Lección n°3: Grado de Brouwer

ESPOL, 2021

Índice

1. Introducción a la teoría del grado topológico

La teoría del grado tiene una larga historia que consiste en una sucesión de generalizaciones. Presumiblemente, la noción más antigua es el grado de una aplicación u (suave o regular) de $\mathbb{S}^1$ a valores en $\mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ es el círculo unitario). El grado topológico de una aplicación, también llamado grado de Brouwer o "winding number", se encarga de contar el número de veces que u recubre su recorrido teniendo en cuenta su multiplicación algebraica.

Generalmente una aplicación suave o regular u (puede ser $\mathcal{C}^1$) de $\mathbb{S}^1$ a valores en $\mathbb{C}$, tal que $u \neq 0$ sobre $\mathbb{S}^1$ tiene un grado que puede ser calculado a través de la siguiente fórmula clásica

$$\deg(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{u'}{u}$$

la cual se encarga de medir el cambio algebraico de fase de la aplicación u cuando la variable da una vuelta a $\mathbb{S}^1$ una vez. Similarmente, si Γ es una curva regular y simple en $\mathbb{R}^2$ (i.e. una curva que no se cruza a sí misma) y u una aplicación suave de Γ a valores en $\mathbb{S}^1$, el grado puede ser calculado como

$$\deg(u,\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

donde $\times$ denota el producto cruz de vectores en $\mathbb{R}^2$ y τ denota el vector tangente unitario de u a lo largo de Γ.

Observación 1 *En $\mathbb{R}^2$, el producto cruz o vectorial coincide con el producto exterior o cuña. En efecto, consideremos los vectores $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ de manera que*

$$a \times b = a_1b_2 - a_2b_1 \quad y \quad a \wedge b = \frac{1}{2i}(\bar{a}b - a\bar{b}) = a_1b_2 - a_2b_1,$$

con $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2 \in \mathbb{C}$.

Observación 2 *La derivada tangencial se define como $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla u \cdot \tau = (\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y})\cdot(\tau_x, \tau_y)$ y comúnmente se utiliza la notación $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = u_\tau$. De igual manera tenemos la definición de la derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = (\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y})\cdot(\nu_x, \nu_y)$ y se utiliza la notación $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = u_\nu$.*

2. Grado de funciones continuas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto, acotado, regular y simplemente conexo (i.e. $\pi_1(\Omega) = \{0\}$, donde $\pi_1(\Omega)$ denota el primer grupo fundamental de Ω). Para fijar las ideas en esta lección, supongamos que $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (B_1 es la bola unitaria centrada en 0 y con radio igual a 1). Sea $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una función continua y consideremos la aplicación $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ tal que $\tilde{g}(t) = g(e^{it})$, teniendo así que $\tilde{g}$ es una aplicación continua.

Proposición 1 *Existe una función continua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = e^{i\psi}$.*

Demostración. Fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$ y consideremos el valor real $\psi(t_0)$ tal que $g(e^{it_0}) = e^{i\psi(t_0)}$. Por el teorema de inversión local, la aplicación $x \longmapsto e^{ix}$ es un difeomorfismo local. Así, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|g(e^{it}) - g(e^{it_0})| < \delta$$

entonces existe un único valor real $\psi(t)$ tal que $g(e^{it}) = e^{i\psi(t)}$ y

$$|\psi(t) - \psi(t_0)| < \varepsilon.$$

Por ende utilizando la continuidad de $\tilde{g}$, existe $\eta > 0$ tal que las mismas propiedades se cumplen si $|t - t_0| < \eta$. Ahora, hacemos variar t_0 sobre un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, de forma que podamos recubrir dicho intervalo por un número finito de vecindades $]t_i - \eta, t_i + \eta[$ sobre las cuales podemos construir un levantamiento continuo ψ_i. Notemos que en la intersección de dos vecindades, las funciones ψ_i y ψ_j con $i \neq j$ difieren por una cantidad entera multiplicada por 2π. Por ende podemos construir un levantamiento continuo ψ sobre todo el intervalo compacto pegando de extremo a extremo las funciones ψ_j y trasladando ψ_{j+1} modulo una constante tal que

$$\psi_{|(t_{j+1}-\eta, t_{j+1}+\eta)} = \psi_{j+1} - [\psi_{j+1} - \psi_j]_{|(t_j-\eta, t_j+\eta)\cap(t_{j+1}-\eta, t_{j+1}+\eta)}.$$

A continuación, elegimos intervalos compactos $[-n, n]$ sobre los cuales construimos los levantamientos ψ_n que vuelven a coincidir, aunque para ello haya que trasladar ψ_{n+1} relativamente a ψ_n.

$\blacksquare$

Este resultado motiva la siguiente observación.

Observación 3 *Sea $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ con $g(e^{it}) = e^{i\psi(t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$e^{i\psi(t+2\pi)} = g(e^{i(t+2\pi)}) = g(e^{it}) = e^{i\psi(t)}.$$

Así, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\psi(t + 2\pi) - \psi(t) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Como la función ψ es continua, existe un único entero k tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t + 2\pi) - \psi(t) = 2k\pi.$$

Así, por definición establecemos

$$\deg(g, \mathbb{S}^1) = k, \quad \textit{para } k \in \mathbb{Z}.$$

Con esto tenemos el siguiente resultado.

