Lección n°4: Introducción a la energía renormalizada de Ginzburg-Landau ESPOL, 2021

Índice

1. Estudio de la energía de Ginzburg-Landau

La importancia de la energía renormalizada proviene de su uso en la teoría de la materia condensada, específicamente en los problemas de transición de fase que se producen en superconductividad, superfluidos y en el estudio de cristales líquidos. F. Bethuel, H. Brezis y F. Hélein en su reconocido libro "*Ginzburg-Landau vortices*" introdujeron la noción de energía renormalizada con el objetivo de explicar ciertas propiedades físicas que se producen por la ausencia del campo magnético en los problemas de superconductividad (como la ubicación exacta de ciertas singularidades conocidas como vórtices de Abrikosov), a partir del estudio de un problema de minimización asociado a la energía de Ginzburg-Landau.

Sea G un dominio abierto, acotado, regular y **simplemente conexo** de $\mathbb{R}^2$ (igualmente identificado como $\mathbb{C}$) y ε un valor real positivo. La **energía de Ginzburg-Landau** se define como el funcional

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (|u|^2-1)^2$$

para aplicaciones $u \in H^1(G,\mathbb{R}^2)$ (también definido como $H^1(G,\mathbb{C})$). F. Bethuel, H. Brezis y F. Hélein consideraron el problema de minimización

$$\min_{u\in H^1_g} E_\varepsilon(u) \tag{1}$$

con

$$H^1_g = \left\{u \in H^1(G,\mathbb{R}^2) :\ u = g \text{ sobre } \partial G\right\}$$

donde $g : \partial G \to \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ es el círculo unitario de $\mathbb{R}^2$) es una aplicación regular.

Considerando $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una sucesión de minimizadores del problema (1), los autores probaron que

$$\int_G (|u_\varepsilon|^2-1)^2 \leq C\varepsilon^2|\log(\varepsilon)|$$

con $C > 0$ una constante. Por lo que existió la motivación de estudiar el compartimiento asintótico de u_ε cuando $\varepsilon \to 0$ considerando solamente el término

$$\frac{1}{2}\int_G |\nabla u_\varepsilon|^2$$

conocido como energía de Dirichlet. Para esto se utilizó el grado de Brouwer[1] definido como

$$d := \deg(g,\partial G) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau},$$

[1] Estudiado con más profundidad en la Lección n°3

donde $d \in \mathbb{Z}$, $\times$ denota el producto cruz de vectores en $\mathbb{R}^2$ (que coincide con el producto exterior o cuña) y τ es el vector tangente unitario de ∂G. Esta definición es responsable de la manifestación de efectos de vórtices o torbellinos comparables a los que se observan en los problemas de superconductividad; y que juega un papel crucial en el análisis asintótico de u_ε.

En el caso en que el grado sea nulo, tenemos que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$. Más aún, se tiene el siguiente resultado (su demostración puede encontrarse en [2]).

Lema 1 *Sea G un dominio abierto, acotado, regular y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Tenemos que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ si y solamente si* $\deg(g, \partial G) = 0$.

Sin embargo, en el caso en que el grado no sea nulo, tenemos que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) = \emptyset$ (¡ lo cual representa un gran problema !). Entonces, para tratar este inconveniente es necesario considerar el uso de una penalización natural que consiste en realizar pequeños agujeros (conocidos comúnmente como **vórtices**) $B_\rho(a_i)$ en el dominio G. En este caso, para $k \in \mathbb{N}^*$, $B_\rho(a_i)$ denota la bola abierta centrada en a_i con radio ρ positivo, para todo $i = 1, \dots, k$. De modo que ahora consideraremos el dominio $G_\rho := G \setminus U^k_{i=1} \bar{B}_\rho(a_i)$ con el objetivo de obtener $H^1_g(G_\rho, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ y así, sin ningún inconveniente, podremos considerar el problema de minimización

$$\min_{u \in H^1_g(G_\rho, \mathbb{S}^1)} \int_{G_\rho} |\nabla u|^2,$$

por lo que ahora nuestro objetivo será analizar este problema cuando $\rho \to 0$.

2. Presentación de la energía renormalizada

Consideremos el dominio G introducido en la sección anterior. Para introducir correctamente la energía renormalizada debemos dar a conocer primeramente la siguiente definición.

