Lección n°1: Breve introducción a los espacios de Sobolev

ESPOL, 2021

Índice

1. Regularizadores **1**

2. Espacios de Sobolev unidimensionales **3**
2.1. Espacio $W^{1,p}(I)$ 3
2.2. Operador de extensión 4
2.3. Espacio $W^{m,p}(I)$ 8
2.4. Espacio $W_0^{1,p}(I)$ 9

3. Espacios de Sobolev en dimensión mayor **9**
3.1. Espacio $W^{1,p}(\Omega)$ 9
3.2. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ 10

En esta lección daremos una introducción rápida a los espacios de Sobolev de dimensión uno y de dimensión mayor. Además, presentaremos algunos resultados de densidad, haciendo uso de dos herramientas clásicas del análisis funcional como son los regularizadores (introducidos por J. Leray y K. Friedrichs) y el operador de extensión.

1. Regularizadores

Para estudiar las propiedades más avanzadas o complejas de los espacios de Sobolev se necesitan desarrollar ciertas herramientas que sirven para aproximar una función en un espacio de Sobolev mediante el uso de funciones suaves. El método de regularización nos da la posibilidad para lograr esto.

Definición 1.1 *Sea $N \in \mathbb{N}$. Una sucesión de* ***regularizadores*** *(o sucesión regularizante) $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B(0,1/n)},\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1,\ \rho_n \geq 0, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De manera general, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2 *Una sucesión regularizante es una familia $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tal que*

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq \overline{B(0,\varepsilon)},\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon = 1,\ \rho_\varepsilon \geq 0, \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0.$$

Notación: Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto abierto, $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en U. Estas funciones son conocidas como **funciones test**.

Proposición 1.1 *Si $f \in C(\mathbb{R}^N)$ entonces $\rho_n * f \to f$ uniformemente cuando $n \to +\infty$ sobre cualquier compacto de $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in C(\mathbb{R}^N)$, $f|_K$ es continua y dado que K es compacto, f es uniformemente continua en K, así existe $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ tal que si

$$|x - u| < \delta,$$

entonces

$$|f(x) - f(u)| < \varepsilon$$

para todo $x, u \in K$. Si consideramos $u = x - y$, obtenemos

$$|f(x) - f(x - y)| < \varepsilon$$

para todo $x \in K$ y para todo $y \in B(0, \delta)$ (pues $|x - x + y| = |y| < \delta$). Ahora, para todo $x \in K$, tenemos

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) f(x - y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x - y) - f(x)] \rho_n(y)\, dy.\end{aligned}$$

Si consideramos $n > 1/\delta$ y estimando superiormente la diferencia (o también se puede utilizar desigualdad de Hölder), para $x \in K$, obtenemos

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) - f(x)||\rho_n(y)|\, dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\rho_n * f \to f$ uniformemente cuando $n \to +\infty$ en K.

■

Ahora, modificaremos este resultado para tener convergencia en los espacios de Lebesgue para el caso $p \in [1, +\infty[$ mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.1 *Supongamos que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $p \in [1, +\infty[$. Entonces $\rho_n * f \to f$ cuando $n \to +\infty$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como el espacio $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1, +\infty[$, se tiene la existencia de una función $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon/4. \tag{1}$$

Por la Proposición 1.1 tenemos que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente cuando $n \to +\infty$ sobre cualquier compacto de $\mathbb{R}^N$. Por otra parte,

$$\operatorname{supp}(\rho_n * f_1) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(\rho_n) + \operatorname{supp}(f_1)} \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp}(f_1) \subseteq \overline{B(0, 1)} + \operatorname{supp}(f_1).$$

Así, cuando $n \to +\infty$, obtenemos

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |(\rho_n * f_1)(x) - f_1(x)|^p\, dx = \int_{\overline{B(0,1)} + \operatorname{supp}(f_1)} |(\rho_n * f_1)(x) - f_1(x)|^p\, dx \to 0.$$

Finalmente, escribimos

$$(\rho_n * f) - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [(\rho_n * f_1) - f_1] + [f_1 - f],$$

utilizando la desigualdad triangular, la desigualdad de Young para la convolución, el hecho de que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$ y (1), obtenemos

$$\begin{aligned}\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} &\leq \|\rho_n * (f - f_1)\|_{L^p} + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f\|_{L^p} \\ &\leq \|\rho_n\|_{L^1} \|f - f_1\|_{L^p} + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f\|_{L^p} \\ &= \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} + 2\|f_1 - f\|_{L^p} \\ &< \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} + \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Como $\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} < \varepsilon/2.$$