Lema 1 *Si $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$, entonces*

$$\deg(g, \mathbb{S}^1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}.$$

Demostración. Sea $\Omega = B_1$. Por la Proposición 1, el teorema fundamental del cálculo y por la Observación 3, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\psi(\theta)} \times \frac{d}{d\theta}(e^{i\psi(\theta)})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)\, d\theta = \frac{\psi(2\pi) - \psi(0)}{2\pi} = \deg(g, \mathbb{S}^1).$$

La segunda igualdad se obtiene gracias al siguiente calculo

$$\begin{aligned} e^{i\psi(\theta)} \times \frac{d}{d\theta}(e^{i\psi(\theta)}) &= (\cos\psi(\theta), \sin\psi(\theta)) \times (-\psi'(\theta)\sin\psi(\theta), \psi'(\theta)\cos\psi(\theta)) \\ &= \psi'(\theta)(\cos^2\psi(\theta) + \sin^2\psi(\theta)) = \psi'(\theta). \end{aligned}$$

■

Observación 4 *Es claro que el grado no depende de la elección de* ψ.

Mediante el siguiente lema, mostraremos que la fórmula del grado presentada en el lema anterior coincide con la fórmula del índice utilizada comúnmente en análisis complejo.

Lema 2 *Si* $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$*, entonces*

$$\operatorname{Ind}(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{g'}{g} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{g_\tau}{g}.$$

$\operatorname{Ind}(g)$ *denota el índice de la función* g.

Demostración. Consideremos la escritura de g bajo su forma polar: para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $\rho(\theta) \neq 0$ constante, tenemos

$$g(\theta) = \rho(\theta)e^{i\psi(\theta)},$$

entonces $g'(\theta) = (\rho' + i\psi'\rho)e^{i\psi(\theta)}$. Así, por el teorema fundamental del cálculo, el hecho de que ρ es constante y por la Observación 3, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{g'}{g} &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{S^1} \frac{\rho'}{\rho} + i\int_{S^1} \psi'\right) = \frac{1}{2\pi i}(\log\rho(2\pi) - \log\rho(0)) + \frac{1}{2\pi}(\psi(2\pi) - \psi(0)) \\ &= \frac{\psi(2\pi) - \psi(0)}{2\pi} = \deg(g, \mathbb{S}^1). \end{aligned}$$

■

En el caso particular donde $|g| = 1$, la anterior fórmula resulta ser

$$\operatorname{Ind}(g) = \deg(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1} \bar{g}g_\tau.$$

A continuación, presentaremos otra fórmula para calcular el grado topológico.

Lema 3 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio acotado y regular. Sean* $g : \partial\Omega \to \mathbb{S}^1$ *una aplicación de clase* $\mathcal{C}^2$ *y* $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ *tal que* $u = g$ *sobre* $\partial\Omega$*. Entonces*

$$\deg(g) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Demostración. Mostremos primeramente que la integral no depende de u. En efecto, sean $v, w : \Omega \to \mathbb{R}^2$ funciones $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ tales que $v = w = g$ sobre $\partial\Omega$. Vamos a demostrar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Sea $f = v - w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Bastaría demostrar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0. \tag{1}$$

Como el espacio H_0^1 es denso en $\mathcal{C}_c^\infty$, basta demostrar (1) para $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ y $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. En este caso, como el producto exterior es anticonmutativo y utilizando el teorema de Kelvin-Stokes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y} + f \times \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} - f \times \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(f \times \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \times f \right) \right] \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(f \times \frac{\partial w}{\partial y} \right) \nu_x + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \times f \right) \nu_y = 0
\end{aligned}$$

puesto que $f = 0$ sobre $\partial\Omega$. Así queda demostrada la ecuación (1). Luego, sea $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ tal que $u = g$ sobre $\partial\Omega$. Entonces, utilizando el teorema de Kelvin-Stokes, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} + u \times \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \times u + \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times u \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left[\left(u \times \frac{\partial u}{\partial y} \right) \nu_x - \left(u \times \frac{\partial u}{\partial x} \right) \nu_y \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left[u \times \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \nu_x - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \nu_y \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left[u \times \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \tau_y + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau_x \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) \\
&= \pi \deg(g)
\end{aligned}$$

ya que $\tau_x = -\nu_y$ y $\tau_y = \nu_x$; y en la última igualdad hemos utilizado el resultado del Lema 1.

■

3. Propiedades del grado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, acotado, regular y simplemente conexo.

Lema 4 *Si $g, h \in \mathcal{C}(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$, tenemos las siguientes propiedades:*

$$\deg(gh) = \deg(g) + \deg(h)$$

y

$$\deg(g/h) = \deg(g) - \deg(h).$$

Demostración. Vamos a demostrar estas propiedades para el caso $\Omega = B_1$. Por la Proposición 1 tenemos que $g(e^{it}) = e^{i\psi(t)}$ y $h(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$ con ψ y φ funciones continuas reales. Sean $k = \deg(g, \mathbb{S}^1)$ y $l = \deg(h, \mathbb{S}^1)$, para $k, l \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\frac{\psi(2\pi) - \psi(0)}{2\pi} = \frac{\psi(t + 2\pi) - \psi(t)}{2\pi} = k$$

y

$$\frac{\varphi(t + 2\pi) - \varphi(t)}{2\pi} = l.$$

Así,
$$(\psi+\varphi)(t+2\pi)-(\psi+\varphi)(t)=2\pi(k+l)$$
y como $(gh)(e^{it})=e^{i(\psi+\varphi)(t)}$, obtenemos
$$\deg(gh)=k+l=\deg(g)+\deg(h).$$
De manera similar, tenemos que
$$(\psi-\varphi)(t+2\pi)-(\psi-\varphi)(t)=2\pi(k-l)$$
y como $(g/h)(e^{it})=e^{i(\psi-\varphi)(t)}$, obtenemos
$$\deg(g/h)=k-l=\deg(g)-\deg(h).$$
■