Lección n°6: Espacios de Hilbert, Espacios de Sobolev

UPS, julio 2015

Índice

1. Espacios de Hilbert

1.1. Introducción y primeros resultados

Los espacios de Hilbert son espacios que poseen muchas propiedades y que nos permitirán estudiar de forma muy directa y sencilla algunos problemas relacionados a las ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 1 (Producto Escalar) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio vectorial, un producto escalar es una aplicación bilineal simétrica*

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica los siguientes puntos:

- *se tiene $(u,u)_{\mathbb{H}} \geq 0$ para todo $u\in\mathbb{H}$,*
- *se tiene $(u,u)_{\mathbb{H}} > 0$ si $u \neq 0$.*

Todo producto escalar verifica las siguientes propiedades

$\Longrightarrow$ para todo $u,v\in\mathbb{H}$, se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|(u,v)_{\mathbb{H}}| \leq (u,u)_{\mathbb{H}}^{1/2}(v,v)_{\mathbb{H}}^{1/2}$

$\Longrightarrow$ a partir de todo producto escalar se puede definir una norma sobre el espacio $\mathbb{H}$ escribiendo $\|u\|_{\mathbb{H}} = (u,u)_{\mathbb{H}}^{1/2}$.

$\Longrightarrow$ Una propiedad importante de este tipo de normas es que verifican la identidad del paralelogramo:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{\mathbb{H}}^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{2}\Big(\|u\|_{\mathbb{H}}^2 + \|v\|_{\mathbb{H}}^2\Big)$$

Definición 2 (Espacio de Hilbert) *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial $\mathbb{H}$ dotado de un producto escalar $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}}$ y que es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ asociada al producto escalar.*

El ejemplo de base en este curso está dado por el espacio de Lebesgue $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ formado por las funciones de cuadrado integrable definidas sobre el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y a valores en $\mathbb{R}$. En este caso, el producto escalar está dado por la expresión:

$$(u, v)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

y la norma asociada es

$$\|u\|_{\mathbb{H}} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Uno de los argumentos más pesados para trabajar con espacios de Hilbert proviene de su estructura interna. En efecto, al estar dotado de una norma que proviene de un producto escalar es posible tener razonamientos *geométricos* muy parecidos a los que se puede tener en un espacio euclídeo.

Un buen ejemplo de esta situación es el siguiente resultado.

Teorema 1 *Sea A un subconjunto convexo cerrado no vacío de $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces para todo $u \in \mathbb{H}$ afuera de A, existe un único $v \in A$ tal que se tenga*

$$\|u - v\|_{\mathbb{H}} = \min_{w \in A} \|u - w\|_{\mathbb{H}}.$$

Además el elemento v se puede caracterizar por la propiedad $v \in A$ y

$$(u - v, w - v)_{\mathbb{H}} \leq 0, \text{ para todo } w \in A.$$

Escribiremos $\mathbb{P}_A(u) = v$ para mostrar que v es la proyección del elemento u sobre el conjunto A.

Demostración. Vamos a empezar mostrando que existe un único elemento v que realiza el mínimo. Para ello consideramos una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimizante en el sentido siguiente: si notamos $d_n = \|u - w_n\|_{\mathbb{H}}$ entonces se tiene $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$ donde $d = \inf\limits_{w\in A} \|u - w\|_{\mathbb{H}}$. Nótese que aquí se trata de un ínfimo, que por el momento no sabemos si se alcanza o no.

Dado que la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ del espacio de Hilbert verifica la identidad del paralelogramo, podemos escribir

$$\left\|u - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|_{\mathbb{H}}^2 + \left\|\frac{w_n - w_m}{2}\right\|_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right),$$

pero dado que el conjunto A es convexo, se tiene que $\frac{w_n+w_m}{2} \in A$ y en particular se tiene

$$\left\|u - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|_{\mathbb{H}} \geq d.$$

De esta manera, usando la identidad del paralelogramo se obtiene la mayoración

$$\left\|\frac{w_n - w_m}{2}\right\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) - d^2,$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \|w_n - w_m\|_{\mathbb{H}} = 0$, es decir que la sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado que el espacio de Hilbert es completo con respecto a su norma, esta sucesión de Cauchy es convergente y entonces $w_n \longrightarrow v$ y se tiene $d = \|u - v\|_{\mathbb{H}}$.

Mostremos ahora que el elemento v se puede caracterizar de la manera descrita en el teorema. Si v es el elemento que verifica el mínimo y si $w \in A$ entonces se tiene para todo $t \in]0, 1[$ que

$$(1 - t)v + tw \in A,$$

pues el conjunto A es convexo. Dada que v verifica el mínimo se tiene la desigualdad

$$\|u - v\|_{\mathbb{H}} \leq \|u - (1 - t)v + tw)\|_{\mathbb{H}} = \|(u - v) - t(w - v)\|_{\mathbb{H}}.$$

A partir de esto se obtiene
$$\|u-v\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \|u-v\|_{\mathbb{H}}^2 - 2t\|(u-v)-t(w-v)\|_{\mathbb{H}} + t^2\|w-v\|_{\mathbb{H}}^2,$$
es decir que
$$2t\|(u-v)-t(w-v)\|_{\mathbb{H}} \leq t^2\|w-v\|_{\mathbb{H}}^2 \iff 2\|(u-v)-t(w-v)\|_{\mathbb{H}} \leq t\|w-v\|_{\mathbb{H}}^2,$$
de manera que si $t \to 0$ se obtiene la caracterización buscada. ■

Este teorema tiene algunos corolarios útiles.

