

**Lección n°5: Controlabilidad de la ecuación del calor**

**Índice**

<b>1. Notaciones</b>	<b>1</b>
<b>2. El problema de la controlabilidad a cero</b>	<b>1</b>
<b>3. La ecuación del calor es controlable a cero en todo tiempo</b>	<b>3</b>
<b>4. El método HUM</b>	<b>3</b>
4.1. Únicidad retrograda y analiticidad para la ecuación del calor . . . . .	4

**1. Notaciones**

En esta lección abordaremos la controlabilidad de la ecuación del calor. Las ideas que aquí desarrollaremos se dan un marco infinito dimensional.

Introduzcamos algunas notaciones que nos serán útiles en lo que sigue:

- $T \in ]0, +\infty[$  denota un tiempo.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$ , es un abierto acotado conexo de clase  $C^2$  que representará el dominio espacial.
- $\omega$  es un abierto no vacío contenido en  $\Omega$  que denota el abierto de control.

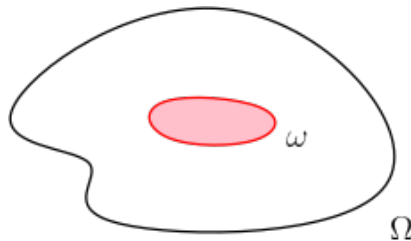


Figura 1: Idea gráfica del abierto  $\Omega$  y el sub-abierto  $\omega$ .

- $Q_T := \Omega \times ]0, T[$  denota el cilindro parabólico.
- $\Sigma_T := \partial\Omega \times ]0, T[$  denota la frontera parabólica.
- $q_T := \omega \times ]0, T[$  denota el cilindro parabólico de control.

**2. El problema de la controlabilidad a cero**

La ecuación del calor con condiciones de Dirichlet en el borde  $\Omega$  y control localizado se escribe como sigue:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = h1_\omega & \text{en } Q_T, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

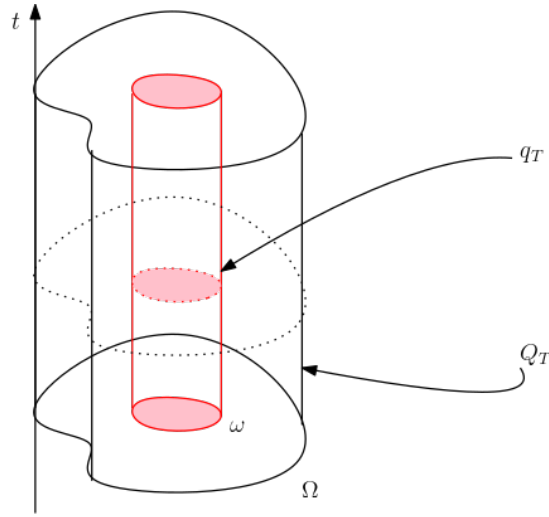


Figura 2: Idea gráfica del cilindro parabólico, de la frontera parabólica y del cilindro parabólico de control.

**Observación 2.1** Dado  $(x, t) \in Q_T$ , si  $y(x, t)$  representa la temperatura en un instante  $t$  en el punto  $x$  de nuestro dominio espacial  $\Omega$ , entonces  $h1_\omega$  puede interpretarse como un término para el calentamiento o enfriamiento localizado en el espacio.

Supondremos que el dato inicial  $y_0$  pertenece al espacio  $L^2(\Omega)$ , y buscaremos encontrar un control  $h \in L^2(Q_T)$  de manera que el estado  $y(x, t)$  tiene un comportamiento esperado en el tiempo  $t = T$ , es decir, buscamos responder un problema de controlabilidad para la ecuación del calor mediante un control localizado en el espacio. Dado los efectos regularizantes de la ecuación del calor, no es posible encontrar soluciones de (1) de modo de tener un comportamiento esperado arbitrario en  $L^2(\Omega)$  o  $H^m(\Omega)$ , a menos que estemos en la situación trivial donde  $\omega = \Omega$ . Por otro lado, parece interesante preguntarse si es posible llevar las soluciones de (1) a un estado prescrito de trayectoria (actuando solo sobre  $\omega \subset \subset \Omega$ ). Esta discusión nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 2.1** Diremos que la ecuación (1) es controlable a cero en un tiempo  $T$  si para cada dato inicial  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , existe un control  $h \in L^2(Q_T)$  tal que la solución  $y$  del problema de Cauchy (1) es tal que

$$y(T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

**Observación 2.2** Por linealidad, es sencillo de ver que la controlabilidad a cero es equivalente a la controlabilidad por trayectorias, lo cual quiere decir que para todo dato inicial  $y_0 \in L^2(\Omega)$  y para cada trayectoria  $(\bar{y}, \bar{h})$ , i.e., verificando

$$\begin{cases} \partial_t \bar{y} - \Delta \bar{y} = \bar{h}1_\omega & \text{en } Q_T, \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \end{cases} \quad (2)$$

existe un control  $h \in L^2(Q_T)$  tal que

$$y(T) = \bar{y}(T).$$

De igual manera podemos pedirle a la solución que se acerque arbitrariamente a un estado prescrito: esta es la noción de controlabilidad aproximada.

