Lección n°1: Controlabilidad de sistemas diferenciales lineales.

Índice

1. La condición de Kalman

En esta lección presentaremos la controlabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. En particular demostraremos el como cierta condición algebraica, llamada condición de Kalman, nos permitirá responder el problema de controlabilidad.

Sean $T > 0$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $A \in C([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$ y $B \in C([0,T], \mathbb{R}^{n\times m})$. Dado un $y_0 \in \mathbb{R}^n$, consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales controlado

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y + B(t)h, \quad t \in [0,T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

En (1), dado $t \in [0,T]$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $h(t) \in \mathbb{R}^m$ es la función control. En lo que sigue definiremos el problema de controlabilidad para el sistema (1).

Definición 1.1 *El sistema* (1) *se dice controlable en un tiempo* $T > 0$, *si para cada* $(y_0, y_f) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *existe una función* $h \in C([0,T]; \mathbb{R}^m)$ *tal que la solución* $y \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^n)$ *del problema de Cauchy* (1) *verifica*

$$y(T) = y_f.$$

Gracias al Teorema de Cauchy-Lipschitz lineal, la existencia y unicidad de la solución a este problema esta garantizada. Una demostración de este resultado puede ser consultada en el Capítulo 6, Sección 2, Teorema 1 del libro [2].

1.1. El caso de coeficientes constantes

En esta subsección, supondremos que $A(t)$ y $B(t)$ no dependen del tiempo. Así, en lo que sigue consideraremos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Consideremos entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales controlado

$$\begin{cases} y' = Ay + Bh, \quad t \in [0,T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Para continuar consideremos la siguiente definición.

Definición 1.2 *La matriz*

$$K := (B, AB, ..., A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n\times nm}, \tag{3}$$

es llamada la matriz de Kalman.

La celebre condición de Kalman esta dada por el siguiente teorema

Teorema 1.1 *El sistema $y' = Ay + Bh$ es controlable en un tiempo T, si y solamente si, la condición siguiente se satisface*

$$Ran\ K = n. \tag{4}$$

Observación 1.1 *Es remarcable el hecho que la controlabilidad del sistema no depende del tiempo T, sino de una condición algebraica sobre A y B.*

Observación 1.2 *Si Ran $B = n$, entonces la condición* (4) *es verifica de forma automatica, y así el sistema en cuestión es controlable. Esto corresponde al caso donde hay al menos tantos controles como ecuaciones.*

En lo que sigue procederemos con la demostración de la condición de Kalman, la cual consta de dos etapas.

1.1.1. Etapa 1: Controlabilidad ⇔ Continuación única ⇔ Desigualdad de observabilidad.

Dados $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $h \in C([0,T];\mathbb{R}^m)$, por la fórmula de Duhamel, la solución de (2) esta dada por

$$y(T) = e^{TA}y_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bh(s)ds.$$

Es sencillo de ver que la controlabilidad de (2) en el tiempo T, es equivalente a la sobreyectividad de la transformación lineal

$$\Phi : h \in C\left([0,T];\mathbb{R}^m\right) \mapsto \int_0^T e^{(T-s)A}Bh(s)ds \in \mathbb{R}^n.$$

Si consideramos el hecho que $\mathbb{R}^n$ es de dimensión finita y que $C([0,T];\mathbb{R}^m)$ es denso en $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$, es sencillo de ver que la controlabilidad de (2) en el tiempo T es equivalente a la sobreyectividad de la nueva transformación lineal (la cual seguiremos denotanfo por Φ, por simplicidad)

$$\Phi : h \in L^2\left(0,T;\mathbb{R}^m\right) \mapsto \int_0^T e^{(T-s)A}Bh(s)ds \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Notemos que

$$\Big(\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^n\Big) \Leftrightarrow \Big(\mathrm{Ker}\left(\Phi^*\right) = \{0\}\Big), \tag{6}$$

lo cual a su vez

$$\Big(\mathrm{Ker}\left(\Phi^*\right) = \{0\}\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists C > 0, \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\left\|\Phi^*\varphi_T\right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}\Big). \tag{7}$$

