Ejercicios Lección n°5: Ecuación de Ondas - Invariancia y leyes de conservación UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Principio de Dirichlet

Sea $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función regular que *se anula al infinito* así como todas sus derivadas (notaremos este espacio por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) y sea $\mathcal{L}$ una funcional definida sobre este tipo de funciones. Diremos que la derivada de $\mathcal{L}$ en el sentido de Fréchet, con respecto al vector $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\mathcal{L}(u+h) - \mathcal{L}(u) = \langle \mathcal{L}'(u), h\rangle + o(\|h\|), \qquad \text{con } \lim_{h\to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0.$$

Consideremos la funcional

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx,$$

en donde $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular que se anula al infinito.

1. Verificar que se tiene la identidad $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u+h)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u) h dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h|^2 dx.$
2. Deducir que $\mathcal{L}'(u) = -\Delta u$.

Ejercicio 2 — Acción Lagrangiana y ecuación de Euler-Lagrange para la ecuación de ondas

Consideramos la acción Lagrangiana $\displaystyle\mathcal{L}(u) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{1}{2}\big(\partial_t u\big)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx dt.$

1. Calcular $\mathcal{L}(u+h) - \mathcal{L}(u)$.
2. Deducir que $\mathcal{L}'(u) = \partial_t^2 u - \Delta u$.

La ecuación de Euler-Lagrange $\mathcal{L}'(u) = 0$ asociada a la acción Lagrangiana $\mathcal{L}$ es la ecuación de ondas.

Ejercicio 3 — Traslación en el tiempo

En el marco del ejercicio anterior, consideramos la transformación $T_\varepsilon(u)(t,x) = u(t+\varepsilon, x)$.

1. Mostrar que se tiene $\mathcal{L}(T_\varepsilon(u)) = \mathcal{L}(u)$.
2. Comprobar que $T_0(u) = u$ y que $\partial_\varepsilon T_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} = \partial_t u$.
3. Recordando que gracias al ejercicio anterior se tiene $\mathcal{L}'(u) = \partial_t^2 u - \Delta u$, obtener que
$$\mathcal{L}'(u)\partial_\varepsilon T_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} = \partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\partial_t u \partial_i u)$$
4. Recordando que las funciones u son regulares y se anulan al infinito, deducir que se tiene la identidad
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}'(u)\partial_\varepsilon T_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) dx.$$
5. Calcular $(\partial_\varepsilon[\mathcal{L}(T_\varepsilon(u))])_{|\varepsilon=0}$ y utilizando la primera pregunta, obtener que esta cantidad es nula.
6. Obtener que la cantidad
$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) dx,$$
es constante en el tiempo.

La cantidad $E(u)$ es la energía del sistema asociada a la ecuación de ondas, y vemos que esta cantidad se conserva en el tiempo.

Ejercicio 4 — Traslación en el espacio

En el marco del Ejercicio 2, consideramos la transformación $T_\varepsilon(u)(t,x) = u(t, x_1, ..., x_k + \varepsilon, ..., x_n)$.

1. Mostrar que se tiene $T_0(u) = u$ y $\mathcal{L}(T_\varepsilon(u)) = \mathcal{L}(u)$.
2. Comprobar que el multiplicador $\partial_\varepsilon T_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0}$ asociado a esta transformación es $\partial_{x_k} u$.
3. Obtener la identidad

$$\mathcal{L}'(u)\partial_\varepsilon T_\varepsilon(u)|_{\varepsilon=0} = \partial_t(\partial_t u \partial_{x_k} u) - \partial_t u(\partial_t \partial_{x_k} u) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u \partial_{x_k} u.$$

4. Por medio de cálculos adicionales, expresar esta cantidad como la suma del primer término y diferentes funciones escritas como divergencias.
5. Obtener que la cantidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u \; \partial_{x_k} u dx$$

   es conservada en el tiempo. A esta propiedad se la conoce como la *conservación del momento*.