Ejercicios Lección n°3: Ecuación de Transporte, Ecuación de Laplace UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Propiedades de la ecuación de transporte

Sea $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sea $C \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo.

1. Encontrar la solución al problema
$$\begin{cases} \partial_t u + C \cdot \nabla u = 0 & \text{sobre }]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
2. En el caso de la dimensión 1, mostrar que si $sop(u_0) \subset [a, b]$, entonces se tiene
$$sop(u(t,\cdot)) \subset [a + Ct, b + Ct].$$
3. Hacer un dibujo de esta situación.
4. Volviendo a la dimensión $n \geq 1$, mostrar que se tiene, para todo $1 \leq p \leq +\infty$ la conservación de la norma L^p en el sentido siguiente:
$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$$

Ejercicio 2 — Ecuación de transporte a coeficientes variables

Sea $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Suponemos ahora que $C :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular y consideramos el problema
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + C(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = 0 & \text{sobre }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0 & \text{sobre } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Si notamos $U(s) = u(s, X(s))$, donde $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular, calcular $U'(s)$.
2. Si suponemos que $X'(s) = C(s, X(s))$, y si u es solución de la ecuación de transporte anterior, ¿qué se puede decir sobre U'? ¿Qué se puede decir sobre $u(s, X(s))$?

Ejercicio 3 — Solución Fundamental de la Ecuación de Laplace, Funciones propias

Para todo $n \geq 2$, denotamos por Φ a la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

1. Calcular $\nabla\Phi(x)$ para todo $x \neq 0$.
2. Si definimos $u(x, y) = (e^{2x} + e^{-2x})(e^{2y} + e^{-2y})$, ¿qué ecuación verifica Δu?
3. Si definimos ahora $u(x, y) = (e^{kx} + e^{-kx})(e^{ky} + e^{-ky})$, ¿qué ecuación verifica Δu?
4. Relacionar estos resultados con los vectores propios relacionados al operador Laplaciano.

Ejercicio 4 — Ecuación de Laplace y datos iniciales

Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Consideremos el problema
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0, y) = \frac{\sin(ny)}{n},\ \partial_x u(0, y) = 0. \end{cases}$$

1. Encontrar las soluciones de la forma $u(x, y) = A(x)B(y)$.
2. ¿Qué sucede si n empieza a ser grande?