Además, a partir de (5), un cálculo simple nos da

$$\forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi^*\varphi_T = B^{\mathrm{tr}}e^{(T-\cdot)A^{\mathrm{tr}}}\varphi_T \in L^2\left(0,T;\mathbb{R}^m\right). \tag{8}$$

Es decir, hemos deducido que demostrar la controlabilidad de (2) equivale a demostrar el principio de continuación única

$$\forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\forall s \in [0,T], B^{\mathrm{tr}}e^{(T-s)A^{\mathrm{tr}}}\varphi_T = 0\Big) \Rightarrow \left(\varphi_T = 0\right), \tag{9}$$

o de manera equivalente, demostrar la desigualdad de observabilidad: existe un $C > 0$ tal que

$$\forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \quad \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\left(\int_0^T \left\|B^{\mathrm{tr}}e^{(T-s)A^{\mathrm{tr}}}\varphi_T\right\|_{\mathbb{R}^m}^2 ds\right)^{1/2}. \tag{10}$$

1.1.2. Etapa 2: Continuación única $\Leftrightarrow$ Condición de Kalman.

En lo que sigue denotemos por $\varphi(s) = e^{(T-s)}A^{\text{tr}}\varphi_T$. Por analiticidad, tenemos

$$B^{\text{tr}}\varphi(s) = 0,$$

si y solo si,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{d^k}{ds^k}\varphi(s)\bigg|_{s=T} = 0.$$

Lo anterior es equivalente al hecho que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B^{\text{tr}}(A^{\text{tr}})^k\varphi_T = 0.$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, esto es equivalente a

$$\Big(B^{\text{tr}}, B^{\text{tr}}A^{\text{tr}}, ..., B^{\text{tr}}(A^{\text{tr}})^{n-1}\Big)\varphi_T = 0.$$

De este modo, hemos probado que

$$(9) \Leftrightarrow \ker(K^*) = \{0\},$$

y asi

$$(9) \Leftrightarrow Ran\ K = n,$$

donde K es la matriz de Kalman anteriormente definida.

De este modo concluimos la demostración.

Observación 1.3 *En la demostración precedente, los concdeptos de continuación única e inegualdad de observabilids son equivalentes. Este fenomeno en particular se desprende del hecho que estamos trabajando en dimensión finita. Siendo mas precisos, se deduce del hecho que las normas son equivalentes en dimensión finita.*

1.1.3. Demostración bajo la forma de Brunovski

Supongamos en primera instancia que la condición de Kalman se verifica. Demostraremos que el sistema $y' = Ay + Bh$ es controlable en el tiempo T. Por simplicidad supongamos que $m = 1$. Por reversibilidad del sistema (1), y sin perdida de generalidad, supongamos que $y_f = 0$.

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, sabesmo que $p_A(A) = 0$, donde p_A denota el polinomio caracteristico de A. Así, se deduce que existen coeficientes $c_0, ..., c_{n-1}$ tales que

$$A^n = C_0 I_0 + C_1 A + \cdot + c_{n-1}A^{n-1}.$$

Por hipotesis, la matriz de Kalman $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible. Denotemos por

$$\widehat{A} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & \vdots & c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

y

$$\widehat{B} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces se verifica que

$$AK = K\widehat{A} \text{ et } B = K\widehat{B}, \text{ i.e. } \widehat{A} = K^{-1}AK \text{ et } \widehat{B} = K^{-1}B.$$

De este modo, considerando $y = Kz$, se tiene

$$z' = \widehat{A}z + \widehat{B}h. \tag{11}$$

Así, hemos transformado el sistema (1) en el sistema (11) donde la matriz $\widehat{A}$ es una matriz companera y $\widehat{B}$ es el primer vector de la base canonica, es decir

$$\begin{cases} z_1' = c_0 z_n + h \\ z_2' = z_1 + c_1 z_n \\ \vdots \\ z_n' = z_{n-1} + c_{n-1} z_n. \end{cases}$$

