Lección n°5: Energía renormalizada del problema de tipo Dirichlet

ESPOL, 2021

Índice

Para finalizar este compendio de lecciones presentaremos la obtención de la energía renormalizada de Dirichlet asociada al problema de Ginzburg-Landau visto en la lección anterior. La técnica principal se basa en tres etapas:

1. Comenzaremos tratando un resultado que nos permitirá demostrar la existencia y unicidad del minimizador asociado al problema de Ginzburg-Landau de tipo Dirichlet y este asociarlo a su vez con la solución de una EDP que presentaremos en su momento.
2. Dado que trabajamos con minimizadores, obtendremos un resultado de convergencia basándonos en una desigualdad que demostraremos utilizando el principio del máximo débil.
3. Por último, utilizando el resultado de convergencia del anterior punto, daremos a conocer el teorema principal de esta lección donde se presentará la fórmula explícita de la energía renormalizada asociada a nuestro problema inicial.

1. Existencia y unicidad del minimizador

Como en la anterior lección, consideremos G un dominio abierto, acotado, regular y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Además, consideremos $(a_1, \dots, a_k) \in \text{Conf}_k G$, $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}$ y la cantidad

$$\bar{\rho}(a_1, \dots, a_k) := \text{ínf}\left(\left\{\frac{|a_i - a_j|}{2} : i, j = 1, \dots, k \text{ y } i \neq j\right\} \cup \left\{\text{dist}\,(a_i, \partial G) : i = 1, \dots, k\right\}\right),$$

tal que si consideramos un radio $\rho \in]0, \bar{\rho}(a_1, \dots, a_k)[$, obtendremos $\bar{B}_\rho(a_i) \cap \bar{B}_\rho(a_j) = \emptyset$ para cada $i, j = 1, \dots, k$ con $i \neq j$ y $\bar{B}_\rho(a_i) \subset G$ para cada $i = 1, \dots, k$, y así el conjunto $\Omega_\rho := G \setminus \cup_{i=1}^k \bar{B}_\rho(a_i)$ será conexo y regular. Finalmente, para $\rho \in]0, \bar{\rho}(a_1, \dots, a_k)[$, definamos el conjunto

$$W_D^\rho := \text{ínf}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 \text{ con } u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1) : \ \text{tr}_{|\partial G} u = g, \ \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i, \ i = 1, \dots, k\right\}. \tag{1}$$

Nuestro objetivo será obtener la energía renormalizada asociada a este conjunto W_D^ρ.

Teorema 1 *El ínfimo se alcanza en (1) por una solución única salvo una fase, i.e., si u_1 y u_2 son dos minimizadores, entonces $u_1 = \alpha u_2$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$. Además, tenemos*

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2$$

con ϕ_ρ solución del problema lineal

$$\begin{cases} \Delta \phi_\rho = 0 & \text{en } \Omega_\rho, \\ \phi_\rho = C_i(\rho) = cte. & \text{sobre } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \dots, k, \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i & i = 1, \dots, k, \\ \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sobre } \partial G, \\ \displaystyle\int_{\partial G} \phi_\rho = 0. & \end{cases} \tag{2}$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ tal que $\mathrm{tr}_{|\partial G} u = g$ y $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. En primer lugar, vamos a demostrar que

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Como u toma valores en $\mathbb{S}^1$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Así

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Ahora, consideremos el campo vectorial

$$D = \left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}, u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}\right).$$

Como ϕ_ρ es una función armónica en Ω_ρ, tenemos

$$\operatorname{div} D = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_2^2} = 0.$$

Por otro lado, tenemos

$$D \cdot \nu = -\left(u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}$$

donde ν es el vector normal exterior a $\partial B_\rho(a_i)$ y τ es el vector unitario tangente a $\partial B_\rho(a_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$ tal que (ν, τ) es directo. Luego, por la fórmula de grado tenemos

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} = 2\pi \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = 2\pi d_i$$

para todo $i = 1, \dots, k$, además por las condiciones de frontera de (2)