Definición 1 *Sea $k \in \mathbb{N}^*$. Definiremos el **espacio de configuración** de G de k puntos ordenados, denotado por* $\text{Conf}_k G$*, como:*

$$\text{Conf}_k G := \{(a_1, \dots, a_k) \in G^k : a_i = a_j \textit{ si y solamente si } i = j\}.$$

Sean $(a_1, \dots, a_k) \in \text{Conf}_k G$, $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}$, y consideremos la siguiente función

$$W_g(a_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log |a_i - a_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \phi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i R(a_i),$$

donde ϕ es la solución del problema lineal de Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi = 2\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{k} d_i \delta_{a_i} & \text{en } G, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sobre } \partial G, \end{cases}$$

donde ν denota el vector normal exterior de ∂G y τ denota el vector tangente unitario de ∂G tal que (ν, τ) es directo (i.e. es una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^2$).

La cantidad R es una función continua definida a través de la ecuación

$$R(x) = \phi(x) - \sum_{i=1}^{k} \log |x - a_i|,$$

donde se ve claramente que R representa la parte regular de la función ϕ. La función W_g es conocida como **energía renormalizada** (con condición de Dirichlet). La obtención de esta fórmula la trataremos con todo detalle en la siguiente lección.

Observación 1 *La energía renormalizada es una función obtenida a partir del límite de la energía de Dirichlet una vez retirada una cantidad que diverge (esta cantidad es conocida como "energía del núcleo").*

2.1. Un lema fundamental

Para terminar esta lección presentaremos un resultado muy útil que nos permitirá desarrollar la obtención de la energía renormalizada.

Lema 2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto, regular (no necesariamente simplemente conexo) y D un campo vectorial en Ω tal que*

$$\operatorname{div} D = 0 \quad y \quad \int_{\Gamma_i} D \cdot \nu = 0$$

para cada componente conexa Γ_i de $\partial\Omega$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Entonces existe una función H de Ω tal que

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) = -\nabla^{\perp} H,$$

donde $\nabla^{\perp}$ denota el gradiente ortogonal.

Observación 2 *En el caso en que Ω sea simplemente conexo, este resultado se conoce como "lema de Poincaré".*

Demostración del lema 2. Empecemos considerando, para todo $i = 1, \ldots, k$, los subdominios ω_i de Ω delimitados por las curvas (o fronteras en este caso) Γ_i, y el siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta w_i = 0 & \text{en } \omega_i, \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \nu} = D \cdot \nu & \text{sobre } \partial\omega_i = \Gamma_i. \end{cases} \tag{2}$$

Definimos el campo vectorial $\tilde{D}$, para todo $i = 1, \ldots, k$, mediante

$$\tilde{D} = \begin{cases} D & \text{en } \Omega, \\ \nabla w_i & \text{en } \omega_i. \end{cases} \tag{3}$$

Como $\displaystyle\int_{\Gamma_i} D \cdot \nu = 0$, el problema (2) tiene solución única salvo una constante positiva (ver e.g., [1, Teorema 3.40]). Además, $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$ en Ω, pues $\tilde{D} = D$ en Ω; y $\operatorname{div} D = 0$ por hipótesis. En cada subdominio ω_i, para todo $i = 1, \ldots, k$, tenemos que $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$, ya que $\operatorname{div}(\nabla w_i) = 0$; y sobre cada Γ_i consideramos las condiciones dadas en (2), (3) y una función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ de manera que

$$\begin{aligned} \int_G \tilde{D} \cdot \nabla\varphi &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega_i} \nabla w_i \cdot \nabla\varphi + \int_{\Omega} D \cdot \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial\omega_i} \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\varphi - \int_{\partial\Omega} D \cdot \nu\varphi \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \nu} - D \cdot \nu \right) \varphi = 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de divergencia tenemos que $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$ en $G = \Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \bar{\omega_i} \right)$ que es simplemente conexo. Luego, por el lema de Poincaré (ver e.g., [3, Teorema 4-11]), existe una función $\tilde{H}$ en G tal que

$$\tilde{D} = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_1} \right).$$

Para concluir la demostración basta definir la función H como la restricción de $\tilde{H}$ a Ω. ■

Observación 3 *El lema de Poincaré en $\mathbb{R}^2$ nos dice que, si la divergencia de un campo vectorial es nulo, entonces el campo vectorial es igual a un gradiente ortogonal; y si el rotacional de un campo vectorial es nulo, entonces el campo vectorial resulta ser un gradiente.*

Referencias

[1] Gerald B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, second edition, 1995.

[2] Augusto Ponce. *Équation de Ginzburg-Landau et singularités*. Notes de cours, 2004.

[3] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. CRC press, 2018.