Esta estructura es llamada generalmente sistema cascada. El punto importante es los terminos bajo la diagonal de $\widehat{A}$ no se anulan, y por tanto se va dando el acoplamiento. Intuitivamente, la función h va a controlar la primera componente z_1 gracias a la primera ecuación, la cual va a controlar z_2 gracias a la segunda ecuación (y al termino de acomplamiento z_1), y de este modo sigue se va a llegar a hecho que z_{n-1} va a controlar z_n al considerar la última ecuación.

Pasemos ahora a la construcción explicita del control h:

- Definamos por $\overline{z}$ a la solución libre del sistema (11), es decir el sistema con $z_0 = K^{-1}y_0$ y $h = 0$.
- Consideremos una función de truncamiento $\nu \in C^\infty([0,T];[0,1])$ de la siguiente manera

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{sobre } [0, T/3], \\ 0 & \text{sobre } [2T/3, T]. \end{cases}$$

- Empezamos eligiendo

$$z_n(t) := \nu(t)\overline{z_n}(t).$$

  Luego, al considerar la última ecuación de (11), definimos

$$z_{n-1} = z_n' - c_{n-1} z_n(t),$$

  y así

$$z_i(t) := z_{i+1}' - c_i z_n(t),$$

  para cada i entre $n-2$ y 1.

- La primera ecuación de (11) nos sugiere entonces de poner

$$h(t) = z_1' - c_0 z_n(t).$$

Por tanto, por construcción z es solución del sistema (11) con el control h definido precedentemente.

Entonces, es suficiente de verificar por recurrencia decendente que para cada $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene

$$z_k = \overline{z_k} \quad \text{sobre} \quad [0, T/3],$$

y

$$z_k = 0 \quad \text{sobre} \quad [2T/3, T].$$

Esto completa la demostración ya que

$$z(0) = \overline{z}(0) = K^{-1}y_0$$

y

$$z(T) = 0.$$

1.2. El caso de coeficientes variables

En este subsección, supondremos que A y B son de clase $C^\infty[0,T]$.

Definamos por recurrencia sobre el índice i, la sucesión $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty([0,T];\mathbb{R}^{n\times m})$ de la siguiente manera, para cada $t \in [0,T]$, definimos

$$B_0(t) := B(t), \tag{12}$$

y

$$B_i(t) := B'_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t). \tag{13}$$

El siguiente resultado es una condición de Kalman generalizada

Teorema 1.2 *Supongamos que*

$$Ran\ \Big(B_0(\bar{t}), B_1(\bar{t}), ..., B_{n-1}(\bar{t})\Big) = n, \quad \forall \bar{t} \in [0,T]. \tag{14}$$

Entonces, el sistema

$$y' = A(t)y + B(t)h$$

es controlable en el tiempo T.

Observación 1.4 *En el caso cuando A y B son matrices constantes, se tiene que para cada i,*

$$B_i = (-1)^i A^i B,$$

con la misma definición que en (12)-(13). *De este modo, el Teorema 1.2 permite encontrar la condición suficiente de controlabilidad del Teorema 1.1.*

Para una demostración del Teorema 1.2 recomendamos ver el Teorema 1.18 del libro [1].

Referencias

[1] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, no. 136, American Mathematical Soc., 2007.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Second edition, ELLIPSES, 2008.

[3] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302 (1986), pp. 471–475.

[4] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[5] ——, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, vol. 9 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Perturbations. [Perturbations].

[6] ——, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), pp. 1–68.

[7] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, Siam Review, 20 (1978), pp. 639–739.

[8] E. Zuazua, *Las matemáticas del control*, in De la aritmética al análisis: historia y desarrollos recientes en matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, pp. 245–318.

[9] ——, *Controllability of partial differential equations*, Optimization and Control, 2006.