Por lo tanto, para todo $n > N$, obtenemos

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} < \varepsilon,$$

es decir, $\rho_n * f \to f$ cuando $n \to +\infty$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

■

2. Espacios de Sobolev unidimensionales

Los espacios de Sobolev son comúnmente utilizados en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), puesto que nos permiten aplicar resultados de análisis funcional con el objetivo de obtener información importante sobre las EDPs. La idea principal en este proceso se basa en expresar las EDPs en términos de operadores que actúan sobre espacios lineales apropiados. Por ejemplo, podemos considerar el operador

$$A : X \to Y$$

donde A denota un operador que se encarga de codificar la estructura de una ecuación diferencial parcial (incluyendo posibles condiciones de frontera), y X, Y son espacios funcionales. El problema principal en este estudio recae en la identificación y obtención correcta de estos espacios X, Y y del operador A. Los espacios de Sobolev están diseñados precisamente para solventar este inconveniente, y estos espacios son usualmente los indicados para X, Y.
En nuestro caso consideraremos los espacios de Sobolev para estudiar un problema de **energía de Dirichlet**, el cual es un caso particular de una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico.

2.1. Espacio $W^{1,p}(I)$

Consideremos el intervalo $I =]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $p \in [1, +\infty]$.

Definición 2.1 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ se define como*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \text{existe } g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I) \right\}.$$

Entonces, para $u \in W^{1,p}(I)$ se tiene la notación $u' = g$ la cual es conocida como la **derivada débil** de la función u. Esta definición motiva las siguientes observaciones.

Observación 2.1 *Cabe recalcar que la función g antes mencionada es única c.t.p., es decir, si existe otra función $h \in L^p(I)$ que cumpla la misma condición que g, entonces $h = g$ c.t.p.*

Observación 2.2 *También se puede considerar $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ en lugar de $\mathcal{C}_c^1(I)$ puesto que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, entonces $\rho_n * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ para n suficientemente grande y $\rho_n * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{C}^1$.*

Por otro lado, denotamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Notación: Es importante notar que el espacio $W^{1,p}(I)$ está equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}$$

para $p \in]1, \infty[$ y tenemos la norma equivalente $\|u\|_{W^{1,p}(I)}^p = \|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p}^p$. Sobre $H^1(I)$ definimos el siguiente producto escalar, con el cual este se vuelve un espacio de Hilbert,

$$(u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)} = \int_a^b (uv + u'v')$$

y además, cuenta con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(I)}^2 = \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

2.2. Operador de extensión

Ciertas operaciones básicas tienen sentido solo para funciones definidas sobre todo $\mathbb{R}$ (por ejemplo la convolución y la transformada de Fourier). Por esta razón, es útil tener una herramienta que nos permita extender una función $u \in W^{1,p}(I)$ a una función $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Esta herramienta será presentada a través de un teorema, para cuya demostración necesitamos introducir los siguientes lemas.

Lema 2.1 *Sea $g \in L^1_{loc}(I)$; para $y_0 \in I$ fijo y $x \in I$ denotamos*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Entonces $v \in C(I)$ y para todo $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi.$$

Demostración. Consideremos $I =]a,b[$. Entonces, por el teorema de Fubini, el teorema fundamental del cálculo y dado que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_I v(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_I \left(\int_{y_0}^{x} g(t)\, dt \right) \varphi'(x)\, dx = -\int_a^{y_0} \left(\int_x^{y_0} g(t)\, dt \right) \varphi'(x)\, dx + \int_{y_0}^{b} \left(\int_{y_0}^{x} g(t)\, dt \right) \varphi'(x)\, dx \\
&= -\int_a^{y_0} \int_a^{t} g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt + \int_{y_0}^{b} \int_t^{b} g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)(\varphi(t) - \varphi(a))\, dt + \int_{y_0}^{b} g(t)(\varphi(b) - \varphi(t))\, dt \\
&= -\int_I g(t)\varphi(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que v es continua. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ cuando $n \to +\infty$. Entonces

