<u>Lección n°1</u>: Herramientas de base

USFQ, septiembre 2018

Índice

1. Introducción

En esta lección haremos un corto resumen de las herramientas de base que utilizaremos a lo largo de las lecciones posteriores. De manera más precisa estudiaremos en primer lugar los espacios de Lebesgue y algunos resultados clásicos. Luego introduciremos rápidamente la transformación de Fourier: primeramente en el marco de la clase de Schwartz y después de manara más general en el marco de las distribuciones temperadas.

Algunas notaciones

En todo este curso trabajaremos sobre el espacio $\mathbb{R}^3$ donde:

- para dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \cdot y = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ denota el producto escalar usual y $|x| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} x_j^2}$ denota la norma euclidiana.
- Consideraremos siempre al espacio $\mathbb{R}^3$ como un espacio medido: $(\mathbb{R}^3, Bor(\mathbb{R}^3), dx)$, donde $Bor(\mathbb{R}^3)$ es la sigma-álgebra boreliana y dx es la medida de Lebesgue.

2. Espacios de Lebesgue

Empezamos defiendo los espacios de Lebesgue.

Definición 1 *(Espacio de Lebesgue) Sea $p \in [1, +\infty]$. El espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ se define como*

$$L^p(\mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es medible y } \|f\|_{L^p} < +\infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & si\ 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)|, & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

2.1. Principales propiedades

Entre las principales propiedades de estos espacios se tiene:

- **Algunas propiedades de estructura.** El espacio $(L^p(\mathbb{R}^3), \|\cdot\|_{L^p})$ es un espacio de Banach para los valores del parámetro de integración $p \in [1, +\infty]$. Por otro lado, para $1 \leq p < +\infty$ se tiene que el espacio dual de $L^p(\mathbb{R}^3)$ es el espacio $L^q(\mathbb{R}^3)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Además, $L^p(\mathbb{R}^3)$ es un espacio reflexivo para $p \in]1, +\infty[$.

- **Desigualdad de Hölder.** Si $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ entonces $fg \in L^r(\mathbb{R}^3)$ con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ y se tiene:

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

- **Convolución y desigualdad de Young.** Dadas dos funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definimos su convolución $f * g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y)dy$.

  Así, si $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^3)$ con $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ y se tiene:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1}$$

  Esta desigualdad es también conocida como la desigualdad de Young.

- **Interpolación.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^3)$ y $f \in L^{p_2}(\mathbb{R}^3)$ con $p_{1,2} \in [1, +\infty]$. Entonces se tiene que $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{1-\theta}{p_2}$, con $\theta \in [0, 1]$; y se tiene

$$\|f\|_{L^p} \leq c\|f\|^{\theta}_{L^{p_1}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}}. \tag{2}$$

  La desigualdad de interpolación nos dice simplemente que si la función f pertenece al espacio $L^{p_1}(\mathbb{R}^3)$ y al espacio $L^{p_2}(\mathbb{R}^3)$ entonces esta función pertenece a todos los espacios $L^p(\mathbb{R}^3)$, donde la relación $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ nos indica que p se encuentra entre p_1 y p_2.

Una generalización de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ son los espacios de funciones *localmente integrables* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ que aparecerán en nuestro estudio más adelante.

2.2. Funciones localmente integrables

Tenemos la siguiente definición:

Definición 2 *(Espacios de funciones localmente integrables) Sea $p \in [1, +\infty]$. El espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ se define como*

$$L^p(\mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \ f \text{ es medible y } \|f\|_{L^p(K)} < +\infty, \text{ para todo conjunto compacto } K \subset \mathbb{R}^3\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(K)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_K |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup\limits_{x \in K} |f(x)|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

El estudio detallado de los espacios $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ (así como de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$) está fuera de los objetivos de este curso por lo que solamente haremos algunas observaciones sobre estos espacios funcionales. Para más detalles detalles sobre estos espacios funcionales ver el volumen 1 & 2 de la colección "Espacios de Lebesgue y de Lorentz".