**Definición 2.2** Diremos que la ecuación (1) es aproximadamente controlable en un tiempo  $T$ , si para cada dato inicial  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , cada dato final (u objetivo)  $y_f \in L^2(\Omega)$  y cada  $\epsilon > 0$ , existe un control  $h \in L^2(Q_T)$  tal que la solución  $y$  del problema de Cauchy (1) es tal que

$$\|y(T) - y_f(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

**Observación 2.3** Si bien no utilizaremos la definición recién introducida, este concepto es fundamental para estudiar la noción de continuación única ya vista en el marco de dimensión finita.

### 3. La ecuación del calor es controlable a cero en todo tiempo

El siguiente teorema es el resultado central de la teoría de controlabilidad a cero de las ecuaciones diferenciales de tipo parabólico.

**Teorema 3.1** Dado un tiempo arbitrario  $T > 0$ , la ecuación del calor (1) es controlable a cero en el tiempo  $t = T$ .

**Observación 3.1** El teorema 3.1 proviene del carácter parabólico de la ecuación del calor y más precisamente de la infinita velocidad de propagación de esta ecuación (ver por ejemplo el principio del máximo fuerte). Una acción via el control  $h$  localizado sobre  $\omega$  va a influenciar inmediatamente a la solución y sobre todo  $\Omega$ . Este tipo de resultados no se tiene para una ecuación de tipo transporte, por ejemplo, ya que estas ecuaciones en derivadas parciales tienen velocidad de propagación finita (ver la Sección 2.1, del Capítulo 2, del Libro [1] CORON, por ejemplo).

### 4. El método HUM

El objetivo de esta parte es mostrar mediante un argumento de dualidad la equivalencia entre el problema de controlabilidad a cero, que es un problema de sobrejectividad y una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto de (1). Adaptamos en dimensión infinita el argumento de la primera demostración del Teorema que enuncia la condición de Kalman.

Con este objetivo entre mano, comencemos por introducir el sistema adjunto: para cada  $\varphi_T \in L^2(\Omega)$ ,

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \Delta \varphi = 0 & \text{en } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \varphi(T) = \varphi_T & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Tenemos el siguiente resultado debido a Jacques-Louis Lions [3], [6], [4].

**Teorema 4.1** La ecuación (1) es controlable a cero en el tiempo  $t = T$ , si y solo si, existe una constante  $C > 0$ , tal que

$$\forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \quad \|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(t, x)|^2 dt dx \right)^{1/2}. \quad (4)$$

**Observación 4.1** La desigualdad (4) es llamada desigualdad de observabilidad. De igual manera, diremos que se observa  $\varphi$  en el tiempo  $t = 0$  para  $\varphi$  sobre  $\omega \times (0, T)$ .

Como hemos adelantado anteriormente, la demostración del teorema se basa en un argumento de dualidad.

**Demostración 4.1** Comencemos introduciendo dos aplicaciones:

$$\mathcal{F}_1 : y_0 \in L^2(\Omega) \mapsto y(T, \cdot) \in L^2(\Omega),$$

donde  $y$  es solución de (1) asociado con  $(y_0, h = 0)$ ,  $y$

$$\mathcal{F}_2 : h \in L^2(Q_T) \mapsto y(T, \cdot) \in L^2(\Omega),$$

donde  $y$  es solución de (1) asociado con  $(y_0 = 0, h)$ .

