Ejercicios Lección n°1: Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Resolución E.D.O. lineales de primer orden

1. Resolver la siguiente ecuación
$$y'(x^2+1)-y+1=0.$$
2. Encontrar la solución de
$$\frac{-1}{3}y'+2xy+x=0.$$
3. Resolver la siguiente ecuación
$$xy'=y+x^3+3x^2-2x.$$
4. Si $\xi \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo, encontrar la solución de la ecuación $u'+\xi^2u=0$.

Ejercicio 2 — E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes

1. Encontrar la solución de las ecuaciones
   a) $y''+3y'=0$.
   b) $y''+2y'-3y=0$.
   c) $y''+4y'+13y=0$.
   d) $y''-4y'+4y=0$.
   e) $y''+9y=0$.
2. Si $\xi \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo, encontrar la solución de la ecuación $u''+\xi^2u=0$.

Ejercicio 3 — E.D.O. lineales de segundo orden inhomogéneas

1. Resolver la ecuación
$$y''+3y'=x+8,$$
con las condiciones iniciales $y(0)=0$ y $y'(0)=50/9$.
2. Resolver la ecuación
$$y''+4y'+229y=229/2,$$
con las condiciones iniciales $y(0)=3/2$ y $y'(0)=-2$.
3. Resolver la ecuación
$$y''+6y'+8y=2,$$
con las condiciones iniciales $y(0)=3$ y $y'(0)=2$.
4. Resolver la ecuación
$$y''+3y'+9y=x-2,$$
con las condiciones iniciales $y(0)=1$ y $y'(0)=-1$.

Ejercicio 4 — Un problema Integral y una E.D.O.

Deseamos resolver el problema

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Para ello seguir las siguientes etapas:

1. Definiendo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, calcular $g'(x)$ y $g(0)$.
2. Por una integración por partes obtener la identidad

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x g(t)dt.$$

3. Si definimos $h(x) = \int_0^x g(t)dt$, calcular $h'(x)$ y $h(0)$.
4. Encontrar la E.D.O. que verifica la función h y resolverla.
5. Obtener la función f que verifica el problema inicialmente planteado.

Ejercicio 5 — Bernoulli

Resolver la E.D.O. siguiente:

$$xy' + y - xy^3 = 0,$$

para ello seguir las etapas a continuación:

1. Hacer el cambio de variable $z = \frac{1}{y^2}$.
2. Deducir que la ecuación que se desea estudiar es equivalente a la ecuación

$$z' - \frac{2}{x}z + 2 = 0.$$

3. Encontrar la solución de esta ecuación y obtener la solución del problema inicial.

Ejercicio 6 — Riccati

Nos proponemos estudiar la ecuación

$$y' + 3y + y^2 + 2 = 0.$$

1. Haciendo el cambio de variable $Y = y + 1$ obtener que esta ecuación puede reescribirse como

$$Y' + Y + Y^2 = 0.$$

2. Haciendo el cambio de variable $z = \frac{1}{Y}$, obtener la ecuación

$$-z' + z + 1 = 0.$$

3. Resolver la ecuación en la variable z para luego obtener la solución del problema inicial.