Corolario 1 *Bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene, para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ la desigualdad*
$$\|\mathbb{P}_A(u_1) - \mathbb{P}_A(u_2)\|_{\mathbb{H}} \leq \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}}$$

1.2. Dualidad en los espacios de Hilbert

Los espacios de Banach poseen propiedades de dualidad interesantes, pero en el caso de los espacios de Hilbert, la noción de dualidad puede verse de una manera ligeramente simplificada.

Repaso sobre la noción de dualidad

Empezamos con un par de conceptos generales en espacios vectoriales normados.

Definición 3 (Espacio dual algebraico $E^\star$ y dual topológico E')

1) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El dual algebraico $E^\star$ de E está definido como el conjunto de formas lineales definidas sobre E. Es decir $E^\star = \mathscr{L}^\star(E, \mathbb{K})$.*

2) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. El dual topológico E' de E está definido como el conjunto de formas lineales continuas definidas sobre E. Es decir $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.*

En el caso de las aplicaciones lineales, el siguiente teorema nos permite dar una caracterización sencilla de la continuidad.

Teorema 2 (Continuidad de las Aplicaciones Lineales en los e.v.n.) *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados y sea T una aplicación lineal de E en F. Las cuatro propiedades siguientes son equivalentes:*

1) *la aplicación T es continua,*

2) *la aplicación T es continua en el orígen,*

3) *la aplicación T es uniformemente continua sobre $D(T)$,*

4) *existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in D(T)$ se tiene*
$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Proposición 1 *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo separado y sea $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ el dual topológico de E. Entonces la forma bilineal $\langle x, T\rangle_{E\times E'}$ definida por*
$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle_{E\times E'} : E\times E' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,T) & \longmapsto & \langle x,T\rangle_{E\times E'} = T(x) \end{array} \tag{1}$$
es un corchete de dualidad y pone los espacios E y E' en dualidad.

En el caso de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, se tiene que el conjunto de formas lineales continuas $\mathbb{H}'$ (es decir su espacio dual topológico) posee cierto tipo de propiedades suplementarias. En efecto, en este marco funcional, tenemos la siguiente versión del teorema de representación de Riesz:

Teorema 3 *Sea $\mathbb{H}$ un espacios de Hilbert y sea $T \in \mathbb{H}'$ un elemento del dual topológico de $\mathbb{H}$. Existe entonces un único $u \in \mathbb{H}$ tal que*

$$\langle T, v\rangle_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}'} = (u, v)_{\mathbb{H}},$$

para todo $v \in \mathbb{H}$.

¿Qué nos dice este resultado? La importancia de este teorema proviene del hecho que en los espacios de Hilbert es posible identificar el espacio $\mathbb{H}$ con su propio espacio dual $\mathbb{H}'$.

Esta particularidad hace que sea súmamente cómodo trabajar en los espacios de Hilbert. Pero es importante mencionar que *no siempre* se puede trabajar en este marco agradable y es entonces necesario aprender y lidiar con estructuras matemáticas más generales.

1.3. Los teoremas de Stampacchia, del punto fijo y de Lax-Milgram

Estos dos resultados serán de gran utilidad en el estudio de ciertos problemas relacionados con la existencia y la unicidad de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

Antes de entrar en detalles necesitamos una definiciones:

Definición 4 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Una aplicación $B : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ es*

- *una* forma bilineal *si es lineal en cada una de sus variables,*
- *una forma bilineal es* continua *si se tiene la mayoración*

  $$|B(u, v)| \leq C\|u\|_{\mathbb{H}}\|v\|_{\mathbb{H}},$$

  para todo $u, v \in \mathbb{H}$ y donde C es una constante universal.
- *una forma bilineal es* coerciva *si existe una constante Γ tal que*

  $$B(u, u) \geq \Gamma\|u\|^2_{\mathbb{H}},$$

  para todo $u \in \mathbb{H}$.

Con estas definiciones podemos enunciar los dos resultados más importante de esta sección.

Teorema 4 (Stampacchia) *Sea $B(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal continua y coerciva definida sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Sea K un subconjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{H}$. Si $T \in \mathbb{H}'$ es una forma lineal definida sobre $\mathbb{H}$, entonces existe un único $u \in \mathbb{H}$ tal que*

$$B(u, v - u) \geq \langle T, v - u\rangle,$$

para todo $v \in \mathbb{H}$.

