Lección n°3: Problema de controlabilidad de frontera para la ecuación de ondas I.

Índice

1. El espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ al espacio dual de $W^{1,p}(\Omega)$. Además, denotaremos por $H^{-1}(\Omega)$ al espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.

Observación 1.1 *Recordemos que el espacio dual de $L^2(\Omega)$ es identificado con $L^2(\Omega)$, sin embargo no identificaremos $H_0^1(\Omega)$ con su dual. Es más, tenemos las siguientes inclusiones*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

donde las inyecciones son continuas y densas.

Si el dominio Ω es acotado, entonces se tiene

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad si \quad 2n/(n+2) \leq p < \infty,$$

con inyecciones continuas y densas.

Si el dominio Ω es no acotado, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad si \quad 2n/(n+2) \leq p < 2,$$

con inyecciones continuas y densas.

Los elementos de $W^{-1,p'}(\Omega)$ esta completamente caracterizados por el siguiente resultado.

Proposición 1.1 *Sea $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Entonces, existen $n+1$ funciones $f_0, ..., f_n \in L^{p'}$ tales que*

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y

$$\|F\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{p'}.$$

Además, en el caso cuando el dominio Ω es acotado podemos considerar $f_0 = 0$.

2. El método H.U.M.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado tal que $\Gamma = \partial\Omega$ es de clase C^2. Sean $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subconjunto abierto y no vacio, y $T > 0$. En esta lección estudiaremos el problema de la controlabilidad exacta para la siguiente ecuación de ondas con condiciones de contorno no homogéneas

$$
\begin{cases}
\partial_{tt}y - \Delta y = 0 & \text{en } Q = \Omega\times]0,T[, \\
y = \begin{cases} v & \\ 0 & \end{cases} & \begin{matrix} \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0\times]0,T[\\ \text{en } \Sigma_1 = (\Gamma\backslash\Gamma_0)\times]0,T[\end{matrix} \\
y(x,0) = y^0(x),\ \partial_t y(x,0) = y^1(x), &
\end{cases}
\tag{1}
$$

en donde los datos iniciales serán considerados en el espacio $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, y los controles serán considerados en $L^2(\Sigma_0)$.

Observación 2.1 *En el modelo que estamos considerando la velocidad de propagación de las ondas es finita, es más es igual a 1. Así, para obtener un resultado de controlabilidad exacta será preciso que el tiempo T sea suficientemente grande, lo cual matemáticamente queda expresado como un $T > T_0$ con $T_0 >> 0$ dependiendo de Ω y Γ_0.*

Este tipo de problemas de controlabilidad han sido estudiados por diversos matemáticos. Así, en 1978 D. L. Russel publica un artículo recopilatorio de los métodos y resultados mas importantes que habian sido desarrollados hasta aquel momento [7]. En dicho trabajo, se da cuenta que si bien existian numerosos resultados importantes, se carecía de un método sistematico para la resolución de estos problemas. Teniendo en cuenta este hecho, en 1986 J.L. Lions publica el trabajo, en el cual propone un método que denomino H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method), que reduce el problema de controlabilidad exacta a la obtención de estimaciones a priori adecuadas.

A lo largo de esta lección, nos inspiraremos en el capítulo II del libro de Enrique Zuazua [9].

El método H.U.M. adaptado al estudio de la controlabilidad exacta de (1) es la siguiente:

dados los datos iniciales ϕ^0 y ϕ^1 en $D(\Omega)$, se resolverá el sistema de ecuaciones

$$
\begin{cases}
\partial_{tt}\phi - \Delta\phi = 0 & \text{en } Q \\
\phi = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma\times(0,T) \\
\phi(0) = \phi^0; \partial_t\phi(0) = \phi^1. &
\end{cases}
\tag{2}
$$

El sistema (2) admite una única solución. Tras conocerla, se resuelve el problema

$$
\begin{cases}
\partial_{tt}y - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\
y(T) = \partial_t y(T) = 0 & \\
y = \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} & \\ 0 & \end{cases} & \begin{matrix} \text{en } \Sigma_0 \\ \text{en } \Sigma_1. \end{matrix}
\end{cases}
\tag{3}
$$

En la ecuación anterior, $\nu = \nu(x)$ hace referencia a la normal unitaria (apuntando hacia afuera) a Ω en el punto $x\in\Gamma$, además, $\partial/\partial\nu$ denota la derivada en dicha dirección.