- Para $p \in [1, +\infty]$ se tiene la *inclusión estricta*

$$L^p(\mathbb{R}^3) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^3).$$

En efecto, podemos ver sin ninguna dificultad que si $\vec{f} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ entonces para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^3$ se tiene $\|\vec{f}\|_{L^p(K)} \leq \|\vec{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$. Por otro lado, para $p \in [1, +\infty[$ fijo, se puede ver, pasando a coordenadas radiales, que la función $\frac{1}{|x|^{\frac{1}{p}}}$ no pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$ pero si al espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

- Se tiene además la cadena de inclusiones para $p, q \in]1, +\infty[$ tales que $p \leq q$:

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^3) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^3) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^3),$$

que es simplemente consecuencia de las relaciones de inclusión entre los espacios de Lebesgue $L^p(K)$ cuando $K \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto compacto (o de manera más general un conjunto de medida finita).

- A diferencia de los espacios de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, los espacios de funciones localmente integrables $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *no son espacios normandos*, pero son espacios de Fréchet (espacios vectoriales topológicos, localmente convexos, metrizables y completos) con la familia de *semi-normas* $(\|\cdot\|_{L^p(K_n)})_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos $K_n \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

3. La transformación de Fourier

La transformación de Fourier es una herramienta de gran utilidad en el análisis armónico y en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Es este sección introducimos rápidamente su definición y algunas de sus principales propiedades.

Es bien conocido que el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^3)$ es un marco natural para definir la transformación de Fourier, sin embargo, en esta sección introduciremos la transformación de Fourier en el marco de un espacio más pequeño que el espacio $L^1(\mathbb{R}^3)$: la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, y este espacio funcional nos permitirá ir más lejos en la définición de la transformación de Fourier.

3.1. La transformación de Fourier en la clase de Schwartz

Empezamos por definir la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y para ello empezaremos por fijar algunas definiciones y notaciones previas:

(A) **Multi-indices.** Un multi-indice es un vector $a = (a_1, a_1, a_3) \in \mathbb{N}^3$ cuyas componentes son números naturales. Notaremos por $|a| = a_1 + a_2 + a_3 \geq 0$ su tamaño.

- Para un multi-indice $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ y una función φ suficientemente regular, la expresión $\partial^a \varphi$ denota la derivada $\partial_1^{a_1}\partial_2^{a_2}\partial_3^{a_3}\varphi$ y $|a|$ nos indica el orden total de derivación de $\partial^a\varphi$.
- Por otro lado, para un multi-indice $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ y un vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definimos la cantidad $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \in \mathbb{R}$.

(B) **Funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.** Decimos que la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es continua y para todo multi-indice a, la función $\partial^a\varphi$ existe y es continua.

Vemos entonces que la función φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es *infinitamente derivable* y todas sus derivadas parciales son funciones continuas.

Definición 3 *(La clase de Schwartz) Una función $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ pertenece a la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ si φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y si para todo multi-indice $a, b \in \mathbb{N}^3$ se tiene*

$$\|x^a \partial^b \varphi\|_{L^\infty} < +\infty. \tag{3}$$

Hagamos ahora las siguientes observaciones:

- Las funciones de la clase de Schwartz tienen dos propiedades fundamentales: son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ y además son funciones *a decrecimiento rápido*. En efecto, la expresión (3) indica que la función φ y todas sus derivadas $\partial^b\varphi$ decrecen al infinito *más rápido* que el inverso del polinomio x^a.

- Un ejemplo clásico de una función que pertenece a la clase de Schwartz está dado por la gaussiana $e^{-|x|^2}$.

  Por otro lado, observemos que la función $e^{-|x|}$ *no pertenece* a la clase de Schwartz pues si bien esta función decrece al infinito más rápido que el inverso de cualquier polinomio, se tiene que esta función no es derivable en el origen por lo que no es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

- Las funciones de la clase de Schwartz pueden ser caracterizadas de la siguiente manera: se tiene $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *si y solo si* φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^3$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_{a,n,\varphi} > 0$, que depende de $a \in \mathbb{N}^3$, $n \in \mathbb{N}$ y de la función φ, tal que

$$|\partial^a \varphi(x)| \leq \frac{C_{a,n,\varphi}}{(1+|x|)^n}, \tag{4}$$

  para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Observamos así que la propiedad de decrecimiento rápido al infinito expresada en la ecuación (3) puede ser caracterizada de manera *equivalente* por la propiedad dada en la ecuación (4) y esta caracterización es muy útil en la practica.