Si además la forma bilineal $B(\cdot,\cdot)$ es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}B(u, u) - \langle T, u\rangle = \min\limits_{v\in\mathbb{H}} \left\{\frac{1}{2}B(v, v) - \langle T, v\rangle\right\} \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema de representación de Riesz, sabemos que existe un único $w \in \mathbb{H}$ tal que se tenga la identidad

$$\langle T, v\rangle = (w, v)_{\mathbb{H}}$$

para todo $v \in \mathbb{H}$. Pero por otro lado, para todo $u \in \mathbb{H}$ fijo, la aplicación $v \longmapsto B(u,v)$ es una forma lineal continua sobre $\mathbb{H}$ y entonces por el teorema de representación de Riesz, existe un elemento $\phi(u) \in \mathbb{H}$ tal que $B(u,v) = (\phi(u), v)_{\mathbb{H}}$ para todo $v \in \mathbb{H}$. Se tiene que ϕ es una aplicación lineal de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ y que se tienen las estimaciones

$$\begin{aligned} \|\phi(u)\|_{\mathbb{H}} &\leq C\|u\|_{\mathbb{H}}, && \text{para todo } u \in \mathbb{H}, \\ (\phi(u), u)_{\mathbb{H}} &\geq \Gamma\|u\|^2_{\mathbb{H}}, && \text{para todo } u \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Con estas consideraciones vemos que estudiar el problema

$$B(u, v-u) \geq \langle T, v-u\rangle,$$

consiste en encontrar $u \in \mathbb{H}$ tal que

$$(\phi(u), v-u)_{\mathbb{H}} \geq (T, v-u)_{\mathbb{H}}.$$

Esta desigualdad es equivalente al problema siguiente

$$(\rho w - \rho\phi(u) + u, v-u)_{\mathbb{H}} \leq 0,$$

donde $\rho > 0$ es una constante positiva que será determinada posteriormente. Es decir si

$$u = \mathbb{P}_K(\rho w - \rho\phi(u) + u).$$

Si notamos ahora $\Phi(v) = \mathbb{P}_K(\rho w - \rho\phi(v) + v)$, vamos a verificar que Φ es una contracción en el sentido que

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{\mathbb{H}} \leq k\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{H}}.$$

En efecto, gracias al Corolario 1 se tiene

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{\mathbb{H}} \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(\phi(v_1) - \phi(v_2)\|_{\mathbb{H}},$$

y entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|^2_{\mathbb{H}} &\leq \|v_1 - v_2\|^2_{\mathbb{H}} - 2\rho(\phi(v_1) - \phi(v_2), v_1 - v_2)^2_{\mathbb{H}} + \rho^2\|\phi(v_1) - \phi(v_2)\|^2_{\mathbb{H}} \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2_{\mathbb{H}}(1 - 2\rho\Gamma + \rho^2C^2). \end{aligned}$$

Si $\rho > 0$ es tal que $\lambda^2 = 1 - 2\rho\Gamma + \rho^2C^2 < 1$ se tiene que la aplicación Φ es contractante y por lo tanto admite un único punto fijo.

Si suponemos además que forma bilineal es simétrica, entonces $B(u,v)$ define un producto escalar diferente sobre $\mathbb{H}$ y de esta manera se obtiene una norma asociada $|u|_{\mathbb{H}} = B(u,u)^{1/2}$ que es equivalente a la norma inicial $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$, en particular se tiene que el espacio $\mathbb{H}$ es también un espacio de Hilbert para este nuevo producto escalar. Aplicando una vez más el teorema de representación de Riesz, se obtiene un $\omega \in \mathbb{H}$ tal que

$$\langle T, v\rangle = B(\omega, v)$$

para todo $v \in \mathbb{H}$. Entonces nuestro problema se escribe de la siguiente forma $B(\omega - v, v - u)$, es decir $u = \mathbb{P}_K(\omega)$ en donde esta proyección debe entenderse en el sentido definido por el producto escalar definido por la forma bilineal B. En este punto, podemos invocar al Teorema 1 y entonces este problema es equivalente a encontrar $u \in K$ tal que

$$\min_{v \in K} B(\omega - v, \omega - v)^{1/2},$$

lo cual es lo mismo que minimizar $\frac{1}{2}B(u,u) - \langle T, u\rangle$. ■

Este teorema tiene como corolario uno de los resultados más importantes de los espacios de Hilbert cuando se desea estudiar ciertas familias de ecuaciones en derivadas parciales.

Teorema 5 (Lax-Milgram) *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea $B(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, para todo $T \in \mathbb{H}'$ existe un único elemento $u \in \mathbb{H}$ tal que*

$$B(u, v) = \langle T, v\rangle,$$

para todo $v \in \mathbb{H}$. Además si la forma bilineal B es simétrica, el elemento $u \in \mathbb{H}$ buscado se caracteriza por la condición

$$\frac{1}{2}B(u,u) - \langle T, u\rangle = \min_{v\in\mathbb{H}} \left\{\frac{1}{2}B(v,v) - \langle T, v\rangle\right\}.$$

En la lección siguiente veremos cómo aplicar este resultado para obtener resultados de existencia y de unicidad en algunas ecuaciones en derivadas parciales, pero para poder utilizar este teorema hace falta una noción adicional que está dada por los espacios de Sobolev.