De manera similar a la anterior, el sistema (3) admite una solución regular única.

Definamos el operador

$$
\Lambda\left(\phi^0,\phi^1\right) = \left(\partial_t y(0), -y(0)\right). \tag{4}
$$

Al multiplicar la ecuación (3) por una solución del sistema (2) con datos iniciales (θ^0,θ^1), digamos $\theta(x,t)$, y al integrar por partes, se obtiene

$$
\left\langle\Lambda\left(\phi^0,\phi^1\right),\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\rangle = \int_{\Sigma_0}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\Sigma \tag{5}
$$

en donde hemos utilizado la notación $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}t$ para representar la medida sobre la superficie lateral Σ del cilindro Q. Notemos que en particular se tiene

$$
\left\langle\Lambda\left(\phi^0,\phi^1\right),\left(\phi^0,\phi^1\right)\right\rangle = \int_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{6}
$$

Para continuar, sean $T > 0$ y Γ_0 tales que se tiene el siguiente resultado de unicidad:

$$\text{Si } \phi \text{ es una solución de (2) tal que } \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_0, \text{ entonces } \phi \equiv 0, \text{ y así } (\phi^0, \phi^1) = (0,0). \tag{7}$$

Dado este caso, podemos definir la siguiente norma sobre $D(\Omega) \times D(\Omega)$

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Denotemos por F al espacio de Hilbert definido por la completación de $D(\Omega) \times D(\Omega)$ respecto a la norma $|| \cdot ||_F$.

Dada la ecuación (5), el operador Λ se puede extender a un operador lineal y continuo de F en F'. Por otra parte, dada la norma definida en (8) concluimos que

$$\Lambda : F \to F' \quad \text{ es un isomorfismo.} \tag{9}$$

Por tanto, al considerar los datos iniciales (y^0, y^1) tales que

$$(y^1, -y^0) \in F', \tag{10}$$

el problema

$$\Lambda(\phi^0, \phi^1) = (y^1, -y^0), \text{ con } (\phi^0, \phi^1) \in F \tag{11}$$

admite una solución que es única.

Observemos que (11) es equivalente al hecho que la solución $y(x,t)$ de (3), correspondiente a la solución ϕ de (2) con datos iniciales (ϕ^0, ϕ^1) sea tal que

$$y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1. \tag{12}$$

Así, el control buscado esta dado por la siguiente expresión

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$$

en donde $\phi(x,t)$ corresponde a la solución de (2) con datos iniciales $(\phi^0, \phi^1) \in F$ verificando (11). Notemos que la inclusión en $L^2(\Sigma_0)$ se tiene por construcción.

Lo anterior no es más que la demostración del siguiente lema.

Lema 2.1 *Sean $T > 0$ y $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tales que (7) sigue. Entonces, dados datos iniciales (y^0, y^1) tales que $(y^1, -y^0) \in F'$, existe un control $v \in L^2(\Sigma_0)$ de modo que la solución $y(x,t)$ de (1) verifica*

$$y(T) = \partial_t y(T) = 0.$$

Al considerar el Teorema de Holmgren (el interesado puede ver los detalles de este teorema en el apartado I.8 del libro de J.L. Lions [4]) se tiene que para cada abierto $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$ tal que el resultado de unicidad sigue para $T > T_0$.

Lo obtenido es satisfactorio pues el subconjunto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es arbitrario. Sin embargo, no se tiene precisión respecto al espacio de los datos iniciales controlados F'.

Así las cosas, el desafio que nos queda por delante es identificar una buena elección para nuestro espacio F', o de manera equivalente, una buena elección de F. Ahora, como sabemos que F es la completación de $D(\Omega) \times D(\Omega)$ respecto a la norma $|| \cdot ||_F$, una estrategia interesante es demostrar la equivalencia de esta norma con alguna norma conocida.