$$|v(x_n) - v(x)| = \left| \int_{y_0}^{x_n} g(t)\, dt - \int_{y_0}^{x} g(t)\, dt \right| = \left| \int_x^{x_n} g(t)\, dt \right|.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia x para n suficientemente grande, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, de esta manera tomamos el conjunto compacto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ y consideramos el intervalo $K = [\alpha, \beta]$, con $\alpha = \text{mín}(A)$ y $\beta = \text{máx}(A)$. Así

$$\int_x^{x_n} g(t)\, dt = \int_K g_n(t)\, dt$$

con $g_n(t) := g(t)\mathbb{1}_{[\text{mín}\{x_n,x\},\text{máx}\{x_n,x\}]}(t)$, para $t \in [x, x_n]$. Por ende $|g_n(t)| \leq g|_K(t)$ y $g|_K \in L^1(I)$ pues $g \in L^1_{loc}(I)$, y además $g_n(t) \to 0$ para n suficientemente grande. Finalmente, por el teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$\int_x^{x_n} g(t)\, dt \to 0$$

para n suficientemente grande. Es decir,

$$|v(x_n) - v(x)| \to 0$$

y así v es continua.

■

Observación 2.3 *El anterior lema muestra que la primitiva v de la función $g \in L^p$ pertenece a $W^{1,p}$ siempre y cuando tengamos que $v \in L^p$, lo cual siempre se tiene cuando I es acotado.*

Lema 2.2 *Sea* $I =]0,1[$ *y sean* $u \in W^{1,p}(I)$ *y* $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *con* $\eta \in [0,1]$. *Entonces*

$$(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}' \quad y \quad \eta\tilde{u} \in W^{1,p}(]0,+\infty[)$$

con

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad 0 < x < 1, \\ 0 & si \quad x > 1, \end{cases}$$

para todo $x \in]0,1[$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0,+\infty[)$, entonces

$$\int_0^{+\infty} \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u\left[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi\right] = -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi = -\int_0^{+\infty} (\tilde{u'}\eta + \tilde{u}\eta')\varphi,$$

puesto que $\eta\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0,1[)$. Así $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(]0,+\infty[)$ y $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'$.

■

Teorema 2.1 *Sea* $p \in [1,+\infty]$. *Existe un operador lineal y acotado* $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$, *llamado* ***operador de extensión****, tal que para* $u \in W^{1,p}(I)$ *se satisface:*

(i) $(Pu)|_I = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$,

donde C *es una constante positiva que depende solamente de* $|I| \leq +\infty$.

Observación 2.4 *En el enunciado del teorema anterior es posible tomar* $C = 4$ *en* (ii) *y* $C = 4\left(1 + \frac{1}{|I|}\right)$ *en* (iii).

Demostración del teorema 2.1 Supongamos que $I =]0,+\infty[$ y, para $x \in I$, definamos la extensión por reflexión

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \geq 0, \\ u(-x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Así, tenemos la desigualdad siguiente,

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u^*(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^0 |u(-x)|^p\, dx + \int_0^{+\infty} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\ &= \left(2\int_0^{+\infty} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = 2^{1/p}\|u\|_{L^p(I)} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, consideremos la función

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -u'(-x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Claramente $v \in L^p(\mathbb{R})$ y

$$u^*(x) - u^*(0) = \int_0^x v(t)\, dt.$$

En efecto, si $x \geq 0$, tenemos

$$\int_0^x v(t)\, dt = \int_0^x u'(t)\, dt = u(x) - u(0) = u^*(x) - u^*(0)$$

y si $x < 0$, tenemos

$$\int_0^x v(t)\, dt = \int_0^x -u'(-t)\, dt = \int_0^{-x} u'(t)\, dt = u(-x) - u(0) = u^*(x) - u^*(0).$$

Así, por la Observación 2.3, $(u^*)' = v$, $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y procediendo de igual manera que en los cálculos anteriores, tenemos

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u'\|_{L^p(I)}. \tag{3}$$

Entonces, por (2) y (3), obtenemos

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(u^*)'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} + 2\|u'\|_{L^p(I)} = 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Ahora supongamos que $I =]0,1[$. Consideremos la función $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con $\eta \in [0,1]$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1/4, \\ 0 & \text{si} \quad x > 3/4. \end{cases}$$

