<u>**Lección n°4**</u>**: Problema de controlabilidad de frontera para la ecuación de ondas II.**

Índice

1. La desigualdad inversa

Consideremos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$m(x) = x - x_0 \quad \text{y} \quad k(x_0) = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Para continuar, dividamos Γ en las siguientes partes

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma \ ; \ m(x)\nu(x) > 0\},$$

y

$$\Gamma_*(x_0) = \{x \in \Gamma \ ; \ m(x)\nu(x) \leq 0\}.$$

Además consideremos

$$\Sigma(x_0) = \Gamma(x_0) \times]0, T[\quad \text{y} \quad \Sigma_*(x_0) = \Gamma_*(x_0) \times]0, T[.$$

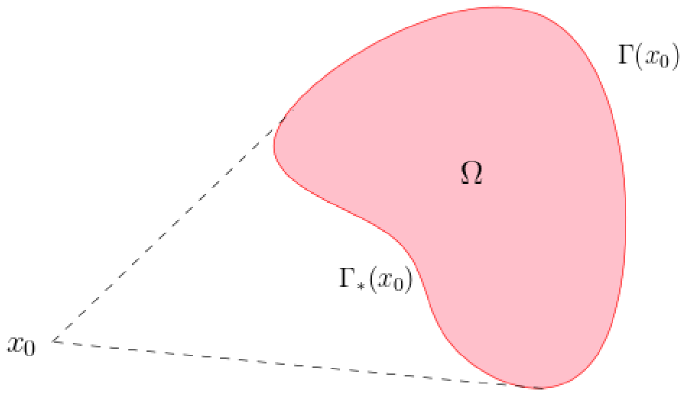

Figura 1: Idea gráfica de $\Gamma(x_0)$ y $\Gamma_*(x_0)$.

Por último, consideremos la ecuación homogenea

$$\begin{cases} \partial_{tt}\phi - \Delta\phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0; \partial_t\phi(0) = \phi^1. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema 1.1 *Sean $T > 2R(x_0)$. Entonces, para cada solución de (1) con datos iniciales $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ y $\phi^1 \in L^2(\Omega)$, la siguiente estimación sigue*

$$E_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla\phi^0(x)\right|^2 + \left|\phi^1(x)\right|^2\right] \mathrm{d}x \leq \frac{R(x_0)}{2(T - 2R(x_0))}\int_{\Sigma(x_0)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial v}\right|^2 d\Sigma. \tag{2}$$

Antes de proceder con la demostración del teorema recordemos el siguiente lema.

Lema 1.1 *Sea* $q(x) \in \left(C^1\left(\overline{Q}\right)\right)^n$*. Entonces, para cada solución de* (1) *con datos iniciales* $(\theta^0, \theta^1) \in D(\Omega) \times D(\Omega)$ *y* $f \in D(Q)$*, se tiene*

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (q \cdot \nu) \left|\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma = \int_\Omega \partial_t \theta q \cdot \nabla\theta \bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q (div\ q)\left(|\partial_t\theta|^2 - |\nabla\theta|^2\right)$$
$$+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \int_Q \partial_t\theta \partial_x q \cdot \nabla\theta - \int_Q f q \cdot \nabla\theta. \quad (3)$$

Demostración 1.1 (Del Teorema) *Al aplicar la identidad* (3) *con* $f = 0,\ \theta = \phi$ *y* $q(x) = m(x) = x - x_0$ *se obtiene*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi' m \cdot \nabla\phi \bigg|_0^T + \frac{n}{2}\int_Q |\phi'|^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\Big|_Q |\nabla\phi|^2 &= \frac{1}{2}\int_\Sigma (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \\ &\le \frac{1}{2}\int_{\Sigma(x_0)} (m\cdot\nu)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \\ &\le \frac{R(x_0)}{2}\int_{\Sigma(x_0)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}\int_Q |\phi'|^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\int_Q |\nabla\phi|^2 &= \frac{1}{2}\int_Q \left(|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2\right) + \frac{n-1}{2}\int_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) \\ &= TE_0 + \frac{n-1}{2}\int_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) \end{aligned} \quad (5)$$

pues la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\phi'(x,t)|^2 + |\nabla\phi(x,t)|^2\right) dx$$

se conserva a lo largo de la trayectoria, es decir

$$E(t) = E_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando la ecuación por ϕ *e integrando por partes obtenemos*

$$\int_\Omega \phi'\phi \bigg|_0^T = \int_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right). \quad (6)$$

Esta última identidad se conoce como la fórmula de equirelación de la energía.