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i$$

entonces, para todo $i = 1, \dots, k$,

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} D \cdot \nu = 0.$$

Utilizando nuevamente las condiciones de frontera de (2), obtenemos

$$\int_{\partial G} D \cdot \nu = 0.$$

Así, por el Lema 2 presentado en la Lección 4, tenemos la existencia de una función H definida en Ω_ρ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Entonces

$$|\nabla u|^2 = \left|u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 = |\nabla H|^2 + |\nabla \phi_\rho|^2 + 2\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right),$$

pero

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right) &= \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div}\left(H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, -H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right) = \int_{\partial G} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} \\ &= -\int_{\partial G} \phi_\rho \frac{\partial H}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} = 0 \end{aligned}$$

ya que, por las condiciones de frontera de (2), las funciones ϕ_ρ son constantes sobre $\partial B_\rho(a_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, y además

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 0$$

pues $\mathrm{tr}_{|\partial G} u = g$ sobre ∂G. Por lo tanto

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla H|^2 + \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 \geq \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Ahora, vamos a demostrar que existe una función $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ tal que $\mathrm{tr}_{|\partial G} u = g$, $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$, y además que cumpla la igualdad

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Para demostrar esto vamos a encontrar una función u que satisface

$$\left\{\begin{array}{rcl} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}. \end{array}\right. \tag{4}$$

De una forma general, podemos considerar el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & F_1 & \text{en } \Omega_\rho, \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & F_2 & \text{en } \Omega_\rho, \end{array}\right. \tag{5}$$

con F_1 y F_2 funciones generales. Este problema tiene una solución $u : \Omega_\rho \to \mathbb{S}^1$ si y solamente si

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \tag{6}$$

y

$$\int_{\Gamma_i} F\cdot\tau \in 2\pi\mathbb{Z}$$

para cada componente conexa Γ_i de $\partial\Omega_\rho$, para $i=1,\ldots,k$. En efecto, considerando (4), si derivamos parcialmente la primera ecuación con respecto a x_2 y la segunda ecuación con respecto a x_1, obtenemos

$$-\frac{\partial^2\phi_\rho}{\partial x_2^2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\times\frac{\partial u}{\partial x_1} + u\times\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$$

y

$$\frac{\partial^2\phi_\rho}{\partial x_1^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\times\frac{\partial u}{\partial x_2} + u\times\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}.$$

Como ϕ_ρ es una función armónica en Ω_ρ y utilizando (5), obtenemos (6). Luego, por las condiciones de frontera del problema (2), tenemos

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} F\cdot\tau = \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial\phi_\rho}{\partial\nu} = 2\pi d_i$$

con $d_i\in\mathbb{Z}$, para todo $i=1,\ldots,k$. Por otro lado, podemos considerar localmente $u=e^{i\psi}$ con ψ solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} &= F_1, \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} &= F_2, \end{cases}$$

que tiene solución local por el procedimiento anterior. Para la unicidad, si consideramos dos soluciones locales de (5) u_1 y u_2, entonces $u_1=\alpha u_2$ donde α es una constante compleja con $|\alpha|=1$. Además, la solución local ψ es continua globalmente puesto que podemos integrar sobre caminos. Estas integrales pueden variar pero esta variación es igual a $2\pi\mathbb{Z}$, y de esta manera $u=e^{i\psi}$ está bien definida salvo una fase. Más aún, utilizando (4) y las condiciones de frontera de (2), obtenemos $\mathrm{tr}_{|\partial G}u=g$, puesto que

$$u\times\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi_\rho}{\partial\nu} = g\times\frac{\partial g}{\partial\tau} \quad \text{sobre } \partial G$$

y para todo $i=1,\ldots,k$,

$$2\pi\deg(u,\partial B_\rho(a_i)) = \int_{\partial B_\rho(a_i)} g\times\frac{\partial g}{\partial\tau} = \int_{\partial B_\rho(a_i)}\frac{\partial\phi_\rho}{\partial\nu} = 2\pi d_i,$$

lo que concluye la demostración. ■

2. Resultado de convergencia

Vamos a comenzar presentando un lema que nos permitirá demostrar la convergencia de ϕ_ρ hacia una función ϕ_0 cuando $\rho\to 0$, con ϕ_0 solución de un problema lineal que presentaremos luego.

