente acotado) y si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, diremos que

- f es acotada en Ω si $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| < +\infty$,
- f es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{N}$, si $\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$, con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice y con la notación $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$ y $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x)$. El caso $\mathcal{C}^0$ corresponde a las funciones continuas.
- f pertenece al espacio de funciones hölderianas $\mathcal{C}^{0,s}(\Omega)$, con $0 < s < 1$, si f es una función continua que verifica
$$\|f\|_{\mathcal{C}^{0,s}} = \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \sup_{0\neq y\in\Omega} \sup_{x\in\Omega} \frac{|f(x) - f(x+y)|}{|y|^s} < +\infty,$$
- f es lipschitziana (o pertenece al espacio de Lipschitz $\text{Lip}(\Omega)$) si f es continua y verifica
$$\|f\|_{\text{Lip}} = \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \sup_{0\neq y\in\Omega} \sup_{x\in\Omega} \frac{|f(x) - f(x+y)|}{|y|} < +\infty.$$

Recordamos dos resultados que relacionan el proceso de derivación y de integración en una variable.

Teorema 1 (primer teorema fundamental) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces la función determinada por la expresión*
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
es derivable sobre el intervalo $]a, b[$ y para todo $x \in]a, b[$ se tiene $F'(x) = f(x)$: es decir que F es una primitiva de f.

Teorema 2 (segundo teorema fundamental) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, si ϕ es una primitiva de f, entonces tenemos la identidad:*
$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

Retomaremos el estudio de ciertas propiedades de las funciones más adelante.

3. Teoremas de existencia y unicidad

En todo lo que sigue, I será un intervalo (no necesariamente acotado) de la recta real $\mathbb{R}$, Ω será un subconjunto abierto (no necesariamente acotado) de $\mathbb{R}^n$ y $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ será una función continua.

Nos interesamos en estudiar las ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{3}$$

en donde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en la variable t.

Para poder estudiar este tipo de ecuaciones diferenciales es necesario fijar un poco de terminología.

Definición 1

- *Una* solución *del problema (3) está dada por la pareja (J, φ) en donde $J \subset I$ es un intervalo de la recta real y donde $\varphi : J \longrightarrow \Omega$ es una función función de clase $\mathcal{C}^1$ que verifica la ecuación (3) en todo punto del interior de J.*
- *Si $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, resolver el* problema de Cauchy *asociado consiste en encontrar una solución (J, φ) del problema (3) que verifica $t_0 \in J$ y tal que $\varphi(t_0) = x_0$.*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), \\ \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

- *Si (J, φ) es una solución del problema (3), diremos que esta solución es* global *si se tiene que $J = I$.*
- *Sean (J_1, φ_1) y (J_2, φ_2) dos soluciones del problema (3). Diremos que la solución (J_2, φ_2)* prolonga *la solución (J_1, φ_1) si se tiene $J_1 \subset J_2$ y si para todo $t \in J_1$ se tiene $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.*
- *Una solución (J, φ) es* maximal *si no admite ninguna prolongación.*

Con esta definición podemos enunciar nuestro primer resultado de existencia.

Teorema 3 (Cauchy - Lipschitz) *Sean α, β dos reales positivos y sea (t_0, x_0) un punto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Definimos el conjunto $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por*

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \alpha, \quad |x - x_0| \leq \beta\}.$$

Sea $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función y sea $M > 0$ tal que se tenga la acotación siguiente sobre todo punto $(t, x) \in Q$:

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Si además suponemos que existe una constante $C > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|$, para todo $(t, x) \in Q$ y todo $(t, y) \in Q$, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)),$$

admite una única solución (J, φ) que verifica:

- *el intervalo de existencia J de la solución es una vecindad del punto t_0: $J = [t_0 - T, t_0 + T]$, con $T = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$.*
- *esta solución resuelve el problema de Cauchy (4) asociado al dato inicial (t_0, x_0) y se tiene $\varphi(t_0) = x_0$.*
- *para todo $s \in J$ se tiene que $(s, \varphi(s)) \in Q$.*