En efecto, usando la propiedad dada en (4) podemos mostrar fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 1 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Entonces, para todo $p \in [1, +\infty]$ se tiene $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Además, para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^3$ se tiene $\partial^a\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$.*

Una vez que hemos introducido la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ vamos ahora a definir la transformación de Fourier en el marco de este espacio funcional.

Definición 4 *(La transformación de Fourier) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Definimos la transformación de Fourier de la función φ, notada como $\widehat{\varphi}$, por la siguiente expresión:*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)dx, \tag{5}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Definimos ahora la transformación de Fourier inversa.

Definición 5 *(La transformación de Fourier inversa) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Definimos la transformación de Fourier inversa de la función φ, notada como $\varphi^\vee$, como:*

$$\varphi^\vee(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)dx, \tag{6}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Observación 1 *Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ por la Proposición 1 se tiene $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Entonces por las expresiones (5) y (6) se tiene $\|\widehat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$ y $\|\varphi^\vee\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$ respectivamente. Vemos entonces que las expresiones (5) y (6) están bien definidas.*

Observación 2 *En las expresiones (5) y (6) podemos observar que la transformación de Fourier inversa no es más que la reflexión con respecto al origen de la transformación de una función, es decir, se tiene $(\varphi)^\vee(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.*

Recordemos ahora *solo algunas* de las principales propiedades de la transformación de Fourier que nos serán de utilidad en lo que sigue. Para un estudio mucho más detallado de la transformación de Fourier se puede consultar el libro "Clasical Fourier Analysis"de L. Grafakos.

Proposición 2 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dada en la Definición 3, sea $\widehat{\varphi}$ su transformación de Fourier dada en la Definición 4 y sea $(\varphi)^\vee$ su transformación de Fourier inversa dada en la Definición 5. Entonces se tiene:*

1) ***Isomorfismo en la clase Schwartz:*** $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *y* $(\varphi)^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

2) ***Inversión:*** $(\widehat{\varphi})^\vee = \widehat{(\varphi)^\vee} = \varphi$.

Se tiene además las siguientes propiedades que serán enunciadas para la transformación de Fourier $\widehat{\varphi}$ pero que también se verifican para la transformación inversa $(\varphi)^\vee$.

3) ***Identidad de Plancherel:*** $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.

4) ***Convolución:*** *sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces se tiene*

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

5) ***Derivación:*** *sea $a \in \mathbb{N}^3$ un multi-indice, entonces se tiene $\widehat{\partial_x^a \varphi}(\xi) = (2\pi i \xi)^a \widehat{\varphi}(\xi)$ y $\partial_\xi^a \widehat{\varphi}(\xi) = ((\widehat{-2\pi i x)^a}\varphi)(\xi)$.*

La propiedad 5) de esta proposición nos permite definir un operador que es gran utilidad en el análisis armónico:

El operador Laplaciano fraccionario

Comencemos con las siguientes notaciones y observaciones. Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ definimos el laplaciano de esta función, $\Delta\varphi$, como

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2 \varphi. \tag{7}$$

Ahora, tomando la transformación de Fourier en (7), por el punto 5) de la Proposición 2 se puede ver sin dificultad que se tiene:

$$\widehat{\Delta\varphi}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{\varphi}(\xi),$$

que por comodidad escribiremos como

$$\widehat{-\Delta\varphi}(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{\varphi}(\xi). \tag{8}$$

Vemos entonces que, en variable de Fourier ξ, la acción del operador $-\Delta$ sobre la función φ se expresa como la multiplicación de la transformación de Fourier $\widehat{\varphi}(\xi)$ por el símbolo $4\pi^2|\xi|^2$.