Lema 1 *Sea v una función que satisface el problema lineal*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \Omega_\rho, \\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial G, \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)}\frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 & i=1,\ldots,k. \end{cases} \tag{7}$$

Entonces

$$\sup_{\Omega_\rho} v - \inf_{\Omega_\rho} v \le \sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v\right). \tag{8}$$

Demostración. Consideremos el intervalo $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ con $\alpha_i = \inf\limits_{\partial B_\rho(a_i)} v$ y $\beta_i = \sup\limits_{\partial B_\rho(a_i)} v$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Demostremos primeramente que $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ es conexa. Supongamos que esto no es verdadero. Entonces, existen $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y $1 \leq n < k$ tales que (luego de haber reetiquetado los intervalos de ser necesario)

$$\beta_i \leq t_0 - \delta \quad \text{si } i = 1, \ldots, n \quad \text{y} \quad \alpha_i \geq t_0 + \delta \quad \text{si } i = n+1, \ldots, k.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_0 \neq 0$, i.e. consideremos $t_0 > 0$. Así, podemos suponer que $t_0 - \delta \geq 0$. Consideremos también una función $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 - \delta \\ 1 & \text{si } t \geq t_0 + \delta \end{cases}$$

y $\theta'(t) > 0$ para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Multipliquemos la ecuación $\Delta v = 0$ por $\theta(v)$ y luego integremos sobre Ω_ρ, de modo que

$$0 = -\int_{\Omega_\rho} (\Delta v)\theta(v) = \int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 - \int_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v) + \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v),$$

pero por las condiciones de frontera de (7), $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sobre ∂G, $\theta(v)$ es constante (0 o 1) sobre cada $\partial B_\rho(a_i)$ y

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, k.$$

Así, obtenemos

$$\int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 = 0$$

y por lo tanto $\nabla v = 0$ en el conjunto $B := \{x \in \Omega_\rho : t_0 - \delta < v(x) < t_0 + \delta\}$ lo cual es una contradicción ya que v es localmente constante en B y entonces v puede tomar a lo más una cantidad numerable de valores entre $t_0 - \delta$ y $t_0 + \delta$. Por otro lado, Ω_ρ es conexo y v es una función continua, entonces v puede tomar valores entre $\inf_{\Omega_\rho} v$ y $\sup_{\Omega_\rho} v$ (la imagen de un conjunto conexo por una función continua sigue siendo conexa). En particular, v puede tomar todos los valores entre $t_0 - \delta$ y $t_0 + \delta$. Por lo tanto, podemos concluir que $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ es conexo.

Ahora vamos a demostrar la desigualdad (8). Como $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ es conexo, se alcanzan su máximo y su mínimo, así por el principio del máximo débil[1] tenemos

$$\max_{1 \leq i \leq k} \beta_i - \min_{1 \leq i \leq k} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Sumando una constante positiva a v podemos siempre suponer que $\min\limits_{1 \leq i \leq k} \alpha_i = 0$. Enseguida, tomamos $A = \max\limits_{1 \leq i \leq k} \beta_i$, multiplicamos la ecuación $\Delta v = 0$ por $(v - A)^+$, integramos sobre Ω_ρ; y utilizando las condiciones de frontera de (7) obtenemos

