Lección n°2: Motivación, definiciones y propiedades necesarias.

Índice

1. El problema de la controlabilidad exacta

Consideremos el dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\Gamma = \partial\Omega$ su frontera, la cual supondremos de clase C^2. Ademas consideremos $T > 0$, el intervalo abierto $]0, T[$, y los conjuntos $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $Q = \Omega \times]0, T[$.

$$\begin{cases} \partial_{tt} y - \Delta y = h(x,t) & \text{en} \quad Q, \\ y = 0 & \text{en} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y^0(x), \ \partial_t y(x,0) = y^1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Al suponer ciertas condiciones de compatibilidad y regularidad adecuadas sobre los datos iniciales y la función $h(x,t)$, el sistema (1) admite una única solución. Para detalles consultar los libros...

Si consideramos el caso homogéneo, es decir, $h \equiv 0$, multiplicamos la ecuación de ondas por y, e integramos por parte, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla y(x,t)|^2 + |\partial_t y(x,t)|^2\right] dx\right) = 0.$$

Esto nos motiva a definir la noción de energía del sistema. En efecto, si definimos la función $E(t)$ como el integrando de la ecuación antes mencionada, podemos concluir

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0,$$

es decir, podemos inferir que la energía del sistema se conserva a lo largo de la trayectoria.

Desde esta ley de conservación de energía, obtenemos la siguiente consecuencia: una solución no nula de la ecuación de ondas nunca alcanzará una posición de equilibrio en un tiempo finito.

Lo anterior motiva el problema de la controlabilidad exacta, el cual puede ser entendido como la manera en la cual se pueden conducir todas las trayectorias a un estado de equilibrio en un tiempo finito, al considerar un control o una fuerza externa. En el caso considerado, dicha fuerza externa viene dada por la función $h(x,t)$. De manera mas rigurosa, nos enfrentamos al siguiente problema.

Problema 1 (Controlabilidad exacta para la ecuación de ondas) *Estudiar la existencia de un tiempo $T > 0$, tal que dado un par de datos iniciales (y^0, y^1) exista una función $h(x,t)$, la cual llamaremos control, de modo que la soluciíon $y(x,t)$ de la ecuación de ondas (1) verifique*

$$y(T) = \partial_t(T) = 0. \tag{2}$$

Observación 1.1 *Al considerar el problema anterior sin ninguna restricción sobre el soporte de la función $h(x,t)$, la solución del problema resulta ser elemental. En efecto, dados $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $T > 0$,* *y considerando funciones* $a(t),\ b(t) \in C^2([0,T])$, *tales que*

$$a(0)=1, a'(0)=0; a(T)=a'(T)=0$$
$$b(0)=0, b'(0)=1; b(T)=b'(T)=0,$$

la función

$$y(x,t)=a(t)y^0(x)+b(t)y^1(x),$$

satisface

$$y(x,0)=y^0(x),\ \partial_t y(x,0)=y^1(x),\ y(T)=\partial_t y(T)=0.$$

De este modo al considerar

$$h(x,t)=\partial_{tt}y-\Delta y=a''(t)y^0+b''(t)y^1-a(t)\Delta y^0-b(t)\Delta y^1$$

solucionamos el problema de controlabilidad. Es más, hemos demostrado lo siguiente:

Sea $T>0$. *Dados los datos iniciales* $(y^0,y^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, *existe un control* $h\in C([0,T],H^{-2}(\Omega))$ *tal que la solución de la ecuación de ondas no homegénea* (1) *verifica las considiones establecidas en la ecuación* (2).

Como la ecuación de ondas es lineal y reversible, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1 *Sea* $T>0$. *Dados los datos iniciales* $(y^0,y^1),\ (z^0,z^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, *existe un control* $h\in C([0,T],H^{-2}(\Omega))$ *tal que la solución de la ecuación de ondas no homegénea* (1) *verifica*

$$y(T)=z^0,\ \partial_t y(T)=z^1. \tag{3}$$

Demostración 1.1 *Consideremos* $z=z(x,t)$ *la solución de*

$$\begin{cases}\partial_{tt}z-\Delta z=0 & en\quad Q,\\ z=0 & en\quad \Sigma,\\ z(T)=z^0(x),\ \partial_t z(T)=z^1(x).\end{cases} \tag{4}$$

Ahora, como el sistema de EDPs (4) *admite una única solución*

$$z\in C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\right), \tag{5}$$

si definimos la variable

$$\zeta=y-z, \tag{6}$$

concluimos que y *es solución* (1), *si y solo si* ζ *satisface*

$$\begin{cases}\zeta''-\Delta\zeta=h & en\quad Q\\ \zeta=0 & en\quad \Sigma\\ \zeta(0)=y^0-z(0),\ \partial_t\zeta(0)=y^1-z^1(0).\end{cases} \tag{7}$$