2. Espacios de Sobolev

Hasta ahora, en las lecciones anteriores hemos estudiado ecuaciones que hacen intervenir derivadas de funciones y hemos buscado soluciones regulares que pueden ser derivadas, es decir si escribimos $\varphi'(t) = C$, suponemos de forma implícita que la función φ es derivable, que su función derivada existe (al menos localmente), y que, en este caso particular, es constante e igual a C.

Este tipo de soluciones se denominan soluciones *fuertes* o *clásicas* y las lecciones anteriores presentaban la teoría necesaria para poder encontrar este tipo de soluciones.

Sin embargo, *no siempre es posible* encontrar soluciones fuertes y es necesario estudiar *otro* tipo de soluciones más generales. El estudio de este tipo de soluciones más generales se realizó a partir de $\sim$ 1930 con los trabajos de Leray y de Sobolev.

Para ilustrar este hecho vamos a considerar un ejemplo muy sencillo con el siguiente problema:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t), & \text{sobre el intervalo } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde la función f es una función continua.

La idea fundamental consiste en *mutiplicar* ambos lados de la ecuación $-u'' + u = f$ por una función particular ϕ (que será llamada función *test*) tal que $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ y tal que $\phi(0) = \phi(1) = 0$ para obtener

$$-u''\phi + u\phi = f\phi,$$

y luego, *integrar* sobre el intervalo de estudio

$$\int_0^1 -u''(t)\phi(t)dt + \int_0^1 u(t)\phi(t)dt = \int_0^1 f(t)\phi(t)dt.$$

En este punto, realizamos una *integración por partes* en la primera integral y se tiene entonces

$$\int_0^1 u'(t)\phi'(t)dt + \int_0^1 u(t)\phi(t)dt = \int_0^1 f(t)\phi(t)dt. \tag{3}$$

¿Cuál es la diferencia entre (2) y (3)? Todo radica en las condiciones que se *exigen* sobre u para que estes expresiones tengan *sentido*.

- En la ecuación (2), es necesario que la función u sea *al menos* dos veces derivable, y que su segunda derivada sea continua,
- mientras que en la ecuación (3) es *suficiente* que u sea derivable y su derivada u' puede no ser continua, en realidad basta que sea integrable.

Como vemos, en la ecuación (3) exigimos *muchísimo* menos que en el caso de la ecuación (2) y es por esta razón que las funciones que verifican la ecuación (3) se las denomina soluciones *débiles*.

Pero *antes* de lanzarnos en la teoría relativa a las soluciones débiles, es necesario estudiar más en detalle la expresión

$$\int_0^1 u'(t)\phi'(t)dt,$$

y explicar en qué sentido esta fórmula nos permite considerar lo que se denomina como *derivadas débiles*.

2.1. Espacios de Sobolev en el espacio entero

- Funciones cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones pertenecen a los espacios de Lebesgue: decimos que $D^\alpha f = g$ en sentido débil (o en sentido de las distribuciones) si

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

  En el caso de una función suficientemente regular, una integración por partes muestra que se tiene esta relación en el sentido usual.
- Los espacios de Sobolev miden entonces la regularidad por medio de derivadas en norma $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veremos varias formas de caracterizar esta propiedad.

Definición clásica

Es la definición que se enseña en la escuela.

Definición 5 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ y cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones verifican $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \leq k$. Este espacio de funciones puede ser normado por la cantidad*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p}$$

Nótese que si $k = 0$ entonces $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tienen las inclusiones*

$$W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 6 *Los espacios de Sobolev $\big(W^{k,p}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W^{k,p}}\big)$ son espacios de Banach.*

Prueba. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo α se tiene que $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si ahora notamos $f^{(\alpha)} = \lim\limits_{n\to+\infty} D^\alpha f_n$, en donde el límite se toma en el sentido de la norma de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)}(x)\varphi(x)dx.$$

■

Definición 6 (Espacios de Hilbert) *Cuando $p = 2$, escribiremos*

$$W^{k,p} = \mathbb{H}^k,$$

y estos espacios son espacios de Hilbert cuando se los dota del producto escalar

$$(u, v)_{\mathbb{H}^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

donde $u, v \in \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^n)$.

Por ejemplo, en el caso del espacio $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^n)$, el producto escalar y su norma asociada están dados por

$$(u, v)_{\mathbb{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^n} uvdx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx \qquad \text{y} \qquad \|u\|_{\mathbb{H}^1} = \|u\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Demos ahora otro tipo de caracterización de los espacios de Sobolev.

Proposición 3 *Sea $1 \leq p < +\infty$. Entonces $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

1) cada función $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2) $\|f - f_n\|_{L^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$ se tiene $\left(\frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido de la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lo interesante de esta caracterización es que no hace falta usar la noción de derivadas débiles: las derivadas que intervienen en el punto 3) son *verdaderas* derivadas.

Prueba.

($\Longleftarrow$) Veamos que si se tienen estos tres puntos, entonces $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
Para ello si notamos $f^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}(x)$, se tiene por hipótesis que $f^{(\alpha)}$ pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces, dado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}(x)\varphi(x)dx,$$

si obtiene al pasar al límite que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f^\alpha(x)\varphi(x)dx,$$

lo que muestra que $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

($\Longrightarrow$) Estudiemos ahora la recíproca. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^N \phi(x/\varepsilon)$, y para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, escribimos $f_\varepsilon = f * \phi_\varepsilon$.

