Ejercicios Lección n°7: Formulación Variacional

UPS, julio 2015

Ejercicio 1 — Condición de Dirichlet no homogénea

Utilizando el método variacional, resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en }]0,1[, \\ u(0) = a, u(1) = b, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son dos reales y donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular.

Indicación: explicitar una función afín u_0 tal que $u_0(0) = a$ y $u_0(1) = b$ y aplicar el cambio de variable $\widetilde{u} = u - u_0$ para obtener un problema tratado en el curso.

Ejercicio 2 — Condición de Neumann no homogénea

Utilizando el método variacional, resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en }]0,1[, \\ u'(0) = a, u'(1) = b, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son dos reales y donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular.

Indicación: aplicar el teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}^1(]0,1[)$ con la forma lineal $T(\phi) = \int_0^1 f\phi dx - a\phi(0) + b\phi(1)$.

Ejercicio 3 — Condiciones Mixtas de contorno

Utilizando el método variacional, resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en }]0,1[, \\ u(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases}$$

Indicación: considerar el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \{\phi \in \mathbb{H}^1(]0,1[) : \phi(0) = 0\}$.

Ejercicio 4 — Problema de Sturm-Liouville

Utilizando el método variacional, resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -(\phi u')' + \psi u = f & \text{en }]0,1[, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

donde ϕ, ψ y f son funciones regulares y donde se tiene que $0 < \varepsilon_0 \leq \phi, \psi \leq \varepsilon_1$. Para ello seguir las siguientes etapas:

1. Mostrar que la aplicación $B(\cdot,\cdot)$ definida sobre $\mathbb{H}^1_0 \times \mathbb{H}^1_0$ por $B(u,v) = \int_0^1 \phi u'v'dx + \int_0^1 \psi uv dx$, es una forma bilineal continua, simétrica y coerciva.

2. Aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener una solución débil del problema planteado.

Ejercicio 5 — Un problema elíptico

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado. Sean $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ tales que $a_{i,j} = a_{j,i}$ y que verifican la condición de elipticidad siguiente

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2,$$

para todo $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $\alpha > 0$.

Usando el método variacional, demostrar que existe una única solución débil del problema siguiente:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Indicación: aplicar el teorema de Lax-Milgram con la forma bilineal

$$B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}dx,$$

y usar la hipótesis sobre las funciones $a_{i,j}$.