El punto clave de la demostración es el siguiente:

$$\left( \text{Controlabilidad a cero} \right) \Leftrightarrow \left( \text{Im}(\mathcal{F}_1) \subset \text{Im}(\mathcal{F}_2) \right). \quad (5)$$

Sin embargo, por un argumento de dualidad (ver Lema 2.48 del Libro CITAR LIBRO DE CORON) tenemos

$$\left( \text{Im}(\mathcal{F}_1) \subset \text{Im}(\mathcal{F}_2) \right) \Leftrightarrow \exists C > 0, \forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \|\mathcal{F}_1^*(\varphi_T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathcal{F}_2^*(\varphi_T)\|_{L^2(Q_T)}. \quad (6)$$

Utilizando la siguiente identidad

$$(y(T, \cdot), \varphi_T)_{L^2(\Omega)} - (y_0, \varphi(0, \cdot))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \int_{\Omega} h(t, x) 1_{\omega}(x) \varphi(t, x) dt dx$$

es posible calcular las adjuntas de estas dos aplicaciones, y así uno encuentra

$$\forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \quad \mathcal{F}_1^*(\varphi_T) = \varphi(0, \cdot) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2^*(\varphi_T) = \varphi 1_{\omega}. \quad (7)$$

Juntando (5), (6) y (7), concluimos la demostración del Teorema.

Por la misma prueba reemplazando (5) por

$$\left( \text{Controlabilidad aproximada} \right) \Leftrightarrow \left( \overline{\text{Im}(\mathcal{F}_2)} = L^2(\Omega) \right) \Leftrightarrow \left( \ker(\mathcal{F}_2^*) = \{0\} \right), \quad (8)$$

uno puede demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 4.2** La ecuación (1) es controlable aproximadamente en el tiempo  $t = T$ , si y solo si,

$$\forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \quad \left( \forall (t, x) \in (0, T) \times \omega, \varphi(t, x) = 0 \right) \Rightarrow (\varphi_T = 0). \quad (9)$$

**Observación 4.2** Si  $\varphi = 0$  sobre  $\omega \times (0, T)$ , entonces, para (4) se tiene  $\varphi(0, \cdot) = 0$  sobre  $\Omega$ , y por unicidad retrógrada de la ecuación del calor, uno tiene  $\varphi_T = 0$ . Es decir, la desigualdad (4) es la cuantificación del principio de continuación única (9).

**Observación 4.3** En el marco de dimensión finita, hemos visto que los conceptos de continuación única y desigualdad de observabilidad son equivalentes. En este nuevo contexto, usando (5) y (8), esto se traduciría en el hecho de que un subespacio vectorial  $F$  de un espacio vectorial de dimensión finita  $E$  es denso si y solo si  $F = E$ . Por supuesto, este ya no es el caso en la donde la dimensión es infinita: pues aquí  $F = \text{Im } \mathcal{F}_2$  y  $E = L^2(\omega)$ .

#### 4.1. Únicidad retrograda y analiticidad para la ecuación del calor

Consideremos por un momento la ecuación del calor libre:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 0 & \text{en } Q_T, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Disponemos del siguiente resultado de unicidad retrograda.

**Proposición 4.1** Sean  $y_0 \in L^2(\Omega)$  e  $y$  la única solución de (10). Entonces, tenemos

$$(y(T, \cdot) = 0) \Rightarrow (\forall t \in [0, T], y(t, \cdot) = 0).$$

Para una demostración de esta proposición recomendamos revisar el Capítulo 2, Sección 2.3, Teorema 11, del libro ... EVA 10

Por otro lado, disponemos del siguiente resultado de analiticidad.

**Proposición 4.2** Sean  $y_0 \in L^2(\Omega)$  e y la única solución de (10). Entonces, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $x \in \Omega$ , la función

$$x \rightarrow y(x, t),$$

es analítica.

Considerando estos resultados, podemos enunciar el siguiente corolario.

**Corolario 4.1** Para cada  $T > 0$ , la ecuación (1) es aproximadamente controlable en el tiempo  $t = T$ .

En efecto, la ecuación (9) se verifica gracias al hecho que la solución de la ecuación adjunta (3) se anula sobre el cilindro  $q_T$  y es idénticamente nula sobre el cilindro  $Q_T$  por analiticidad.

## Referencias

- [1] J.-M. CORON, *Control and nonlinearity*, no. 136, American Mathematical Soc., 2007.
- [2] X. GOURDON, *Les maths en tête, Analyse*, Second edition, ELLIPSES, 2008.
- [3] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302 (1986), pp. 471–475.
- [4] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*, Masson, Paris, 1988. *Contrôlabilité exacte. [Exact controllability]*, With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.
- [5] ———, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, vol. 9 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*, Masson, Paris, 1988. *Perturbations. [Perturbations]*.
- [6] ———, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, *SIAM Rev.*, 30 (1988), pp. 1–68.
- [7] D. L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, *Siam Review*, 20 (1978), pp. 639–739.
- [8] E. ZUAZUA, *Las matemáticas del control*, in *De la aritmética al análisis: historia y desarrollos recientes en matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, pp. 245–318.
- [9] ———, *Controllability of partial differential equations*, *Optimization and Control*, 2006.