Observación 1

- *Si la función f es acotada y* lipschitziana *en la segunda variable, entonces este resultado nos proporciona la* existencia *y la* unicidad *de la solución en la vecindad Q: se trata de un resultado* local.
- *El tiempo de existencia T depende del tamaño de la vecindad Q y de la constante M, pero no depende de la constante Lipschitz de la función f.*
- *Este resultado nos dice que* existe *una* única *solución, pero veremos que no proporciona ningún método práctico para encontrarla. Los diferentes métodos de resolución serán estudiados posteriormente.*

Demostración.

Empezamos estudiando la *existencia* de la solución.

$\Longrightarrow$ Empezamos observando que si la función $\varphi(t)$ verifica $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$, entonces esta función verifica el siguiente problema integral:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

y estos dos problemas son equivalentes gracias el primer teorema fundamental del cálculo. Nótese además que la función $\varphi(t)$ está *bien definida.*

$\Longrightarrow$ Vamos entonces a *construir* una solución de este problema integral.

$\Longrightarrow$ Sea $T = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. Definimos para todo $k \geq 1$ una sucesión de funciones $\varphi_k : J \longrightarrow \Omega$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) & = x_0, \\ \\ \varphi_k(t) & = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s))ds \qquad \text{con } k \geq 1 \text{ y } |t - t_0| \leq T. \end{cases} \tag{5}$$

En particular, cada función φ_k también está bien definida.

$\Longrightarrow$ Verifiquemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo tiempo s tal que $|s - t_0| \leq T$ se tiene que $(s, \varphi_k(s)) \in Q$.

- si $k = 0$ se tiene que $(s, \varphi_0(s)) \in Q$,
- Supongamos que se tiene esta propiedad para $k - 1$ y mostremos que esta propiedad se mantiene en $k = 1$. Estudiamos entonces:

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq M\frac{\beta}{M} = \beta, \tag{6}$$

  de donde se deduce que $(s, \varphi_k(s)) \in Q$ para todo $k \geq 1$.
- Esto muestra que para todo $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(s, \varphi_k(s))_{k\in\mathbb{N}}$ pertenece al conjunto Q.

$\Longrightarrow$ Mostremos ahora que la sucesión $(\varphi_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente para un cierto t fijo tal que $|t - t_0| \leq T$. Para ello estudiamos la cantidad $|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)|$ y tenemos:

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq M\frac{C^{k-1}|t - t_0|^k}{k!} \quad k \geq 1.$$

Para mostrar esta desigualdad procederemos por inducción. En efecto, se tiene esta estimación cuando $k = 1$ por los cálculos precedentes realizados en (6), de manera que podemos suponer que se tiene esta acotación para $k - 1$ y vamos a verificarlo para el valor de k y para ello escribimos:

$$\begin{aligned} |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| &= \left| \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s))ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-2}(s))ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s)) - f(s, \varphi_{k-2}(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_{k-1}(s)) - f(s, \varphi_{k-2}(s))|\, ds, \end{aligned}$$

recordando que la función f es lipschitziana en la segunda variable obtenemos

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq C \int_{t_0}^{t} |\varphi_{k-1}(s) - \varphi_{k-2}(s)|\, ds,$$

usamos ahora la hipótesis de inducción para obtener

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq C \int_{t_0}^{t} M \frac{C^{k-1}\,|s-t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq M \frac{C^{k-1}|t-t_0|^k}{k!} \leq M \frac{C^{k-1}T^k}{k!}.$$

$\Longrightarrow$ Con esta estimación notamos que se tiene la convergencia uniforme de la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en el intervalo $[t_0 - T, t_0 + T] = J$ hacia una función φ, continua, y tal que $|\varphi(t) - \varphi_0(t)| \leq \beta$.

