Ejercicios Lección n°2: Herramientas Básicas UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Espacios de Lebesgue

Sea $\phi :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ una función definida por

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{x^a} & \text{si } x \in]0,1], \\ \phi(x) = \frac{1}{x^b} & \text{si } x \in]1,+\infty[, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son dos parámetros. Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Determinar los valores de a y de b para que se tenga $\phi \in L^p(]0,+\infty[)$.

** Ejercicio 2 — Medida de la Bola Unidad

Fijemos, para empezar, dos notaciones: designaremos por $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$ y notaremos v_n su volumen. El objetivo de este ejercicio es calcular la medida de la bola unidad $v_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B^n}(x)dx$.

1. Mostrar que se tiene $v_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1-x_k^2\}}(x)dx_1 \cdots dx_n \right) dx_k$.
2. Verificar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1-x_k^2\}}(x)dx_1 \cdots dx_n$ es la medida de Lebesgue λ_{n-1} de la bola $\overline{B}(0, \sqrt{1-x_k^2})$.
3. Deducir la identidad
$$\lambda_{n-1}\big(\overline{B}(0, \sqrt{1-x_k^2})\big) = (1-x_k^2)^{(n-1)/2} v_{n-1}.$$
4. Obtener la relación de recurrencia
$$v_n = v_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-x_k^2)^{(n-1)/2} dx_k = v_{n-1} I_{n-1},$$
en donde hemos notado $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n/2} dx$ para todo $n \geq 0$.
5. Calcular I_0 y I_1 y obtener por medio de una integración por partes que se tiene $nI_{n-2} - I_n = nI_n$, y deducir la fórmula $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ para $n \geq 2$.
6. Por recurrencia obtener $I_{n-1}I_{n-2} = \frac{2\pi}{n}$ y para $n \geq 3$ obtener
$$v_n = I_{n-1}I_{n-2}v_{n-2} = \frac{2\pi}{n} v_{n-2}.$$
7. A partir de los casos particulares $v_1 = 2$ y $v_2 = I_1 v_1 = \pi$, deducir los valores
$$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad v_{2k+1} = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}.$$
8. Finalmente obtener
$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$
donde $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ para $\alpha > 0$.
9. Calcular la medida del conjunto $B(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \rho\}$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\rho > 0$.

* Ejercicio 3 — Medida de la Esfera Unidad

Para toda función integrable se tiene la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{n-1} d\rho$$

1. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *radial* si $f(x) = f(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para una tal función demostrar que se tiene la identidad

   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = s_n \int_0^{+\infty} f(\rho)\rho^{n-1} d\rho,$$

   en donde hemos notado $s_n = \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma(\xi)$ el área (o superficie) de la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Vamos ahora a calcular el área o superficie s_n de la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$. Dado que la función indicatriz $\mathbb{1}_{\overline{B}(0,1)}$ es una función radial obtener

   $$v_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\overline{B}(0,1)}(x)dx = s_n \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = \frac{s_n}{n}$$

   de modo que se tiene $s_n = nv_n$.
3. Usando la propiedad $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ válida para todo $\alpha > 0$, deducir la expresión siguiente

   $$s_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}.$$

4. Calcular la medida del conjunto $\mathcal{S}(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = \rho\}$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\rho > 0$.

Ejercicio 4 — Convolución

1. Sea $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ calcular $f * f$.
2. ¿Qué se puede decir sobre la regularidad de la función $f * f$ cuando se la compara con la regularidad de la función f?
3. ¿Qué se puede decir sobre el soporte de la función $f * f$?

* Ejercicio 5 — Elemento neutro de la convolución

El objetivo de este ejercicio es mostrar que el elemento neutro del producto de convolución *no es una función* y que es necesario considerar elementos más generales para poder hablar con todo rigor de este objeto.

1. Mostrar que no existe una función δ en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ (espacio de funciones continuas a soporte compacto) tal que $\delta * f = f$ para toda f en $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. Observar que si fuera el caso se tendría la identidad

   $$f(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(-x)dx.$$

   Considerar entonces la sucesión de funciones

   $$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x + n & \text{si} \quad \frac{-1}{n} \leq x \leq 0, \\ n - n^2 x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

   para obtener una contradicción.

2. ¿Qué sucede si suponemos que $\delta \in L^1(\mathbb{R})$? En este caso considerar la sucesión de funciones $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[-1/n;1/n]}(x)$, para obtener la contradicción.

Ejercicio 6 — Regla de la Cadena

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular y definimos para todo $s \in \mathbb{R}$ la función

$$\varphi(s) = f(s, sB),$$

donde $B = (B_1, ..., B_n)$ es un vector fijo. Calcular φ'.

Ejercicio 7 — Laplaciano y coordenadas polares

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Considerando el cambio de variables polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta), \end{cases}$$

dar la expresión del operador Laplaciano en este sistema de coordenadas. Para ello seguir las siguientes etapas:

1. Determinar ρ en función de x, y.
2. Usando el hecho que $\theta = \arctan(y/x)$ obtener que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Ejercicio 8 — Divergencia

Verificar el teorema de la divergencia en los siguientes casos:

1. Sea Ω el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y sea $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

2. Sea Ω el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ y sea $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 2)$.

3. Sea $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ y sea $F(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1)$.

Ejercicio 9 — Transformada de Fourier (I)

Calcular las transformadas de Fourier de las funciones siguientes:

1. $\phi(x) = e^{-|x|}$
2. $f(x) = \frac{1}{c+x^2}$, con $c > 0$. Empezar con el caso $c = 1$ y calcular la transformada de Fourier *inversa* de la función anterior.
3. $g(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(x)$.

Ejercicio 10 — Transformada de Fourier (II)

1. Mostrar que se tiene la identidad $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi)$.
2. Calcular la transformada de Fourier de la función $f * g$ donde $f(x) = \frac{1}{a+x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{b+x^2}$, con $a, b > 0$ dos constantes positivas.