Combinando las ecuaciones (4), (5) *y* (6) *se deduce*

$$X(t)|_0^T + TE_0 \le \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial v}\right|^2 d\Sigma$$

donde

$$X(t) = \int_\Omega \phi'(x,t)\left(m(x)\cdot\nabla\phi(x,t) + \frac{n-1}{2}\phi(x,t)\right) dx. \quad (7)$$

Así, debemos ahora demostrar

$$\|x(\cdot)\|_{L^\infty]0,T[} \le R(x_0)E_0. \quad (8)$$

En orden de simplificar la notación omitiremos que X *depende del tiempo* t*. Tenemos*

$$|x| \le \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\phi'|^2 + \frac{1}{2\delta}\int_\Omega \left|m.\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right|^2, \quad \forall\delta > 0. \quad (9)$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left| m\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right|^2 \leq \int_\Omega |m|^2|\nabla\phi|^2 + \left(\frac{n-1}{4}\right)^2\int_\Omega |\phi|^2 + \\ + (n-1)\int_\Omega m\cdot\nabla\phi\phi\end{aligned} \tag{10}$$

como

$$\int_\Omega m\cdot\nabla\phi\phi = \frac{1}{2}\int_\Omega m\cdot\nabla\left(\phi^2\right) = -\frac{n}{2}\int_\Omega \phi^2$$

se deduce

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left| m\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right|^2 &\leq R^2\left(x^0\right)\int_\Omega |\nabla\phi|^2 + \left(\frac{(n-1)}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\right)\int_\Omega \phi^2 \\ &\leq R^2\left(x^0\right)\int_\Omega |\nabla\phi|^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Considerando las ecuaciones (9) *y* (11) *obtenemos*

$$|x| \leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega \left|\phi'\right|^2 + \frac{R^2\left(x^0\right)}{2\delta}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \tag{12}$$

de donde podemos deducir (8) *al escoger* $\delta = R(x_0)$.

Con esto concluimos la demostración.

2. El resultado principal

Teorema 2.1 *Sean* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $T > 2R(x_0)$. *Entonces, para cada par de datos iniciales* $x^0 \in L^2(\Omega)$ *e* $y^1 \in H^{-1}(\Omega)$, *existe un control* $v \in L^2(\Sigma(x_0))$ *tal que la solución de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = 0 & en\ Q \\ y = \begin{cases} v & en\ \Sigma_{x_0} \\ 0 & en\ \Sigma_*(x_0) \end{cases} \\ y(x,0) = y^0(x),\ \partial_t y(x,0) = y^1(x), \end{cases} \tag{13}$$

Demostración 2.1 *El resultado sigue de la aplicación del método HUM desarrollado en la sección que trataba la desigualdad directa y de los Teoremas 1 y 2.*

En efecto, al aplicar el Teorema 1 con $f = 0$ *y* $\theta = \phi$, *y considerando el Teorema 2 deducimos que si* $T > 2R(x_0)$ *se verifica*

$$E_\varepsilon = E(t) + \varepsilon\int_\Omega y\partial_t y dx,$$

lo cual implica que

$$F = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

y

$$F' = H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

Con esto concluimos esta demostración.

3. Soluciones débiles de la ecuación de ondas con condiciones de contorno no homogéneas

En lo que sigue estudiaremos la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y = v & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, \ \partial_t y(0) = y^1. \end{cases} \tag{14}$$

Teorema 3.1 *Para cada par de datos iniciales $x^0 \in L^2(\Omega)$ e $y^1 \in H^{-1}(\Omega)$, y cada condición de contorno $v \in L^2(\Sigma)$, existe un control $v \in L^2(\Sigma(x_0))$ tal que la solución de (14) en*

$$y \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right). \tag{15}$$

Además, la aplicación $(y^0, y^1, v) \rightarrow (y, \partial_t y)$ es lineal y continua de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ en $C([0,T];L^2(\Omega) \times C([0,T];H^{-1}(\Omega)))$, es decir, para cada $T > 0$ existe una constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t y\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C(T)\left\{\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|y^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right\}. \tag{16}$$

Antes de continuar consideremos el siguiente lema.