Se tiene entonces los puntos 1) y 2): se verifica $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y además $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Finalmente, si f posee derivadas parciales débiles $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$, entonces se tiene

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f_\varepsilon(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\big(f * \phi_\varepsilon(x)\big) = \big(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f\big) * \phi_\varepsilon(x).$$

Podemos entonces aplicar el punto 1) para obtener que la sucesión $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f_\varepsilon(x)$ converge en norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

De esta manera vemos que es posible construir una familia de funciones $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que verifica los tres puntos pedidos. ■

Observación 1 Esta caracterización de los espacios de Sobolev es válida únicamente si $1 \leq p < +\infty$. La obstrucción en el caso $p = +\infty$ proviene del hecho que el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es separable. Indiquemos sin embargo que existen variantes (con otras condiciones) de este resultado para el caso cuando $p = +\infty$.

2.2. Espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria

$\Longrightarrow$ Nos interesamos ahora en estudiar generalizaciones de los espacios de Sobolev cuando el índice de regularidad k deja de ser entero y puede tomar valores reales.

$\Longrightarrow$ Vamos a ver que existen algunas posibilidades para esta generalización. Pero discutiremos este punto posteriormente, por ahora nos concentramos en dos herramientas que serán muy útiles: los potenciales de Riesz y de Bessel.

Motivación

Cuando aplicamos el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ a una función de la clase de Schwartz $f \in \mathcal{S}$ (o a una distribución temperada $f \in \mathcal{S}'$) tenemos la identidad:

$$\widehat{(-\Delta)(f)}(\xi) = c|\xi|^2 \widehat{f}(\xi). \tag{4}$$

Ahora, si tomamos la norma L^2 de esta expresión se tiene, por el teorema de Plancherel

$$\|(-\Delta)(f)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{(-\Delta)(f)}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left||\xi|^2 \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Vemos entonces que el comportamiento al infinito de la transformada de Fourier de la función f permite estudiar la finitud de la cantidad $\|(-\Delta)(f)\|_{L^2}$, que expresa (formalmente) la regularidad, en el sentido de los espacios de Sobolev de la función f.

Moraleja 1: se puede *leer* la regularidad de una función por medio del *comportamiento al infinito* de su transformada de Fourier.

La expresión (4) puede entonces servir para definir las “potencias fraccionarias”del operador Laplaciano. Por ejemplo, podemos (al menos formalmente) definir el operador $\Lambda^s = (-\Delta)^{s/2}$, con $s > 0$, de la siguiente forma

$$\widehat{\Lambda^s(f)}(\xi) = c|\xi|^s \widehat{f}(\xi).$$

Moraleja 2: se podría utilizar el comportamiento con respecto al peso $|\xi|^s$ de la transformada de Fourier de una función para estudiar su regularidad *fraccionaria.*

La generalización de este proceder está relacionada con los potenciales de Riesz y de Bessel.

Dado que el producto, en el nivel de Fourier, de una función f por la función $|\xi|^s$ puede resultar de interés al estudiar la regularidad de las funciones, enunciamos un hecho que permitirá estudiar lo que sucede en el nivel de la variable real:

Lema 1 *Sea $0 < s < n$. La transformada de Fourier de la función $|x|^{-n+s}$ es la función $c|\xi|^{-s}$.*

Potenciales de Riesz

Definición 7 *Sea $s > 0$. El potencial de Riesz de orden s es el operador definido por $I_s = (-\Delta)^{-s/2}$ y puede escribirse:*

$$I_s(f)(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy$$

$\Longrightarrow$ El potencial de Riesz I_s de una función es entonces un producto de convolución entre esta función y el núcleo $|x|^{-n+s}$.

$\Longrightarrow$ Nótese que es posible ver la acción del potencial de Riesz I_s sobre una función f en el nivel de Fourier puesto que se tiene, por el Lemma 1 la identidad:

$$\widehat{I_s f}(\xi) = c|\xi|^{-s}\widehat{f}(\xi).$$

Observación 2 Evidentemente siempre es útil disponer de fórmulas exactas que hacen el uso de la transformada de Fourier particularmente eficaz, sin embargo también es interesante poder obtener los resultados sin pasar por el uso de la transformada de Fourier.

Una prueba de ello es el siguiente teorema:

Teorema 7 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|I_s(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Demostración.

- $I_s(f)$ está bien definida para toda función f acotada que decrece suficientemente rápido al infinito $\Longrightarrow$ basta trabajar en un subconjunto denso de todos los espacios L^p.
- Se puede suponer que $f \geq 0$ pues se tiene $|I_s(f)| \leq I_s(|f|)$.

Escribimos entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = \int_{\{|y|<R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy + \int_{\{|y|\geq R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = I_1(f)(x) + I_2(f)(x)$$

En donde R será fijado posteriormente.