Para un parámetro $s \in \mathbb{R}$, la expresión (8) nos permite dar una definición simple del operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ de la siguiente manera:

Definición 6 *(El operador Laplaciano fraccionario) Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos la acción del operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ sobre la función φ, en variable de Fourier ξ, como:*

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi}(\xi) = (4\pi^2)^{\frac{s}{2}}|\xi|^s\widehat{\varphi}(\xi), \tag{9}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

El operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ es un operador de derivación fraccionaria: podemos entender la expresión $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi$ como la derivada $s-$esima de la función φ (donde $s \in \mathbb{R}$) y en la formula (9) podemos observar que esta derivación fraccionaria se puede definir de manera muy cómoda en la variable de Fourier como la multiplicación de la transformación de Fourier de la función φ por el símbolo $(4\pi^2)^{\frac{s}{2}}|\xi|^s$.

Por simplificar la escritura, de ahora en adelante en la formula (9) omitiremos la constante $(4\pi^2)^{\frac{s}{2}}$ y escribiremos

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi}(\xi) = |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi).$$

Observación 3 *La formula (9) también nos permite definir el operador Laplaciano fraccionario en variable espacial x como:*

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi(x) = \left(|\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi)\right)^{\vee}(x), \tag{10}$$

siempre y cuando esta cantidad esté bien definida.

En efecto, si $s > -3$ (donde 3 corresponde la dimensión de $\mathbb{R}^3$) entonces la función $|\xi|^s$ pertenece al espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ se tiene que la funcíon $|\xi|^s\widehat{\varphi}(\xi)$ pertenece al espacio $L^1(\mathbb{R}^3)$ por lo que la expresión dada en (10) está bien definida.

Por otro lado, si $s \leq -3$ entonces la función $|\xi|^s$ no es integrable cerca del origen y entonces la expresión (10) *puede no estar bien definida.* En este caso, para asegurar que la función $|\xi|^s\widehat{\varphi}$ pertenezca al espacio $L^1(\mathbb{R}^3)$, y entonces que la expresión (10) esté bien definida, necesitamos además que $\widehat{\varphi}$ decrezca suficientemente rápido a cero cerca del origen.

En la siguiente lección veremos cómo el operador Laplaciano fraccionario aparece de manera natural en la definición de los espacios de Sobolev. Pero antes de definir estos espacios funcionales y estudiar algunas de sus principales propiedades necesitamos primero extender la definición de la transformación de Fourier en un espacio funcional más grande que la clase de Schwartz: el espacio de la distribuciones temperadas, que introducimos rápidamente a continuación.

3.2. La tranformación de Fourier en las distribuciones temperadas

El espacio de la distribuciones temperadas, que notaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, es el espacio funcional más grande en donde se puede definir la transformación de Fourier. Este espacio es muy útil en el análisis armónico pues, entre algunas razones, el espacio de las distribuciones temperadas contiene a otros espacios funcionales (como por ejemplo los espacios de Lebesgue) y de esta manera podemos definir la transformación de Fourier de funciones (o más generalmente de distribuciones) que no solo pertenecen a la clase se Schwartz como se había trabajado en la sección anterior.

El espacio de las distribuciones temperadas

Para definir el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, empecemos por señalar que la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ es un espacio vectorial topólogico localmente convexo dotado la familia de semi-normas $\rho_{a,b}$, donde, para $a, b \in \mathbb{N}^3$ multi-indices y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ la cantidad $\rho_{a,b}(\varphi)$ está definida por la expresión

$$\rho_{a,b}(\varphi) = \|x^a \partial^b \varphi\|_{L^\infty}.$$

Definición 7 *(El espacio de las distribuciones temperadas) Definimos el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ como el espacio dual topológico de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.*

En otras palabras, un funcional lineal sobre la clase de Schwartz $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una distribución temperada si y solo si existe una constante $C > 0$ y $k, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}\right| \leq C \sum_{[a]\leq k, [b]\leq m} \rho_{a,b}(\varphi), \tag{11}$$

donde $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ denota en corchete de dualidad entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Demos ahora algunos ejemplos clásicos de distribuciones temperadas:

i) Toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [1, +\infty]$. En este caso el corchete de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ se escribe como

