Ejercicios Lección n°4: Ecuación del Calor

UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Un cálculo simple

En este ejercicio vamos a calcular el valor exacto de la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

1. Verificar que se tiene el identidad
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = I^2.$$
2. Usando un cambio de coordenadas adecuado obtener
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi \int_{0}^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho.$$
3. Deducir la fórmula
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Ejercicio 2 — Transformada de Fourier de una Gaussiana

Consideramos la función
$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$
con $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Calcular la transformada de Fourier de g_t siguiendo los pasos a continuación.

1. Empezar con la dimensión 1 y calcular
$$\frac{d\widehat{g_t}(\xi)}{d\xi}$$
2. Realizando una integración por partes conveniente, obtener que $\widehat{g_t}(\xi)$ verifica una ecuación diferencial ordinaria.
3. Resolver esta E.D.O. utilizando todos los datos disponibles.
4. Deducir que la transformada de Fourier de una función gaussiana es *también* una función gaussiana pero de diferentes parámetros.
5. Generalizar a la dimensión superior.

Ejercicio 3 — Ecuación del Calor y Transformada de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular. El objetivo de este ejercicio es resolver la ecuación del calor
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$
utilizando las propieades de la transformada de Fourier.

1. Aplicar la transformada de Fourier en la variable espacial en la primera ecuación y obtener una ecuación diferencial ordinaria.
2. Utilizando el dato inicial, resolver esta ecuación diferencial ordinaria.
3. Aplicando la transformada de Fourier inversa, obtener la solución de esta ecuación.

Ejercicio 4 — Principio del máximo

Sea $u :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular que verifica

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

1. Si definimos $w(t,x) = u(t,x) - \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} + t\right)$ con $\varepsilon > 0$, mostrar que w es solución de la misma ecuación del calor.
2. Usando el principio del máximo, estudiar el signo de w y deducir que $w \le 0$.
3. Deducir que $u \le 0$.
4. Obtener que $u = 0$.

Ejercicio 5 — Transformada de Fourier y una E.D.P.

Utilizando la transformada de Fourier, y suponiendo que la función u es regular y se anula al infinito, resolver la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_j} u + nu = 0.$$

Indicación: empezar con la dimensión $n = 1$.