Notemos que en particular, si buscamos probar controlabilidad exacta en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, precisaremos demostrar que

$$F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o de manera equivalente

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

lo que a su vez equivale a demostrar que existen constantes $c, C > 0$ satisfaciendo

$$c \left\| \left(\phi^0, \phi^1\right) \right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \left\| \left(\phi^0, \phi^1\right) \right\|_F \leq C \left\| \left(\phi^0, \phi^1\right) \right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}, \quad \forall \left(\phi^0, \phi^1\right) \in D(\Omega) \times D(\Omega). \tag{13}$$

En lo que sigue probaremos que se tiene (13) tras asumir algunas hipotesis respecto al tamano de Γ_0 respecto a Γ y sobre el tiempo $T > 0$.

2.1. Desigualdad directa

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \partial_{tt}\theta - \Delta\theta = f & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ \theta(0) = \theta^0; \partial_t\theta(0) = \theta^1. \end{cases} \tag{14}$$

Lema 2.2 *Sea $q(x) \in \left(C^1\left(\overline{Q}\right)\right)^n$. Entonces, para cada solución de (14) con datos iniciales $(\theta^0, \theta^1) \in D(\Omega)\times D(\Omega)$ y $f \in D(Q)$, se tiene*

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma = \int_\Omega \partial_t\theta q\cdot\nabla\theta\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q (div\ q)\left(|\partial_t\theta|^2 - |\nabla\theta|^2\right) + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} - \int_Q \partial_t\theta\partial_x q\cdot\nabla\theta - \int_Q fq\cdot\nabla\theta. \tag{15}$$

Demostración 2.1 *Esta demostración queda como ejercicio al estudiante lector de estas notas*[1].

Observación 2.2 *En la ecuación* (15) *hemos considerado*

$$\int_\Omega \partial_t\theta q\cdot\nabla\theta\Big|_0^T = \int_\Omega \partial_t\theta(x,T)q(x)\cdot\nabla\theta(x,T)dx - \int_\Omega \partial_t\theta(x,0)q(x)\cdot\nabla\theta(x,0)dx.$$

Una consecuencia directa del Lema anterior es la siguiente

Teorema 2.1 *Existe una constante $C > 0$ tal que para cada $T > 0$, cada $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, y cada $f \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, se tiene*

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial\theta}{\partial v}\right|^2 d\Sigma \leq C(1+T)\left(\left\|\theta^0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{16}$$

Demostración 2.2 *Sea $h(x) \in \left(C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n$ un campo vectorial satisfaciendo*

$$h = \nu \text{ en } \Gamma.$$

La existencia de este campo esta garantizada pues hemos supuesto que Ω es de clase C^2 (La construcción puede ser consultada en la pagina 28 del libro de J.L. Lions [4].)

Considerando $q = h$ en la igualdad dada en la ecuación (15), *y $C = C\left(\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)$ se obtiene*

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\theta}{\partial v}\right|^2 d\Sigma \leq C\left(\|\partial_t\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta\|^2_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|\partial_t\theta\|\ L^2_{L^2(Q)} + \|\nabla\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\partial_t\theta\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{17}$$

[1]HINT: multiplicar la ecuación por $q\cdot\nabla\theta$ e integrar por partes en Q.

En este paso, es preciso recordad el siguiente resultado clásico sobre la regularidad de la ecuación de ondas

$$\|\partial_t \theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta\|^2_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq \left\|\theta^0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\theta^1\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{18}$$

Al combinar (17) *con* (18) *obtenemos* (16) *para soluciones de* (14) *con datos regulares. Considerando un argumento de densidad es posible extender a soluciones con datos* $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, y* $f \in L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$*.*

Con esto concluimos la demostración.

Observación 2.3 *La estimación dada en* (16) *nos brinda un resultado de regularidad adicional. En efecto, la solución de* (14) *con datos* $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, y* $f \in L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ *pertenece a la clase*

$$\theta \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$$

de donde no se deduce que

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma).$$

Referencias

[1] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, no. 136, American Mathematical Soc., 2007.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Second edition, ELLIPSES, 2008.

[3] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302 (1986), pp. 471–475.

[4] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[5] ——, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, vol. 9 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Perturbations. [Perturbations].

[6] ——, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), pp. 1–68.

[7] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, Siam Review, 20 (1978), pp. 639–739.

[8] E. Zuazua, *Las matemáticas del control*, in De la aritmética al análisis: historia y desarrollos recientes en matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, pp. 245–318.

[9] ——, *Controllability of partial differential equations*, Optimization and Control, 2006.