- para I_1: Se observa que I_1 no es más que la convolución entre f y la función $g = |y|^{-n+s}\mathbb{1}_{\{|y|<R\}}$. Se tiene entonces que g es una función radial, decreciente, integrable y por lo tanto podemos escribir

$$I_1(f)(x) \leq \mathfrak{M}(f)(x) \int_{\{|y|<R\}} |y|^{-n+s} dy = cR^s\mathfrak{M}(f)(x)$$

  en donde $\mathfrak{M}$ es la función maximal de Hardy-Littlewood.

- para I_2: la desigualdad de Hölder nos da

$$|I_2(f)(x)| \leq \left(\int_{\{|y|\geq R\}} |y|^{(s-n)p'}\right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} = cR^{-n/q}\|f\|_{L^p}$$

  en donde hemos usado las relaciones $1/p - 1/q = s/n$ y $1/p' + 1/p = 1$.

Juntando estas dos estimaciones obtenemos, para todo $R > 0$:

$$I_s(f)(x) \leq C\left(R^s\mathfrak{M}(f)(x) + R^{-n/q}\|f\|_{L^p}\right).$$

Ahora vamos a fijar R de manera a minimizar esta expresión, es decir

$$R = \frac{\mathfrak{M}(f)(x)^{-p/n}}{\|f\|_{L^p}^{-p/n}}$$

lo que nos da:

$$I_s(f)(x) \leq C\mathfrak{M}(f)(x)^{p/q}\|f\|_{L^p}^{1-p/q}. \tag{5}$$

Para terminar, basta elevar esta expresión a la raíz q-ésima, integrar sobre $\mathbb{R}^n$ y utilizar el lema siguiente:

Lema 2 *La función maximal de Hardy-Littlewood es acotada de L^p en L^p para $1 < p < +\infty$. Es decir que se tiene la mayoración*

$$\|\mathfrak{M}(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Con esta mayoración se obtiene inmediatamente el resultado buscado. ■

Potenciales de Bessel

Definición 8 *Sea $s > 0$. El potencial de Bessel de orden s es el operador definido por $J_s = (Id - \Delta)^{-s/2}$. La acción de este potencial sobre las funciones está explicitada por la fórmula:*

$$J_s(f)(x) = \left(\widehat{f}\,\widehat{G_s}\right)^{\vee} = f * G_s$$

en donde $\widehat{G_s}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$

Proposición 4 *Sea $s > 0$, entonces $G_s(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $0 < s < n$, se tiene además*

$$G_s(x) \simeq \begin{cases} |x|^{s-n} & si\ |x| \leq 2 \\ \\ e^{-|x|/2} & si\ |x| > 2 \end{cases}$$

Este resultado nos permite demostrar el análogo del Teorema 7 para los potenciales de Bessel:

Teorema 8 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|J_s(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Si $p = 1$ se tiene la estimación débil:

$$\|J_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Demostración. Utilizando la proposición anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} J_s(f)(x) &\leq C\left(\int_{\{|y|\leq 2\}} |f(x-y)||y|^{s-n}dy + \int_{\{|y|>2\}} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \\ &\leq C\left(I_s(|f|)(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \end{aligned}$$

Para terminar la demostración, basta utilizar el Teorema 7 para el primer término y las desigualdades de Young para el segundo. ■

Espacios Potenciales

- Como los espacios de Hölder, los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}$ con $s \geq 0$ permiten estudiar la regularidad fraccionaria.
- utilización intensiva los potenciales de Riesz y de Bessel.

Definición 9 *Definimos los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \geq 0$, como el conjunto de todas las funciones f que pueden escribirse de la forma $f = J_s(g)$ con $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Este espacio puede ser dotado de la siguiente norma:*

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \|g\|_{L^p}$$

si $f = J_s(g)$.

Veamos que esta fórmula permite dar una definición consistente: es necesario verificar que si se tiene $J_s(g_1) = J_s(g_2)$, entonces se tiene que $g_1 = g_2$. Para ello escribimos, para toda función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_s(g_1)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x-y)g_1(y)\varphi(x)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} g_1(x)J_s(\varphi)(x)dx$$

De manera que si se tiene $J_s(g_1) = J_s(g_2)$, entonces se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g_1 - g_2)(x)J_s(\varphi)(x)dx = 0$$

de donde se deduce que $g_1 = g_2$.

Es posible ahora "pasar" la acción del potencial de Bessel en el nivel de Fourier para obtener la siguiente caracterización de los espacios potenciales:

Definición 10 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \geq 0$. Definimos el espacio Potencial $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p}$$

Observación 3 Como anunciado, la regularidad de las funciones se "lee" en su <u>decrecimiento al infinito</u> en el nivel de Fourier.

¿Cuál es la relación entre los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}$ y los espacios de Sobolev $W^{k,p}$? Vamos a ver con el siguiente resultado cómo y en qué sentido estos espacios coinciden.