$\Longrightarrow$ Dado que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ y que la función f es lipschitziana en la segunda variable, se tiene para todo $s \in J$ que $f(s, \varphi_k(s)) \longrightarrow f(s, \varphi(s))$ uniformemente.

$\Longrightarrow$ Podemos entonces pasar al límite en (5) para obtener

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \qquad \text{con } |t - t_0| \leq T.$$

Hemos entonces construido una solución del problema: φ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$ y tal que $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$.

Ahora es necesario estudiar la *unicidad* de la solución.

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\bar{\varphi}$ es una función que verifica la ecuación $\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t) = f(t, \bar{\varphi}(t))$ y es tal que $\bar{\varphi}(t_0) = x_0$ y además es tal que para todo $s \in J$ se tiene $(s, \bar{\varphi}(s)) \in Q$. Por lo anterior tenemos entonces que $\bar{\varphi}$ se escribe de esta forma

$$\bar{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{\varphi}(s))ds \qquad \text{con } |t - t_0| \leq T.$$

$\Longrightarrow$ Tenemos entonces

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \bar{\varphi}(s))|ds$$

Dado que la función f es lipschitziana se obtiene

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| \leq C \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \bar{\varphi}(s)|ds$$

$\Longrightarrow$ Si notamos $\phi(t) = |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)|$, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 1 (Gronwall) *Sea $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y sea $c \in [a, b]$. Si existen dos constantes positivas A y B tales que*

$$\phi(t) \leq A + B \left| \int_{c}^{t} \phi(s)ds \right|, \qquad \textit{para todo } t \in [a, b],$$

entonces se tiene la mayoración

$$\phi(t) \leq A e^{B|t-c|}, \qquad \textit{para todo } t \in [a, b].$$

Aplicando este resultado con $A = 0$, obtenemos que $\phi(t) = |\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| = 0$ para todo $t \in J$, de donde se obtiene la unicidad de la solución.

$\blacksquare$

Terminamos la prueba del teorema con la demostración del lema de Gronwall.

Prueba del Lema 1. Supongamos $t \geq c$ y definamos $F(t)$ por medio de la expresión $F(t) = A + B\displaystyle\int_c^t \phi(s)ds$. Tenemos en particular que $F \in \mathcal{C}^1$ y que $\phi(t) \leq F(t)$ para todo $t \in [c, b]$ y además se tiene $F'(t) \leq B\phi(t) \leq BF(t)$. A partir de estos hechos se deduce

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Bt}F(t)\right) = e^{-Bt}\left(F'(t) - BF(t)\right) \leq 0, \qquad \text{para todo } t \in [c, b],$$

y entonces se tiene $e^{-Bt}F(t) \leq e^{-Bc}F(c) = Ae^{-Bc}$ de donde obtenemos que $\phi(t) \leq F(t) \leq Ae^{B(t-c)}$.

Para el caso cuando $t \leq c$, definimos $G(t) = A + B\displaystyle\int_t^c \phi(s)ds$. Se tiene que $G \in \mathcal{C}^1$, $\phi(t) \leq G(t)$ y $G' = -B\phi \geq -BG$ de donde se obtiene $\frac{d}{dt}(e^{Bt}G) \geq 0$, lo que implica que $e^{Bt}G(t) \leq e^{Bc}G(c)$, es decir que se tiene $\phi(t) \leq G(t) \leq Ae^{B(c-t)}$. $\blacksquare$

El teorema de Cauchy-Lipschitz nos proporciona la existencia y la unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias bajo la hipótesis que la función f es *lipschitziana*.

Es posible relajar esta hipótesis y suponer que la función f es solamente *continua*, pero en este caso se pierde la unicidad.