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

ii) Toda función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface $|f(x)| \leq c(1 + |x|)^s$ donde $c > 0$ es una constante y $s \in \mathbb{R}$. De igual manera que el ejemplo anterior, el corchete de dualidad se escribe

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

iii) Un ejemplo de distribución temperada que no es una función (pero si una medida) está dada por la masa de Dirac δ_0 definida como

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)d\delta_0(x) = \varphi(0), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

iv) De manera más general, toda medida boreliana y finita μ es una distribución temperada, donde el corchete de dualidad se escribe como

$$\langle \mu, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)d\mu(x), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

v) Finalmente, un ejemplo de distribución temperada sobre la recta real $\mathbb{R}$, que no es ni una función ni una medida, está dado por el valor principal de la función de la función $\frac{1}{x}$, notado por $v.p.\frac{1}{x}$, y que está definida como:

$$\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Observación 4 *En el ejemplo i) aquí arriba podemos observar que, para todo* $p \in [1, +\infty]$, *se tiene la inclusión* $L^p(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. *Sin embargo, de manera general, esta inclusión no se verifica para los espacios localmente integrables* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

En efecto, consideremos por ejemplo la función $e^{|x|^2}$. Podemos ver sin ningún problema que para todo $p \in [1, +\infty]$ se tiene $e^{|\cdot|^2} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$, pero esta función *no es una distribución temperada*: si suponemos $e^{|\cdot|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, entonces por (11) sabemos que existe $C > 0$ y $k, m \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ se tiene

$$\left| \left\langle e^{|\cdot|^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} \right| \leq C \sum_{[a] \leq k, [b] \leq m} \rho_{a,b}(\varphi) < +\infty.$$

Ahora, si consideramos en particular la función $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, donde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, obtenemos inmediatamente una contradicción pues se tiene

$$\left\langle e^{|\cdot|^2}, e^{-|\cdot|^2} \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{|x|^2} e^{-|x|^2} dx = +\infty.$$

Antes de pasar a la siguiente sección, recordemos dos operaciones básicas en el espacio de las distribuciones temperadas. Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$:

- **Derivación:** para todo multi-indice $a \in \mathbb{N}^3$ se define $\partial^a u$ mediante el corchete de dualidad como

$$\langle \partial^a u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = (-1)^{[a]} \langle u, \partial^a \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

- **Convolución con una función en la clase de Schwartz:** sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y denotemos por $\widetilde{\psi}$ su reflexión respecto al origen, es decir, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x)$.

  Definimos la convolución $\psi * u$ como

$$\langle \psi * u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \left\langle u, \widetilde{\psi} * \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

- **Multiplicación con una función en la clase de Schwartz:** sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Definimos el producto ψu como
$$\langle \psi u, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle u, \psi\varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Una vez que hemos introducido rápidamente el espacio de las distribuciones temperadas podemos definir la transformación de Fourier sobre este espacio.

La transformación de Fourier

Empezamos con la siguiente definición.

Definición 8 *(Transformacion de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas) Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.*

*1) **Transformación de Fourier:** la tranformación de Fourier de la distribución temperada u, denotada por $\widehat{u}$, se define como*
$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \tag{12}$$
donde la expresión $\widehat{\varphi}$ está dada en la Definición 4.

*2) **Transformación de Fourier inversa:** la tranformación de Fourier inversa de la distribución temperada u, denotada por $(u)^\vee$, se define como*
$$\left\langle (u)^\vee, \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \left\langle u, (\varphi)^\vee\right\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \tag{13}$$
donde la expresión $(\varphi)^\vee$ está dada en la Definición 5.

Hagamos ahora las siguientes observaciones:

- En las formulas (12) y (13) podemos observar que la definición de transformación de Fourier y de transformación de Fourier inversa, introducidas en el marco de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, pueden ser extendidas al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ mediante el corchete de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$.

- Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Se tiene también $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ pues por la Proposición 1 se tiene $\psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ y se tiene además la inclusión $L^1(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Entonces, las definiciones de la transformación de Fourier de la función ψ, $\widehat{\psi}$, vista como elemento de la clase se Schwartz y como distrunción temperada coinciden.