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla (v - A)^+|^2 + \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu}(v - A)^+ = 0,$$

pero $(v - A)^+ = 0$ sobre cada $\partial B_\rho(a_i)$ (por las condiciones de frontera de (7)), entonces $(v - A)^+ = 0$ en Ω_ρ, es decir, $v \leq A$ en Ω_ρ. De igual manera $v^- = 0$ sobre cada $\partial B_\rho(a_i)$ y por lo tanto $v \geq 0$ en Ω_ρ. Así

$$\inf_{\Omega_\rho} v = 0$$

[1] Presentado en la Lección n°2

y, utilizando la desigualdad anterior, obtenemos

$$\sup_{\Omega_\rho} v \leq A = \max_{1\leq i\leq k} \beta_i \leq \sum_{i=1}^{k}(\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v\right).$$

Lo que concluye la demostración. ■

A continuación demostraremos el resultado de convergencia mediante el siguiente lema.

Lema 2 *Sea ϕ_ρ solución del problema lineal (2). Tenemos que $\phi_\rho \to \phi_0$ uniformemente cuando $\rho \to 0$, con ϕ_0 solución del problema lineal*

$$\begin{cases} \Delta\phi_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2\pi d_i \delta_{a_i} & \text{en } G, \\ \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sobre } \partial G, \\ \displaystyle\int_{\partial G} \phi_0 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

donde δ es la función delta de Dirac. Más aún, para una constante $C > 0$, tenemos

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

Demostración. Comenzamos utilizando el Lema 1 con $v = \phi_\rho - \phi_0$ en Ω_ρ. Como ϕ_ρ es constante sobre cada $\partial B_\rho(a_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, obtenemos

$$\sup_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) - \inf_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) \leq \sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0 - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0\right) \leq C\rho.$$

Además, gracias a las condiciones de frontera de (2) y (9), tenemos que

$$\int_{\partial G} (\phi_\rho - \phi_0) = 0.$$

Entonces hay un punto sobre ∂G tal que $\phi_\rho - \phi_0 = 0$. Por lo tanto

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

■

3. Obtención de la energía renormalizada

Finalmente, a través del siguiente teorema obtendremos la fórmula de la energía renormalizada para el problema de Dirichlet simplemente conexo W_D^ρ.

Teorema 2 *Sea*

$$R_0(x) = \phi_0(x) - \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x - a_j| \tag{10}$$

tal que R_0 es una función armónica regular en G (R_0 es la parte regular de la función ϕ_0) y ϕ_0 es la solución del problema (9). Entonces, cuando $\rho \to 0$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \pi\left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right)\log\left(\frac{1}{\rho}\right) + W_D(a_i, d_i) + O(\rho)$$

donde u_ρ es una aplicación armónica a valores en $\mathbb{S}^1$ asociada a ϕ_ρ (ϕ_ρ es la solución de (2)) y

$$W_D(a_i, d_i) := -\pi\sum_{i\neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0\left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_i R_0(a_i).$$

Observación 1 *La cantidad $W_D(a_i, d_i)$ se conoce como* ***energía renormalizada****. Es importante remarcar que W_D depende solamente de G, a_i, d_i y g. Además $O(\rho)$ representa una cantidad X tal que $|X| \leq C\rho$ donde C depende solamente de G, a_i, d_i y g.*

Demostración (Teorema 2). Considerando los argumentos de la demostración del Teorema 1 sabemos que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Ahora, haciendo uso de las condiciones de frontera de (2), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_\rho \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_\rho(\partial B_\rho(a_i)).
\end{aligned}$$

Por el Lema 2, considerando una constante $C > 0$, $\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho$, por lo tanto

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_0(x_i) + O(\rho)$$

donde x_i es un punto de $\partial B_\rho(a_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. A continuación, con la ayuda de la expresión (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(R_0(x_i) + \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x_i - a_j|\right) + O(\rho) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(R_0(a_i) + \sum_{j \neq i} d_j \log|a_i - a_j| - d_i \log\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + O(\rho) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i R_0(a_i) - \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| \\
&\quad + \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + O(\rho).
\end{aligned}$$

Finalmente, considerando la definición de $W_D(a_i, d_i)$ se concluye esta demostración.

■