Ejercicios Lección n°6: Espacios de Hilbert y de Sobolev

UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Espacio de sucesiones y Espacio de Hilbert

Definimos el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ como el espacio de las sucesiones reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican la condición

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x|^2 < +\infty.$$

1. Verificar que la aplicación $B : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$, es una forma bilineal, simétrica, positiva.
2. ¿Es posible asociar a esta aplicación B una norma? Explicitar esta norma, que se la denota por $\|\cdot\|_{\ell^2}$.
3. Comprobar que la norma asociada verifica la identidad del paralelogramo.
4. Comprobar que se tiene la *fórmula de la mediana*: para todo $x, y, z \in \ell^2(\mathbb{N})$, verificar la identidad siguiente

$$\left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|_{\ell^2}^2 + \frac{\|y-z\|_{\ell^2}^2}{4} = \frac{\|x-y\|_{\ell^2}^2 + \|x-z\|_{\ell^2}^2}{2}$$

Ejercicio 2 — Geometría en espacios de Hilbert

En el caso de los espacios de Hilbert, es posible definir el coseno formado por el ángulo entre dos vectores por medio de la expresión

$$\cos(\theta) = \frac{(x,y)_{\mathbb{H}}}{\|x\|_{\mathbb{H}}\|y\|_{\mathbb{H}}}.$$

Consideremos $\mathbb{R}^2$ dotado del producto escalar $(x,y)_{\mathbb{H}} = x_1y_1 + x_2y_2$.

1. Sean $x = (0,1)$, $y = (1,1)$, $z = (0,1)$, $w = (-1,1)$, $v = (-1,1/2)$, calcular el ángulo formado entre cada uno de estos vectores.
2. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ y sea $y = (2,2)$. Determinar el punto x_0 que realiza el mínimo de la distancia entre Ω y el punto y.
3. Escoger diferentes puntos $w \in \Omega$ y calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $y - x_0$ y $w - x_0$.
4. Escoger diferentes puntos z que están *afuera* de Ω y calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $y - x_0$ y $w - x_0$.
5. Relacionar esta idea geométrica con la demostración del Teorema 1 de la lección 6.

Ejercicio 3 — Derivadas débiles

Sea $\Omega =]0,1[$ y sea $f(x) = x^\alpha$.

1. ¿Para qué valores de α se tiene que $f \in L^2(\Omega)$?
2. Recordar la definición de derivada débil para la función f (utilizar funciones test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$).
3. Utilizando el hecho que las funciones test pertenecen al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ obtener la identidad

$$\int_0^1 x^\alpha \phi'(x)dx = -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\phi(x)dx.$$

4. Deducir que x^α admite una derivada débil en $L^2(\Omega)$ si y solo si $\alpha > 1/2$.

Ejercicio 4 — Un cálculo

Sea f una función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,0], \\ x & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

1. ¿Para qué valores de $1 \leq p \leq +\infty$ tiene que $f \in W^{1,p}$?
2. ¿Para qué valores de $1 \leq p \leq +\infty$ tiene que $f \in W^{2,p}$?

** Ejercicio 5 — Espacios de Sobolev: una caracterización equivalente

El objetivo de este ejercicio es mostrar que se tiene la siguiente caracterización de los espacios de Sobolev: si $1 < p \leq +\infty$ entonces $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|} < +\infty.$$

1. Comprobar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x) - f(x+y)\big)\varphi(x)dx = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x - ty) dx \right) dt$$

2. obtener la mayoración

$$\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p} \leq C \sum_{i=1}^n |y_i| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} f \right\|_{L^p}$$

3. Deducir que se tiene

$$\frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|} \leq C \|f\|_{W^{1,p}}.$$

4. Obtener el siguiente límite en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda e_i) - f(x)}{\lambda}$$

   en donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)| dx = 2|y|$$

   para todo $|y| < 1$.

6. ¿Se tiene que $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$?