Esta función está bien definida gracias al lema $\mathcal{C}^\infty$ de Urysohn aplicado al compacto $\overline{B(0,1/4)}$ y al abierto $B(0,3/4)$. Sea $u \in W^{1,p}(I)$, consideremos $u = \eta u + (1-\eta)u$. Por el Lema 2.2, la función ηu se extiende a $]0,+\infty[$ mediante la función $\eta\tilde{u}$ y luego se extiende a $\mathbb{R}$ por reflexión. De esta forma obtenemos una función $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que extiende a ηu y tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|\eta\tilde{u}\|_{L^p(]0,+\infty[)} = 2\left(\int_0^\infty |\eta\tilde{u}|^p\right)^{1/p} = 2\left(\int_0^1 |\eta u|^p\right)^{1/p} \leq 2\left(\int_0^1 |u|^p\right)^{1/p} = 2\|u\|_{L^p(I)}.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &\leq 2\|\eta\tilde{u}\|_{W^{1,p}(]0,+\infty[)} = 2\left[\left(\int_0^\infty |\eta\tilde{u}|^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty |(\eta\tilde{u})'|^p\right)^{1/p}\right] \\
&= 2\left[\left(\int_0^1 |\eta\tilde{u}|^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty |\eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u'}|^p\right)^{1/p}\right] = 2\left[\left(\int_0^1 |\eta u|^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |\eta' u + \eta u'|^p\right)^{1/p}\right] \\
&= 2\left(\|\eta u\|_{L^p(I)} + \|\eta' u + \eta u'\|_{L^p(I)}\right) \leq 2\left(\|\eta u\|_{L^p(I)} + \|\eta' u\|_{L^p(I)} + \|\eta u'\|_{L^p(I)}\right) \\
&\leq 2\left(\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}\right) \\
&\leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}
\end{aligned}$$

con $C = 2(1 + \|\eta'\|_{L^\infty(I)})$. Ahora, aplicamos el mismo procedimiento para la función $(1-\eta)u$, la extendemos al intervalo $]-\infty,1[$ por 0 sobre $]-\infty,0[$ y luego la extendemos a $\mathbb{R}$ por reflexión alrededor de 1. De esta manera obtenemos una función $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que extiende a $(1-\eta)u$; y razonando de igual forma, obtenemos

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} \quad \text{y} \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Para finalizar la demostración definimos $Pu = v_1 + v_2$ que satisface las condiciones del teorema.

■

Lema 2.3 *Sean $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ y $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $p \in [1,+\infty]$. Entonces $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho * v)' = \rho * v'$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que ρ tiene soporte compacto. Por la desigualdad de Young $\rho * v \in L^p(\mathbb{R})$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, entonces[1]

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho * v)\varphi' = \int_{\mathbb{R}} v(\check{\rho} * \varphi') = \int_{\mathbb{R}} v(\check{\rho} * \varphi)' = -\int_{\mathbb{R}} v'(\check{\rho} * \varphi) = -\int_{\mathbb{R}} (\rho * v)\varphi.$$

Así $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho * v)' = \rho * v'$.
Si ρ no tiene soporte compacto, consideramos una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R})$. Por lo anterior, tenemos que $\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho_n * v)' = \rho_n * v'$. Pero $\rho_n * v \to \rho * v$ en $L^p(\mathbb{R})$ y $\rho_n * v' \to \rho * v'$ en $L^p(\mathbb{R})$. Así concluimos que $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ y $(\rho * v)' = \rho * v'$.

■

Haciendo uso del Teorema 2.1 y el lema anterior, podemos presentar el siguiente resultado de densidad.

[1] Recordemos la notación siguiente: dada una función f sobre $\mathbb{R}^N$, establecemos $\check{f}(x) = f(-x)$.

Teorema 2.2 (Densidad) *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $p \in [1, +\infty[$. Entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ en $W^{1,p}(I)$.*

Demostración. Supongamos que $I = \mathbb{R}$. Caso contrario podemos extender el resultado mediante una función $u^* = Pu$ haciendo uso del Teorema 2.1 donde P es el operador de extensión. Ahora utilizaremos las técnicas básicas de convolución mediante el uso del Lema 2.3 (que hace que las funciones sean $\mathcal{C}^\infty$) y funciones de corte (o también conocidas como funciones cut-off, las cuales nos permiten obtener un soporte compacto).