Teorema 9 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para $1 < p < +\infty$ se tiene la equivalencia entre espacios*

$$\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \simeq W^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

*Este resultado es **falso** si $p = 1$ o si $p = +\infty$.*

Observación 4 *Para $1 < p < +\infty$ definiremos los espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria como los espacios potenciales $\mathcal{W}^{k,p}$.*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $f \in \mathcal{W}^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Entonces para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene

$$D^\alpha f = c\big(\widehat{f}(\xi)\,\xi^\alpha\big)^\vee = c\left(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}\right)^\vee \tag{6}$$

Lema 3 *Para todo $|\alpha| \leq k$, la función $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ es un multiplicador en L^p con $1 < p < +\infty$. Esto significa que el operador $T_{m_\alpha}(f) = \big(\widehat{f}m_\alpha\big)^\vee$ es acotado de L^p en L^p.*

Prueba. (Rápida y sólo la parte fácil) Por el teorema de Plancherel podemos escribir

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}m_\alpha\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2\frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^2)^k}d\xi \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

pues $|\alpha| \leq k$ y entonces tenemos la estimación $\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{L^2}^2$: el operador es acotado de L^2 en L^2.

Para la parte complicada (que no demostraremos aquí) hay que demostrar que se tiene

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Nótese la utilidad de los espacios de Lorentz.

Entonces, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene el resultado deseado para todo $1 < p < 2$, por dualidad se obtiene los casos restantes. (Notar la utilización de los espacios de Lorentz y de los resultados de interpolación). ■

Con este lema, volvemos a (6): como por hipótesis se tiene que $\left(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\right)^\vee \in L^p$, podemos escribir la estimación siguiente:

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C\left\|\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{L^p} = C\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

($\Longleftarrow$) Sea ahora $f \in W^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Escribimos entonces

$$(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{k/2} = \sum_{|\alpha|\leq k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\xi^\alpha\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$$

Utilizamos una vez más el hecho que las funciones $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ son multiplicadores en L^p con $1 < p < +\infty$ si $|\alpha| \leq k$. Por lo tanto tenemos

$$\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^\vee = \sum_{|\alpha|\leq k}c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\,\xi^\alpha\widehat{f}(\xi)\right)^\vee = \sum_{|\alpha|\leq k}c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right)^\vee$$

de donde se deduce

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}} = \left\|\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{L^p} \leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W^{k,p}}$$

■

Demos, para terminar esta sección, otra caracterización equivalente:

Proposición 5 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $s > 0$. Entonces podemos caracterizar los espacios de Sobolev por medio de la norma:*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2}f\|_{L^p}.$$

Observación 5 Esta es la definición más usada en el análisis armónico y funcional, pero no es la única y existen *otras* caracterizaciones equivalentes que pueden ser de gran utilidad.

$\Longrightarrow$ Si notamos $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}$ vemos que la norma del espacio de Sobolev se construye como la suma de dos términos distintos.

$\Longrightarrow$ La cantidad $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ es de gran utilidad. En particular tenemos:

Proposición 6 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $0 < \alpha < s$. Entonces tenemos la identidad*

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{\dot{W}^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}.$$

En el caso de los espacios de Sobolev tenemos

$$\|(I-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{W^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{W^{s,p}}.$$

2.3. Fórmula de Plancherel

Como vemos, el uso de la transformada de Fourier puede ser muy útil para definir espacios de Sobolev, ya sea de regularidad entera (teniendo en cuenta el problema que existe si $p = 1, +\infty$) y regularidad fraccionaria.

Sin embargo, la transformada de Fourier es un herramienta *fundamental* cuando se estudian los espacios de regularidad de tipo Sobolev sobre espacios de Hilbert. En efecto tenemos, en el caso muy particular de los espacios L^2 disponemos del siguiente resultado.

Proposición 7 (Plancherel) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de cuadrado integrable y sea $\widehat{f}$ su transformada de Fourier. Entonces tenemos la identidad*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En el caso de los espacios de Sobolev $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)$, con $s > 0$, tenemos la siguiente caracterización por medio de la transformada de Fourier:

$$\|f\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Esta identidad nos permitirá trabajar en espacio de Fourier, en particular, vemos que la *regularidad* de las funciones se *lee* en variable de Fourier por el decrecimiento al infinito de las funciones.

2.4. Espacios de Sobolev en un subconjunto

En muchos de los problemas relacionados a las ecuaciones en derivadas parciales es necesario considerar espacios funcionales definidos sobre subconjuntos del espacio euclídeo. En estos casos, muchos de los resultados anteriors dejan de ser válidos y hay que tomar ciertas precauciones.

En todo lo que sigue Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, no necesariamente acotado, de borde o frontera $\partial\Omega$ (a veces notado Γ) regular.

Las primeras definiciones son muy similares, pero pronto veremos en qué puntos hay que tener un poco de cuidado al trabajar sobre dominios acotados.

Definición 11 *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sean $k \geq 1$ y $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) : (\forall \alpha : |\alpha| \leq k)(\exists g_\alpha \in L^p(\Omega)) \int_\Omega f D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi dx \right\},$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Además este espacio puede ser normado por la cantidad

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Presentamos a continuación unos resultados importantes.

Proposición 8

- *Para $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach.*
- *En el caso particular cuando $p = 2$, los espacios de Sobolev $\mathbb{H}^k(\Omega)$ son espacios de Hilbert con el producto escalar*

$$(u, v)_{\mathbb{H}^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| k} \int_{L^2(\Omega)} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

Como hemos visto, los espacios de Sobolev miden la regularidad (débil) de las funciones en norma L^p, es decir que pedimos que las derivadas de las funciones deben ser integrables, pero no exigimos nada sobre la eventual continuidad de las derivadas.