Lema 3.1 *Para cada $T > 0$, existe $C(T) > 0$ tal que*

$$\left\|\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|g\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{17}$$

Demostración 3.1 (del teorema) *Estudiaremos el caso cuando $v \neq 0$. Por la linealidad del problema basta considerar el caso en que*

$$y^0 = y^1 = 0.$$

La solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y = 0 & \textit{en } Q \\ y = v & \textit{en } \Sigma \\ y(0) = \partial_t y(0) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

se define por el método de la transposición.

Sea θ una solución de la ecuación

$$\begin{cases} \partial_{tt}\theta - \Delta \theta = f & \textit{en } Q \\ \theta = 0 & \textit{en } \Sigma \\ \theta(T) = \partial_t \theta(T) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

donde $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Al multiplicar formalmente la ecuación (18) por θ e integrando por partes obtenemos

$$\int_Q yf = \int_\Sigma v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma. \tag{20}$$

Consideremos a (20) como la formulaci—ón débil de (18). Es decir, diremos que y es solución de (18) si y solo si verifica (20) para cada $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Gracias a la reversibilidad de la ecuación de ondas con respecto a la variable temporal tenemos

$$\left|\int_\Sigma v \frac{\partial \theta}{\partial v} d\Sigma\right| \leq \|v\|_{L^2(\Sigma))} \left\|\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|v\|_{L^2(\Sigma)}\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{21}$$

Desde (21) *se deduce que la aplicación*

$$f \to \int_\Omega v \frac{\partial \theta}{\partial \nu}$$

es lineal y continua de $L^1(0,T;L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$. *Por tanto, se deduce que existe un único* $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *que soluciona* (20) *para cada* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. *Por otro lado, desde* (21) *se obtiene la estimación*

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\|v\|_{L^2(\Sigma)}. \tag{22}$$

Demostremos ahora que se tiene la continuidad de la solución $t \in [0,T] \to y(t) \in L^2(\Omega)$. *En efecto, aproximamos* $v \in L^2(\Sigma)$ *mediante una sucesión* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(]0,T[;C^2(\Gamma))$ *tal que*

$$v_n \to v \text{ en } L^2(\Sigma). \tag{23}$$

Sea y_n *la solución de* (18) *asociada a* v_n. *Como* v_n *es regular,* y_n *es regular, y en particular*

$$y_n \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right).$$

Por otro lado, de (22) *y* (23) *se deduce*

$$y_n \to y \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

de donde se concluye que $y \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

Demostremos ahora que $\partial_t y \in C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$. *Aplicando* (20) *con* $f = g'$, *se obtiene*

$$\int_Q yg' = \int_\Sigma v \frac{\partial\theta}{\partial\nu} d\Sigma \tag{24}$$

donde θ *es solución de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}\theta - \Delta\theta = g' & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \theta(T) = \partial_t\theta(T) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Supongamos ahora que para cada $T > 0$, *existe* $C(T) > 0$ *tal que para cada solución de* (24) *se tiene*

$$\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|g\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{26}$$

En estas condiciones, nuevamente por dualidad, se deduce que

$$\partial_t y \in L^\infty\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \tag{27}$$

y la estimación

$$\|\partial_t y\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\|v\|_{L^2(\Sigma)}. \tag{28}$$

Finalmente por densidad se obtiene que

$$\partial_t y \in C\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \tag{29}$$

La estimación (26) *sigue del lema precedente.*

De este modo concluye la demostración.

Referencias

[1] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, no. 136, American Mathematical Soc., 2007.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Second edition, ELLIPSES, 2008.

[3] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302 (1986), pp. 471–475.

[4] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

[5] ——, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, vol. 9 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Perturbations. [Perturbations].

[6] ——, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev., 30 (1988), pp. 1–68.

[7] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, Siam Review, 20 (1978), pp. 639–739.

[8] E. Zuazua, *Las matemáticas del control*, in De la aritmética al análisis: historia y desarrollos recientes en matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, pp. 245–318.

[9] ——, *Controllability of partial differential equations*, Optimization and Control, 2006.