Comencemos fijando una función $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\zeta \in [0, 1]$ y

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Definamos la sucesión $\zeta_n(x) = \zeta(x/n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y consideremos una función $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in [1, +\infty[$. Entonces $\zeta_n f \to f$ en $L^p(\mathbb{R})$. En efecto, bastaría probar que $\zeta_n(x) \to 1$ para $x \in \mathbb{R}$. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$. Tenemos que, si $n \geq n_0$, $\zeta_n(x) = \zeta(x/n)$ pero $|x/n| \leq |x/n_0| < 1$, de donde $\zeta_n(x) = 1$ para todo $n \geq n_0$, y así $\zeta_n(x) \to 1$. Por otro lado, tenemos que

$$|\zeta_n f(x)| = |\zeta_n(x)||f(x)| \leq |f(x)| \text{ y } f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Así, por el teorema de convergencia dominada $\zeta_n f \to f$ en $L^p(\mathbb{R})$.
Ahora, si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regularizante. Afirmamos que la sucesión $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ converge hacia u en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Primero, escribimos

$$u_n - u = \zeta_n((\rho_n * u) - u) + (\zeta_n u - u)$$

y así, cuando $n \to +\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|\zeta_n(\rho_n * u) - \zeta_n u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.3, tenemos

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u').$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \||\zeta_n(\rho_n * u') - \zeta_n u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |\zeta_n'(\rho_n * u)(x)|^p \, dx = \frac{1}{n^p} \int_{\mathbb{R}} |\zeta'(x/n)(\rho_n * u)(x)|^p \, dx \\ &\leq \frac{1}{n^p} \|\zeta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p \int_{\mathbb{R}} |(\rho_n * u)(x)|^p \, dx = \frac{1}{n^p} \|\zeta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p \|\rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \end{aligned}$$

puesto que $\zeta_n'(x) = \frac{1}{n}\zeta'(x/n)$. Así, haciendo $n \to +\infty$, obtenemos

$$\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\|\zeta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{n} \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0.$$

Finalmente, haciendo $n \to +\infty$, tenemos

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0.$$

Lo que concluye la demostración. ■

2.3. Espacio $W^{m,p}(I)$

Consideremos un entero $m \geq 2$, el intervalo $I =]a,b[$ y $p \in [1,+\infty]$. Tomando en cuenta la anterior definición dada para el espacio $W^{1,p}(I)$, tenemos la siguiente definición por inducción.

Definición 2.2 *El espacio de Sobolev $W^{m,p}(I)$ se define como*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

En este caso denotamos $H^m(I) = W^{m,2}(I)$.

La anterior definición motiva la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *La función u pertenece al espacio $W^{m,p}(I)$ si y solamente si existen funciones $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tales que, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ y para todo $j = 1, \ldots, m$,*

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi.$$

Demostración. Supongamos que $u \in W^{m,p}(I)$. Para $m = 1$ tenemos directamente la Definición 2.1. Ahora supongamos que el resultado es válido para el caso $m-1$ y demostremos que se cumple para el caso m. Como $u \in W^{m,p}(I)$, por la Definición 2.2, tenemos que $u \in W^{m-1,p}(I)$ y $u' \in W^{m-1,p}(I)$, es decir, existen funciones $g_1, \ldots, g_{m-1} \in L^p(I)$ y $h_1, \ldots, h_{m-1} \in L^p(I)$ tales que para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ y $j = 1, \ldots, m-1$, se tiene

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi \quad \text{y} \quad \int_I u' D^j \varphi = (-1)^j \int_I h_j \varphi.$$

Ahora, notemos que para $j = 1$ y para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, tenemos

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g_1 \varphi,$$

de donde $u' = g_1$. Así, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ y $j = 1, \ldots, m-1$,

$$\int_I g_1 D^j \varphi = (-1)^j \int_I h_j \varphi.$$

Entonces para $j = 1$ y para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, obtenemos

$$\int_I g_1 \varphi' = -\int_I h_1 \varphi$$

es decir, $g_1' = h_1$. Procediendo de forma análoga para todo $j = 1, \ldots, m-1$, obtenemos $g_j' = h_j$. Por lo tanto, $g_1, h_1, \ldots, h_{m-1}$ son las m funciones que requiere u.

Recíprocamente, existen $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tales que para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ y $j = 1, \ldots, m$, tenemos

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi.$$

En particular, esta igualdad se verifica para $g_1, \ldots, g_{m-1}$ de donde obtenemos que $u \in W^{m-1,p}$. Además, se verifica

$$\int_I u D^j \varphi = -\int_I u' D^{j-1} \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi$$

es decir, para todo $j = 1, \ldots, m$

$$\int_I u' D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_{j+1} \varphi.$$

Por lo tanto $u' \in W^{m-1,p}(I)$, y así $u \in W^{m,p}(I)$.

■

Notación: El espacio $W^{m,p}(I)$ está equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(I)}$$

y el espacio de Hilbert $H^m(I)$ está equipado con el producto escalar

$$(u,v)_{H^m(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(I)} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_I D^\alpha u D^\alpha v.$$

2.4. Espacio $W_0^{1,p}(I)$

Definición 2.3 *Sea $p \in [1,+\infty[$. Se denota por $W_0^{1,p}(I)$ a la clausura de $\mathcal{C}_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$, y para $p=2$ tenemos*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

El espacio $W_0^{1,p}(I)$ está equipado con la norma de $W^{1,p}(I)$, y el espacio $H_0^1(I)$ está equipado con el producto escalar de $H^1(I)$.

Proposición 2.2 *El espacio $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ es denso en el espacio $W_0^{1,p}(I)$ para todo $p \in [1,+\infty[$.*

Demostración. Como el espacio $W_0^{1,p}(I)$ es la clausura de $\mathcal{C}_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$, basta probar que $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ es denso en $\mathcal{C}_c^1(I)$ con la norma de $W^{1,p}(I)$.
Sean $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regularizante, y consideremos $\varphi_n = \rho_n * \varphi$. Es fácil ver que, para n suficientemente grande, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq I$. En efecto, tenemos

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) = \overline{\operatorname{supp}(\rho_n) + \operatorname{supp}(\varphi)} \subseteq \overline{B(0,1/n)} + \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq I.$$

Además, por el Teorema 2.2 tenemos que $\varphi_n \to \varphi$ en $L^p(I)$ y $\varphi_n' \to \varphi'$ en $L^p(I)$. Por lo tanto, $\varphi_n \to \varphi$ en $W^{1,p}(I)$.

■

3. Espacios de Sobolev en dimensión mayor

Sean $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $p \in \mathbb{R}$ con $p \in [1,+\infty]$. Como en la sección anterior, definamos los espacios de Sobolev para el caso en que consideremos una sola derivada.

3.1. Espacio $W^{1,p}(\Omega)$

Definición 3.1 *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \text{existen } g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tales que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I),\ i = 1,\dots,N \Big\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ y, como en el caso de dimensión 1, las llamaremos derivadas parciales débiles de u con respecto a la variable x_i, para todo $i = 1,\dots,N$. Además, definimos el gradiente de u como

$$\nabla u = \operatorname{grad}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Observación 3.1 *De igual manera que en el caso unidimensional, cabe recalcar que las funciones g_i, para todo $i = 1, \ldots, N$, antes mencionadas son únicas c.t.p.*

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

o de forma equivalente, para $p \in [1, +\infty[$, tenemos la norma

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)}$$

y para $p = +\infty$, tenemos

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ldots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

Si $p = 2$, se escribe $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ dotado con el producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La norma asociada al espacio $H^1(\Omega)$ es

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Además, se define la norma del gradiente de la función u como

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

y así obtenemos una escritura equivalente para la norma asociada al espacio $H^1(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Observación 3.2 *Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia algún límite en $(L^p(\Omega))^N$. Entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.*

3.2. El espacio $W^{1,p}_0(\Omega)$

Definición 3.2 *Sea $p \in [1, +\infty[$. El espacio $W^{1,p}_0(\Omega)$ denota la clausura de $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Para $p = 2$ escribimos $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$.

La demostración de la siguiente proposición se sigue de manera similar a las ideas presentadas en la demostración de la Proposición 2.2.

Proposición 3.1 *El espacio $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ es denso en el espacio $W^{1,p}_0(\Omega)$ para todo $p \in [1, +\infty[$.*