  En efecto, para mayor claridad en la exposición, notemos por un momento $\mathcal{F}(\psi)$ la transformación de Fourier de ψ vista como elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ y notemos por $\widehat{\psi}$ la transformación de Fourier de ψ vista como elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Entonces mostraremos la identidad $\mathcal{F}(\psi) = \widehat{\psi}$.

  Por la formula (12) se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,
$$\langle \mathcal{F}(\psi), \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle \psi, \widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

  Recordemos ahora que por la Definición 4 se tiene $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i\eta\cdot x}\varphi(\eta)d\eta$, y entonces en la identidad precedente escribimos
$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i\eta\cdot x}\varphi(\eta)d\eta\right)dx,$$
  donde, por el teorema de Fubini y por la Definición 4 se tiene
$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i\eta\cdot x}\varphi(\eta)d\eta\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i\eta\cdot x}\psi(x)dx\right)\varphi(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^3}\widehat{\psi}(\eta)\varphi(\eta)d\eta = \langle\widehat{\psi}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}.$$

  Vemos entonces que, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ se tiene la identidad $\langle \mathcal{F}(\psi), \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle\widehat{\psi}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$ y entonces $\mathcal{F}(\psi) = \widehat{\psi}$.

Usando el corchete de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$, podemos extender la mayoría de propiedades de la transformación de Fourier sobre la clase se Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ al espacio de las distribuciones temperadas.

En la siguiente proposición enunciamos estas propiedades, donde las identidades que escribiremos deben entenderse en el sentido de las distribuciones temperadas, es decir, dadas $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ se tiene $u = v$ si y solo si

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle v, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Proposición 3 *Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, sea $\widehat{u}$ su transformación de Fourier dada en la formula (12) y sea $(u)^\vee$ su transformación de Fourier inversa dada en la formula (13). Entonces se tiene las siguientes propiedades que serán enunciadas para la transformación de Fourier $\widehat{u}$ pero que también se verifican para la transformación inversa $(u)^\vee$.*

*1) **Isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$:** se tiene $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ y $(u)^\vee \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.*

*2) **Inversión:** $(\widehat{u})^\vee = \widehat{(u)^\vee} = u$.*

*3) **Convolución:** sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces se tiene $\widehat{\psi * u} = \widehat{\psi}\widehat{u}$.*

*4) **Derivación:** sea $a \in \mathbb{N}^3$ un multi-indice, entonces se tiene $\widehat{\partial^a u} = (2\pi i \xi)^a \widehat{u}$ y $\partial^a \widehat{u} = (\widehat{(-2\pi i x)^a u})$.*

Es interesante comparar esta proposición con la Proposición 2:

- Podemos observar, en primer lugar, que casi todas la propiedades de la transformación de Fourier definida sobre la clase de Schwartz $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ se extiende al marco mucho más general del espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.
- Por otro lado, siempre en la Proposición 2, podemos observar que la única propiedad que no se generaliza al espacio de las distribuciones temperadas es la formula de Plancherel dada en el punto 3). Esto es normal pues si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, de manera general, no tenemos ninguna información adicional para asegurar que $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Dentro de la propiedades de la transformación de Fourier dadas en la Proposición 3 (o de igual manera en la Proposición 2) conviene prestar particular atención a las propiedades dadas en los puntos 3) y 4):

- En el punto 3) podemos observar que la transformación de Fourier *cambia* el producto de convolución con la multiplicación, mientras que en el punto 4) observamos que la transformación de Fourier *cambia* la derivación por la multiplicación por un polinomio del mismo orden de la derivación.

- Estas propiedades de la transformación de Fourier son muy utiles ya sea cuando usamos esta transformación para el estudio de las soluciones ciertas ecuaciones en derivadas parciales o cuando usamos esta transformación para definir los espacios de Sobolev como lo veremos en la siguiente lección.

Finalmente, antes de cerrar esta sección, es interesante señalar que, inspirándose en la Definición 6, el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ (con $s \in \mathbb{R}$) puede también ser definido en la marco de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ de la siguiente manera: dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, definimos

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u = (|\xi|^s \widehat{u})^\vee,$$

siempre y cuando $|\xi|^s \widehat{u}$ pertenezca a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.