Observemos que (3) *se obtiene, si y solo si*

$$\zeta(T)=\partial_t\zeta(T)=0. \tag{8}$$

Por lo demostrado anteriormente en la observación 1.1 y como $(y^0-z(0),y^1-\partial_t z(0))\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, *existe un control* $h\in C([0,T],H^{-2}(\Omega))$ *de modo que la solución del sistema* (7) *verifica* (8), *lo que a su vez implica que la solución del sistema* (1) *verifica la condición* (3). *De este modo concluimos esta demostración.*

Observación 1.2 *La proposición anterior nos dice que demostrar que cada estado inicial puede ser conducido al estado de equilibrio es equivalente a demostrar que cada estado inicial puede ser conducido a todo estado final.*

Si sintetizamos lo estudiado hasta ahora, hemos visto que el problema de controlabilidad exacta con un control interno definido en todo el dominio Ω tiene una solución trivial, y que dicho resultado de controlabilidad se obtiene en un tiempo pequeño. Ahora, si restringimos el dominio en el cual esta definido el control a un subconjunto de Ω, el desarrollo involucrará de técnicas sofisticadas que revolucionarón la teoría de control y de EDPs en Paris, durante la segunda mitad del siglo XX. Este será el horizonte de estas notas en lo que sigue.

1.1. El problema de control interno localizado

Consideremos ω un subconjunto abierto y no vacio de Ω. Denotemos por 1_ω a la función característica de ω. Así, la ecuación de ondas no homogénea que presentamos en esta subsección es la siguiente.

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = 1_\omega h(x,t) & \text{en} \quad Q, \\ y = 0 & \text{en} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y^0(x),\ \partial_t y(x,0) = y^1(x). \end{cases} \tag{9}$$

Como hemos mencionado anteriormente, el problema de controlabilidad exacta considera el control h actuando solamente sobre el subconjunto ω. La formulación precisa de este problema es presentada a continuación.

Problema 2 *Encontrar un tiempo $T > 0$ tal que para todo par de datos iniciales (y^0, y^1), exista un control h tal que la solución de* (9) *verifique la condición dada en* (2).

Así, este problema de controlabilidad exacta considera al control h actuando internamente en la ecuación en cuestion y de manera localizada (en el subconjunto ω).

En orden de entender a cabalidad y resolver los problemas mencionados anteriormente, en la siguiente sección introduciremos ciertos espacios funcionales, y sus principales propiedades, con el objetivo de posar nuestros datos iniciales y las respectivas soluciones de manerá rigurosa.

1.2. Control en la frontera

Sean $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subconjunto abierto y no vacio, y $T > 0$. Analicemos la siguiente ecuación de ondas con condiciones de contorno no homogéneas

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = h(x,t) & \text{en } Q = \Omega\times]0,T[, \\ y = \begin{cases} v \\ 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0\times]0,T[\\ \text{en } \Sigma_1 = (\Gamma\backslash\Gamma_0)\times]0,T[\end{array} \\ y(x,0) = y^0(x),\ \partial_t y(x,0) = y^1(x). \end{cases} \tag{10}$$

El problema de la controlabilidad exacta en la frontera se formula como sigue.

Problema 3 *Encontrar un tiempo $T > 0$ tal que para todo par de datos iniciales (y^0, y^1), exista un control v tal que la solución de* (10) *verifique la condición dada en* (2).

Como veremos en la futuras sesiones, el problema de control interno localizado y el problema de control en la frontera, son problemas que tienen una complejidad importante.

Ambos problemas pueden ser resueltos considerando el método H.U.M. (Hilbert Uniquenes Method), el cual fue introducido en la literatura especializada por el matemático frances J. L. Lions en [1, 4] y bien desarrollada en sus libros [2] y [3]. Otra buena referencia sobre este tema es el excelente libro de E. Zuazua [5]. Dicho metodo se caracteriza principalmente por su flexibilidad, además de tener la virtud de proporcionar sistemáticamente un control optimal, lo cual significa, un control que minimiza una cierta función costo que surge de manera natural en el estudio de cada problema.

2. Definiciones básicas

2.1. Espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$

Comencemos considerando el espacio medible $(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Definición 2.1 *Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio $L^p(X)$ como el conjunto de (clases de) funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < +\infty.$$

Sobre este espacio la cantidad

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma. Dotada de esta norma los espacios $L^p(X)$ son un espacio de Banach.

Cuando no haya confusión notaremos frecuentemente la norma $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ por $\|\cdot\|_{L^p}$ o $\|\cdot\|_p$.

Observación 2.1 *El espacio particular cuando $p = 2$, lo cual corresponde a $L^2(X)$, es un espacio de Hilbert si es dotado con el producto escalar dado por*

$$(f, g)_{L^2(X)} = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu.$$

Definición 2.2 *El espacio $L^\infty(X)$ se define como el conjunto de (clases de) funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$ que son esencialmente acotadas, lo cual significa que existe un $M > 0$ tal que,*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0.$$

Por definición $\|f\|_{L^\infty(X)}$ es el infimo de tales números M. Esto es caracterizado como sigue

$$\begin{aligned} &\mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(X)}\right\}\right) = 0 \quad \text{y} \\ &\forall \alpha < \|f\|_{L^\infty(X)}, \quad \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \neq 0. \end{aligned}$$

Dotado con esta norma el espacio $L^\infty(X)$ es un espacio de Banach.