$\Longrightarrow$ Veamos un ejemplo muy pedagógico: sea $\Omega =]0,1[$ y consideremos la función $u = \frac{1}{2}(|x| + x)$. Vemos sin problema que esta función es continua y es posible calcular la derivada de u para obtener $u' = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

$\Longrightarrow$ Vemos entonces que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq +\infty$, pero la derivada de u *no es continua*.

$\Longrightarrow$ Otro punto interesante de este ejemplo, es que, al estar midiendo las cantidades *en casi todas partes* es posible tener objetos que *no son continuos*.

Es decir que los objetos derivables en el sentido débil, no son necesariamente continuos y es necesario estudiar este punto en detalle pues será utilizado en las lecciones siguientes. En el caso cuando Ω es un intervalo de la recta real tenemos el resultado a continuación.

Proposición 9 *Sea $\Omega =]a,b[$ un intervalo de la recta real y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces*

- *existe una función $\phi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ tal que $u = \phi$ en casi todas partes sobre Ω,*
- *se tiene la identidad*

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta u'(x) dx$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega$.

Este resultado nos indica que las funciones que pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,p}$ son primitivas de funciones que viven en el espacio L^p, por un lado, pero sobre todo, este resultado nos dice que es *posible* escoger un representante continuo.

$\Longrightarrow$ Dicho de otra manera, en ciertos casos, es posible recuperar regularidad de tipo usual.

Espacios de Sobolev con condiciones de borde

Pronto veremos la importancia de hablar de funciones *que se anulan* en la frontera del dominio de estudio Ω y en ese sentido el siguiente espacio funcional es de gran utilidad en el estudio que realizaremos en las lecciones siguientes.

Definición 12 *Sea $1 \leq p < +\infty$, definimos el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la cerradura del espacio $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.*

En el caso cuando $p = 2$ notaremos $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Este espacio corresponde (en un sentido que es necesario precisar) a las funciones del espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ que se *anulan* en el borde $\partial\Omega$. En efecto se tiene

Proposición 10

- *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$. Si el soporte de u está contenido en Ω entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
- *Si el borde de Ω es regular y si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces*

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \iff u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para terminar esta sección, vamos a dar una caracterización adicional de estos espacios.

Proposición 11 *Si Ω es un conjunto de frontera regular y si $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

- *se tiene que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*
- *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}},$$

  para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ y para todo $i = 1, ..., n$.
- *La función $\widetilde{u}$ definida por*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega^c, \end{cases}$$

  pertenece al espacio $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la identidad

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{u} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$$

Veremos en las lecciones siguientes que es necesario utilizar otras propiedades de estos espacios de Sobolev, pero por motivos pedagógicos las presentaremos en su debido momento.

3. Desigualdades de Sobolev clásicas

Las desigualdades de Sobolev son una **herramienta fundamental** en el análisis y en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Esta desigualdad expresa el hecho sorprendente que es posible *controlar* el tamaño de una función por el tamaño de sus derivadas. Más precisamente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 10 *Sea $0 < s < n/p$ y $1 < p < +\infty$. Si $1/p - 1/q = s/n$ entonces el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en el espacio de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{W^{s,p}}$$

Observación 6 Hay una manera sencilla de verificar la razón por la cual se tiene la relación $1/p - 1/q = s/n$: basta reemplazar f por la función dilatada f_γ. Nótese que este relación entre índices es esencial, si s, p, q no están relacionados de esta forma el teorema es falso.

Demostración. Si $f \in W^{s,p}$, entonces sabemos que $f_s = \big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)^\vee \in L^p$ y podemos escribir

$$f(x) = \big((1+|\xi|^2)^{-s/2}\widehat{f_s}\big)^\vee(x)$$

y por lo tanto tenemos $f = G_s * f_s$ en donde G_s es el núcleo de convolución del potencial de Bessel. Como $0 < s < n$, podemos usar la proposición 4 para obtener $|f| = |G_s * f_s| \leq C I_s(|f_s|)$. En este punto basta aplicar el Teorema 7:

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|I_s(|f_s|)\|_{L^p} = C\|f\|_{W^{s,p}}$$

■

Cuando $p = 1$, no es posible usar los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,1}$ pues en este caso, éstos últimos no coinciden con los espacios de Sobolev clásicos $W^{k,1}$. Tenemos sin embargo el siguiente resultado:

Teorema 11 *Sea $1 < q < +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n/k$. Entonces si $k/n = 1 - 1/q$, se tiene la desigualdad de Sobolev:*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{k,1}}.$$

3.1. Desigualdad de Poincaré

En el caso cuando estamos trabajando sobre un subconjunto Ω se tiene el siguiente resultado.

Teorema 12 (Desigualdad de Poincaré) *Si $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ entonces se tiene la mayoración*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Cuando se trabaja en dimensión uno se tiene lo siguiente:

Teorema 13 *Si Ω es un intervalo acotado de la recta real, entonces existe una constante C_Ω tal que se tenga la mayoración*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_\Omega\|u'\|_{L^p},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.