Teorema 4 (Arzela-Péano) *Sea $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sean α, β dos reales positivos. Definimos el conjunto $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por*

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \alpha, \quad |x - x_0| \leq \beta\}.$$

Sea $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y sea $M > 0$ tal que se tenga la acotación siguiente sobre todo punto $(t, x) \in Q$:

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$$

admite una solución (J, φ), no necesariamente única, en donde $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ con $T = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$ y tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Observación 2 *Si relajamos la hipótesis de lipschitzianidad de la función f y solo suponemos que esta función es continua, podemos aún obtener una solución de la ecuación diferencial $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$, pero perdemos la* unicidad.

Ejemplo. Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} & = 3t^{\frac{2}{3}}, \\ \varphi(0) & = 0. \end{cases}$$

La función $t^{\frac{2}{3}}$ es continua, pero no es lipschitziana, de manera que podemos esperar obtener una solución, pero no se puede esperar tener la unicidad. En efecto: $\varphi(t) = 0$ es una solución sobre $J = \mathbb{R}$ de esta ecuación diferencial y $\bar{\varphi}(t) = t^3$ también es una solución de esta ecuación diferencial sobre J.

Observación 3 *Con estos dos resultados vemos que, inclusive en el caso relativamente simple de las ecuaciones diferenciales ordinarias, hay que tener mucho cuidado al estudiar la existencia y la unicidad de las soluciones.*

Este problema se amplifica cuando se estudia las ecuaciones en derivadas parciales en donde a veces el simple hecho de estudiar la existencia y/o la unicidad puede ser un problema muy complicado.

Moraleja: *antes* de lanzarse en teorías complicadas, en métodos de resolución y en otras aventuras, es *indispensable* asegurarse que los objetos de los cuales se trata de decir algo *existen.*

4. Métodos de Resolución

Ahora que hemos visto con los dos teoremas anteriores las condiciones necesarias para obtener la *existencia* de soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias, vamos a hacer un recuento rápido de algunos métodos de resolución.

Nuestro objetivo aquí no es el de hacer una descripción completa de las E.D.O., sino más bien de recordar un par de técnicas que serán utilizadas posteriormente al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales.

4.1. Ecuaciones lineales homogéneas de primer orden

Sea I un intervalo de la recta real y sea $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0.$$

La solución de esta ecuación está dada por las funciones $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que se escriben de la forma $\varphi(t) = \lambda e^{-A(t)}$ en donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y donde la función $A(t)$ es una primitiva de la función $a(t)$.

En efecto, se tiene

$$\varphi' + a\varphi = 0 \iff \big(\varphi' + a\varphi\big)e^A = 0 \iff (\varphi e^A)' = 0 \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : \varphi e^A = \lambda \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : \varphi = \lambda e^{-A}.$$

Observación 4

- *Nótese que al no haber especificado un valor inicial, lo que se obtiene es una* infinidad *de soluciones parametradas por el índice $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *La existencia de las soluciones está asegurada por el teorema de Cauchy-Lipschitz pues la función f es de la forma $f(t, \varphi(t)) = a(t)\varphi(t)$ y es por lo tanto lipschitziana en la segunda variable.*

4.2. Ecuaciones lineales de primer orden con segundo miembro

Muy a menudo es necesario estudiar ecuaciones de la forma

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t), \tag{7}$$

donde $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.

La solución de este tipo de ecuaciones será construida como la suma de la solución φ_0 de la ecuación homogénea

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0,$$

con una solución particular $\bar{\varphi}$ de la ecuación (7).

Para ello utilizaremos el siguiente método:

$\Longrightarrow$ Sea φ_0 una solución no nula del problema homogéneo.

$\Longrightarrow$ Buscaremos una solución particular del problema (7) de la forma $\bar{\varphi} = \gamma\varphi_0$ en donde $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una nueva función.

$\Longrightarrow$ Tenemos
$$\bar{\varphi}' + a\bar{\varphi} = b \iff (\gamma'\varphi_0 + \gamma\varphi_0') + a\gamma\varphi_0 = b \iff \gamma'\varphi_0 = b,$$
se obtiene entonces $\gamma' = \frac{b}{\varphi_0}$ de donde se deduce γ por primitivación.