Observación 2.2 *Notemos que si f es una función continua y acotada sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

2.2. Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$

Consideremos el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 2.3 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es definido como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \quad \textit{tales que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p.$$

Dotado con esta norma el espacio $W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

Cuando no haya peligro de confusión, escribiremos $W^{1,p}$ en vez de $W^{1,p}(\Omega)$.

Observación 2.3 *Similarmente a los espacios L^p, el caso cuando $p = 2$ es un caso particular de los espacios de Sobolev, el cual denotaremos por*

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

Este espacio es dotado con el producto escalar dado por

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La norma asociada con el espacio $H^1(\Omega)$ será

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2},$$

la cual es equivalente con la norma definida sobre $W^{1,2}(\Omega)$. Dotado con esta norma el espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 2.4 *Sea $m \geq 2$ un entero y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es definido como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

En lo que sigue usaremos la notación multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ con cada $\alpha_i \geq 0$ y entero. Así, consideraremos en lo que sigue las siguientes notaciones

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \text{ y } \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Teniendo esto claro, el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p .$$

Dotado con esta norma el espacio $W^{m,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

De manera similar a lo visto más arriba, denotaremos el caso especial cuando $p = 2$ como

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Este espacio es dotado con el producto escalar dado por

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

y similarmente a los casos revisados anteriormente, esta norma hace de H^m un espacio de Hilbert.

Otro espacio que será relevante para en lo que sigue hace mención a la clausura del espacio de funciones con primera derivada continua y con soporte compacto sobre Ω.

Definición 2.5 *Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Así, consideremos la siguiente notación

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Observación 2.4

- *El espacio $W_0^1(\Omega)$ dotado con la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Además es separable y es reflexivo si $1 < p < \infty$.*
- *El espacio $H_0^1(\Omega)$, equipado con el producto escalar de $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

A modo de entender y caracterizar los espacios, introducimos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1 *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ tal que Supp u es subconjunto un compacto de Ω. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración 2.1 *Fijemos un conjunto abierto ω con la propiedad Supp $u \subset \omega \subset\subset \Omega$, y seleccionemos un $\alpha \in C_c^1(\omega)$ tal que $\alpha = 1$ aplicado a los elementos de Supp u (con lo cual se tiene $\alpha u = u$). Por el Teorema de Friedrichs Existe[1] una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$u_n \to u \text{ in } L^p(\omega) \quad y \quad \nabla u_n \to \nabla u \text{ in } L^p(\omega)^n.$$

De este modo, sigue el hecho que $\alpha u_n \to \alpha u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, con lo cual se concluye que αu in $W_0^{1,p}(\Omega)$, y así tambien u. De este modo concluye la demostración.

Definición 2.6 *Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos el exponente conjugado p' de p mediante la siguiente expresión*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Proposición 2.2 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase C^1. Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

(ii) *existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

(iii) *la función*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

pertenece al espacio $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración 2.2

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Al considerar $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\left| \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \right| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_p \|\varphi\|_{p'}.$$

Con lo cual, al pasar al límite, obtenemos (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)},$$

con lo cual $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

[1] El o la interesada puede chequear una demostración de este hecho en la página 265 del libro CITAR.

(iii) $\Rightarrow$ *(i). Asumamos que el dominio* Ω *es acotado. Al considerar cartas locales y particiones de la unidad, lo que debemos demostrar se reduce al siguiente problema.*

Sea $u \in L^p(Q_+)$, *tal que la función*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in Q, x_N > 0 \\ 0 & \text{if } x \in Q, x_N < 0 \end{cases}$$

pertenece a $W^{1,p}(Q)$. *Demuestre que*

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+) \quad \forall \alpha \in C_c^1(Q).$$

Consideremos la sucesión de Mollifiers $\{\rho_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\operatorname{supp}\rho_m \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2m} < x_n < \frac{1}{m} \right\}.$$

Podemos escoger, por ejemplo,

$$\rho_m(x) = m^m \rho(mx) \quad \text{y} \quad \operatorname{supp}\rho \subset \{x \in \mathbb{R}^n | (1/2) < x_n < 1\}.$$

De este modo se tiene $\rho_m * (\alpha\bar{u}) \to \alpha\bar{u}$ *en* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Por otro lado, para* m *suficientemente grande tenemos*

$$\operatorname{supp}(\rho_m \star \alpha\bar{u}) \subset \operatorname{supp}\rho_m + \operatorname{supp}(\alpha\bar{u}) \subset Q_+.$$

De este modo, sigue el hecho que

$$\rho_m * (\alpha\bar{u}) \in C_c^1(Q_+),$$

y así $\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$.

De este modo concluye la demostración.

Referencias

[1] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302 (1986), pp. 471–475.

[2] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[3] ——, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, vol. 9 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Perturbations. [Perturbations].

[4] ——, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), pp. 1–68.

[5] E. Zuazua, *Controllability of partial differential equations*, Optimization and Control, 2006.