Lección n°2: Ecuaciones diferenciales parciales elípticas y principio del máximo débil ESPOL, 2021

Índice

Un aspecto importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera es la posibilidad de extender la noción de restricción de una función al borde de un dominio en los espacios de Sobolev, esto se realiza mediante la definición del operador de traza. Consideremos el conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, la frontera de U la denotaremos por ∂U y asumiremos que es de clase $\mathcal{C}^1$ o suficientemente regular de ser el caso.

1. Definición de traza y de función armónica

Si $u \in C(\bar{U})$, podemos ver claramente que esta función tiene valores en la frontera ∂U en el sentido usual. El problema radica en que una función $u \in W^{1,p}(U)$ para $1 \leq p < +\infty$ no es en general continua, y peor aún dicha función puede ser definida solamente casi todo punto en U. Además, como ∂U es de medida de Lebesgue nula, no hay un significado directo que podamos darle a la expresión "u restringida a ∂U". Sin embargo, la noción de traza resuelve este problema.

Por medio del siguiente teorema introduciremos la definición de traza para $1 \leq p < +\infty$. En este minicurso trabajaremos solamente el caso $p = 2$.

Teorema 1 *Asumamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y ∂U es de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

tal que:

(i) *$Tu = u|_{\partial U}$ si $W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$, y*

(ii) *$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, para cada $u \in W^{1,p}(U)$, con la constante $C > 0$ dependiendo solamente de p y U.*

Definición 1 *T se conoce como el* ***operador de traza*** *y a Tu lo llamaremos la traza de u sobre ∂U.*

Notación: a la traza de la función u sobre ∂U se la puede notar como $\mathrm{tr}_{\partial U}\, u$ en lugar de Tu.

Uno de los operadores diferenciales más importantes es el operador Laplaciano Δ sobre $\mathbb{R}^n$ definido como

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}^2 u = \mathrm{div}\,(\nabla u).$$

A partir de este operador podemos dar a conocer la definición de función armónica.

Definición 2 *Una función u de clase $\mathcal{C}^2$ definida sobre un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es* ***armónica*** *si es solución de la ecuación de Laplace*

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in U.$$

2. Ecuaciones elípticas de segundo orden

En este minicurso trabajaremos con ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico, sujetas a condiciones de frontera. Para dar una introducción a este tipo de ecuaciones consideremos el problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U. \end{cases} \tag{1}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y acotado, $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ es una función desconocida tal que $u = u(x)$, $f : U \to \mathbb{R}$ es una función dada y L denota el **operador diferencial parcial de segundo orden** definido como

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{2}$$

o como

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{3}$$

para coeficientes dados a^{ij}, b^i, c de clase $\mathcal{C}^1$, y asumiremos la condición de simetría $a^{ij} = a^{ji}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Es importante recalcar la siguiente notación con respecto a las derivadas parciales.

Notación:

$$u_{x_i} = \partial_i u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad u_{x_i x_j} = \partial^2_{ij} u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

La condición $u = 0$ sobre ∂U en el problema (1) es llamada **condición de frontera de tipo Dirichlet homogénea**.

Diremos que la ecuación $Lu = f$ está en la **forma de divergencia** si L está dada en la forma (2), es decir,

$$Lu = -\text{div}\,(A(x)\nabla u(x)) + \mathbf{b} \cdot \nabla u(x) + cu(x),$$

donde $A(x) = ((a^{ij}(x)))$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ representa una matriz simétrica cuadrada con coeficientes acotados y $\mathbf{b} = (b^i(x))$ para todo $i = 1, \ldots, n$ representa un vector n-dimensional. Por otro lado, diremos que la EDP $Lu = f$ está en la **forma de no divergencia** si L está dada en la forma (3). La forma de divergencia es más útil al momento de utilizar métodos de energía, basados en integración por partes, y la forma de no divergencia es mas apropiada para las técnicas de principio del máximo.

Definición 3 *Diremos que el operador diferencial parcial L es (uniformemente)* ***elíptico*** *si existe una constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{4}$$

para casi todo punto $x \in U$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Esta condición de elipticidad es equivalente a decir que la matriz $A(x)$ es definida positiva y que su valor propio más pequeño es mayor o igual que $\theta > 0$.

Como una interpretación física de este tipo de ecuaciones elípticas de segundo orden, tenemos que el término de segundo orden $D^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i x_j}$ representa la difusión de u dentro de U, el término de primer orden $\mathbf{b} \cdot Du = \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$, donde $\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, representa transporte dentro de U, y el término de orden 0, cu, representa el aumento y la disminución de una cantidad o sustancia.

2.1. Tres ejemplos clásicos

A continuación vamos a presentar tres ecuaciones elípticas de segundo orden clásicas que son muy estudiadas en la actualidad.

1. Si consideramos $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$ y $c = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ tenemos que el operador elíptico L es el **operador Laplaciano**:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U, \end{cases}$$

Este operador tiene una amplia variedad de contextos físicos. En un interpretación típica, el Laplaciano puede representar el potencial de una densidad de carga o el potencial de la fuerza gravitacional.

2. Como en el ejemplo anterior, consideremos $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$ y $c = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$ de manera que obtenemos la **ecuación de Poisson**:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial U. \end{cases}$$

En el caso $n = 3$, f representa una densidad de carga eléctrica presente en U, entonces $-u$ representa el potencial eléctrico en U cuando ∂U tiene ciertas propiedades de conductividad.
Cuando $n = 2$, se tiene una ecuación de membrana elástica. En este caso, f representa una densidad volumínica de fuerzas y u representa el desplazamiento vertical de una membrana que ocupa la posición $\bar{U}$ en reposo. La condición de frontera $u = 0$ sobre ∂U significa que la membrana esta en reposo sobre el borde del dominio.

3. Las ecuaciones de Stokes son ecuaciones de la mecánica de fluidos que rigen el flujo de un fluido viscoso incompresible que ocupa un volumen $U \subset \mathbb{R}^3$ en reposo. Si $f : U \to \mathbb{R}^3$ denota una densidad volumínica de fuerzas que actúan sobre el fluido, buscamos la velocidad del fluido $v : U \to \mathbb{R}^3$ y la presión $p : U \to \mathbb{R}$ de manera que se obtiene un **sistema de Stokes**:

$$\begin{cases} -\mu \Delta v = \nabla p + f & \text{en } U, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{en } U, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial U. \end{cases}$$

el parámetro μ denota la viscosidad dinámica del fluido y la segunda ecuación se traduce como la incompresibilidad del fluido.

3. Principio del máximo débil

En esta sección estudiaremos el principio del máximo débil para las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. Los métodos del principio de máximo están basados en la observación que si una función $\mathcal{C}^2$ alcanza su máximo sobre un abierto U en un punto $x_0 \in U$, entonces

$$Du(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad D^2u(x_0) \leq 0,$$

la última desigualdad nos dice que la matriz simétrica $D^2 u = ((u_{x_i x_j}))$ no es definida positivada en x_0.
Como vimos en la anterior sección, consideraremos los operadores elípticos L en su forma de no divergencia

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{k} b^i u_{x_i} + cu \tag{5}$$

donde los coeficientes a^{ij}, b^i, c son continuos, y además se cumple la condición de elipticidad detallada en la Definición 3. También asumiremos la condición de simetría $a^{ij} = a^{ji}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

En este minicurso nos encargaremos de estudiar solamente el principio del máximo débil que se encarga de identificar circunstancias bajo las cuales una función debe alcanzar su máximo (o mínimo) en la frontera. Asumiremos siempre que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado.

Teorema 2 (Principio del máximo débil) *Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap C(\bar{U})$ y el coeficiente $c \equiv 0$ en U. Tenemos los siguientes resultados:*

(i) *si*

$$Lu \leq 0 \quad \text{en } U \tag{6}$$

entonces

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) *si*

$$Lu \geq 0 \quad \text{en } U \tag{7}$$

entonces

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

Observación 1 *Una función que satisface (6) se llama* ***subsolución****, y junto con este resultado se demuestra que una subsolución alcanza su máximo en ∂U. De manera análoga, una función que satisface (7) se llama* ***supersolución****, y junto con este resultado se muestra que dicha supersolución alcanza su mínimo en ∂U.*

Demostración del teorema 2. En primer lugar supongamos que tenemos la desigualdad estricta

$$Lu < 0 \quad \text{en } U \tag{8}$$

y consideremos un punto $x_0 \in U$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u.$$

Entonces, tenemos las condiciones

$$Du(x_0) = 0 \tag{9}$$

y

$$D^2u(x_0) \leq 0. \tag{10}$$

Por la condición de simetría, como la matriz $A = ((a^{ij}(x_0)))$ es simétrica y definida positiva, existe una matriz ortogonal $O = ((o_{ij}))$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, tal que

$$OAO^T = \operatorname{diag}(d_1, d_2 \dots, d_n), \quad OO^T = I \tag{11}$$

con $d_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Ahora, consideremos $y = x_0 + O(x - x_0)$, por lo que $x - x_0 = O^T(y - x_0)$ y así

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} o_{ki} \quad \text{y} \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. Por lo tanto, del término de segundo orden del operador elíptico (5) en el punto x_0, obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} a^{ij} u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} = \sum_{k=1}^{n} d_k u_{y_k y_k} \leq 0, \tag{12}$$

donde hemos utilizado (11) con $d_k > 0$ y por (10) tenemos que $u_{y_k y_k} \leq 0$, para todo $k = 1, \dots, n$. Así, en el punto x_0, por (9) y (12) se obtiene

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{k} b^i u_{x_i} \geq 0,$$

pero por (8) $Lu < 0$ en U, lo que es una contradicción.

Ahora trataremos el caso general, es decir supongamos que $Lu \leq 0$ en U. Consideremos, para todo $x \in U$, la función $u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$ con constantes $\lambda, \varepsilon > 0$. Por la condición de elipticidad tenemos que $a^{ii} \geq \theta$ (basta considerar $\xi = e_n = (0, \dots, 0, 1)$), con $\theta > 0$ una constante, $x \in U$ y para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces, en U, tenemos

$$Lu^\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) \leq -\lambda^2 a^{11} \varepsilon e^{\lambda x_1} + \lambda b^1 \varepsilon e^{\lambda x_1} = \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1) \leq \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 \theta + \lambda \|b\|_{L^\infty(U)}) < 0$$

con $\lambda > 0$ suficientemente grande. Así, por lo hecho anteriormente

$$\max_{\bar{U}} u^\varepsilon = \max_{\partial U} u^\varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos (i).

Para demostrar (ii) basta remarcar que $-u$ es una subsolución cuando u es supersolución y se sigue directamente de (i) (puesto que $-\min = \max$).

$\blacksquare$

Ahora modificaremos el principio del máximo débil para considerar también el uso del coeficiente c. Pero primero recordemos una notación básica.

Notación: $u^+ = \max(u, 0)$ y $u^- = -\min(u, 0)$.

Teorema 3 (principio del máximo débil para $c \geq 0$) *Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap C(\bar{U})$ y el coeficiente $c \geq 0$ en U. Tenemos los siguientes resultados:*

(i) *si*

$$Lu \leq 0 \quad \text{en } U$$

entonces

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+.$$

(ii) *si*

$$Lu \geq 0 \quad \text{en } U$$

entonces

$$\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-.$$

Observación 2 *En particular, si $Lu = 0$ en U, entonces*

$$\max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|.$$

Demostración del teorema 3. Sea u una subsolución (es decir $Lu \leq 0$ en U) y consideremos el conjunto $V := \{x \in U : u(x) > 0\}$. Entonces, como $Lu \leq 0$ en U, tenemos

$$Ku := Lu - cu \leq -cu \leq 0 \quad \text{en } V.$$

Notemos que el operador K no incluye el término de orden cero con coeficiente c y por ende, por el Teorema 2, obtenemos

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial U} u^+$$

lo que concluye (i) para el caso $V \neq \emptyset$. Caso contrario $u \leq 0$ y por lo tanto también se obtiene (i).

Para demostrar (ii) consideramos $-u$ en la demostración de (i) y tomamos en cuenta que $(-u)^+ = u^-$.

$\blacksquare$