$\Longrightarrow$ De esta manera hemos obtenido la solución particular $\bar{\varphi} = \gamma\varphi_0$ buscada.

$\Longrightarrow$ La solución final de la ecuación diferencial con segundo miembro es entonces $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$.

Este método se conoce como el método de la *variación de la constante.*

Observación 5

- *De la misma manera que en el caso homogéneo, al no haber especificado un valor inicial, existe una infinidad de soluciones de este problema con segundo miembro.*
- *La ecuación (7) también se puede escribir de la forma*
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),$$
donde $f(t,\varphi(t)) = b(t) - a(t)\varphi(t)$. *Estamos en el marco del teorema de Cauchy-Lipschitz pues esta función es lipschitziana en la segunda variable.*

4.3. Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden

Sea I un intervalo de la recta real y sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos reales no nulos. Consideramos la ecuación diferencial ordinaria
$$\varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = 0.$$
A esta ecuación asociamos la ecuación característica $r^2 + ar + b = 0, \quad$ con $r \in \mathbb{K}$, notaremos su discriminante $\Delta = a^2 - 4b$.

La solución de esta ecuación está dada por las funciones $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que son dos veces derivables tales que:

- si la ecuación característica admite dos soluciones r_1 y r_2 distintas, entonces
$$\varphi(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, \quad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{K}, \text{para } i = 1, 2.$$
- si la ecuación característica admite una sola solución $(-a/2)$, entonces
$$\varphi(t) = (\lambda t + \mu)e^{-\frac{a}{2}t}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$
- si la ecuación característica no admite solución $(\Delta < 0)$, entonces
$$\varphi(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(\lambda\cos(\sqrt{-\Delta}/2\ t) + \mu\sin(\sqrt{-\Delta}/2\ t)\right),$$
con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

4.4. Ecuaciones lineales inhomogéneas de segundo orden

Si el segundo miembro es de la forma $P(x)e^{kx}$ donde P es un polinomio de grado n y $k \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

- Si k no es solución de la ecuación caractéristica, entonces se buscarán soluciones del tipo $Q(x)e^{kx}$, donde $deg(Q) = deg(P)$,
- Si k es una raíz simple de la ecuación caractéristica, entonces se buscarán soluciones del tipo $Q(x)e^{kx}$, donde $deg(Q) = deg(P) + 1$,
- Si k es una raíz doble de la ecuación caractéristica, entonces se buscarán soluciones del tipo $Q(x)e^{kx}$, donde $deg(Q) = deg(P) + 2$.

La solución general de las ecuaciones de segundo orden inhomogéneas, será entonces la suma de la solución homogénea con la solución obtenida por el método anterior.

4.5. Ecuación de Bernoulli

Estas ecuaciones son de la siguiente forma.

Si $A, B, C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, el problema consiste en resolver la ecuación diferencial

$$A(t)\varphi'(t) + B(t)\varphi(t) + C(t)\varphi^{\alpha}(t) = 0, \tag{8}$$

con $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

$\Longrightarrow$ para ello consideramos el cambio de variable $y(t) = \varphi^{1-\alpha}(t)$, de manera que $y'(t) = (1-\alpha)\frac{\varphi'(t)}{\varphi^{\alpha}(t)}$.

$\Longrightarrow$ al dividir la ecuación (8) por φ^{α} y usando este cambio de variable se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{1-\alpha}A(t)y'(t) + B(t)y(t) + C(t) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden.

* * *

$\Longrightarrow$ Vemos con esta pequeña lección introductoria que inclusive en las ecuaciones diferenciales ordinarias existen problemas de:

- existencia de soluciones,
- unicidad de soluciones,

y que la solución de estos dos problemas no necesariamente proporciona un método sencillo para resolver la ecuación.

$\Longrightarrow$ Todos estos problemas *también* aparecerán al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales.