Lección n°2: Espacios de Sobolev

EPN & USFQ Septiembre 2018

Índice

1. Introducción

En la lección anterior introducimos dos herramientas de base: los espacios de Lebesgue y la transformación de Fourier. En esta lección usaremos estas herramientas para estudiar (rápidamente) los espacios de Sobolev que son una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas en parciales y en particular en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes como lo veremos en la siguiente lección.

La idea de base de los espacios de Sobolev consiste en estudiar la *regularidad* de una función mediante el estudio del *tamaño* de sus derivadas débiles (o derivadas en el sentido de las distribuciones). De manera más precisa, se considera las derivadas débiles de una función y se mide su tamaño usando los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [1, +\infty[$.

En esta lección, para medir el tamaño de las derivadas débiles de una función, utilizaremos el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^3)$ pues este espacio nos será de gran utilidad para el estudio posterior.

Es importante señalar que un estudio riguroso y detallado de los espacios de Sobolev está fuera de los objetivos de este curso y sería material suficiente para otro curso completo. Por esta razón, introduciremos estos espacios muy rápidamente y sin insistir en mayores detalles de su definición sino más bien en las principales propiedades de estos espacios que se necesitan en el "día a día".

2. Espacios de Sobolev no homogéneos

Empezamos recordando que dada una distribución temperada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, para todo multi-indice $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$, donde $|a| = a_1 + a_2 + a_3 \geq 0$ es su tamaño, definimos la derivada (en el sentido de las distribuciones) $\partial^a u$ como

$$\langle \partial^a u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = (-1)^{|a|} \langle u, \partial^a \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3). \tag{1}$$

Tenemos así una primera definición.

Definición 1 (Espacios de Sobolev no homogéneos de orden entero positivo) *Sea $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo $H^k(\mathbb{R}^3)$ como*

$$H^k(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{H^k} < +\infty\}, \tag{2}$$

donde

$$\|u\|_{H^k} = \|u\|_{L^2} + \sum_{0<|a|\leq k} \|\partial^a u\|_{L^2}. \tag{3}$$

Hagamos ahora las siguientes observaciones y comentarios:

- En la sección 3 explicaremos en detalle el carácter *no homogéneo* de estos espacios.
- En las formulas (2) y (3) vemos entonces que el espacio de Sobolev no homogéneo de orden $k \in \mathbb{N}$: $H^k(\mathbb{R}^3)$, consiste en el espacio de las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3)$ tales que $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y para todo multiindice $0 < |a| \leq k$ se tiene $\partial^a u \in L^2(\mathbb{R}^3)$, es decir, medimos el tamaño de la función u y de sus derivadas $\partial^a u$ en el marco del espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$.
- Señalemos rápidamente para medir el tamaño de las funciones y de sus derivadas débiles se puede usar (de manera general) cualquier espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p \in [1, +\infty[$ en donde se obtienen los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ definidos por las mismas formulas (2) y (3) pero con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ en lugar de la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. En particular se tiene $W^{k,2}(\mathbb{R}^3) = H^k(\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, nos concentraremos en estudiar unicamente los espacios $H^k(\mathbb{R}^3)$ pues estos espacios aparecerán de manera natural en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- Los espacios $H^k(\mathbb{R}^3)$ son espacios de Hilbert (lo que justifica la letra H en su notación) con el producto escalar
$$\langle u, v\rangle_{H^k} = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)\, v(x)dx + \sum_{0<|a|\leq k} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial^a u(x))(\partial^a v(x))dx,$$
que induce una norma *equivalente* a la norma $\|\cdot\|_{H^k}$ dada en (3).
- El parámetro $k \in \mathbb{N}$ mide la regularidad de la función u y en particular se tiene $H^0(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3)$. Se tienen además las siguientes inclusiones: para dos números naturales $0 \leq k_1 \leq k_2$ se tiene
$$H^{k_2}(\mathbb{R}^3) \subset H^{k_1}(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3),$$
es decir, los espacios H^k son decrecientes conforme el parámetro de regularidad $k \in \mathbb{N}$ aumenta.

En la siguiente proposición veremos cómo podemos caracterizar los espacios $H^k(\mathbb{R}^3)$ mediante la transformación de Fourier. Esta caracterización es muy útil pues nos permite definir de manera natural los espacios de Sobolev de orden fraccionario $H^s(\mathbb{R}^3)$ (con $s \in \mathbb{R}$) como lo veremos más adelante.

Antes de enunciar esta proposición conviene fijar algunas notaciones:

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ escribiremos la relación $a \approx b$ si y solo si existen dos constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, que no dependen ni de a ni de b, tales que se tiene $c_1\, a \leq b \leq c_2\, a$.
- De igual manera escribiremos $a \lesssim b$ si y solo si existe une constante $c_3 > 0$ (que no de ni de a ni de b) tal que se tiene $a \leq c_3\, b$.

Se tiene entonces la siguiente caracterización de los espacios $H^k(\mathbb{R}^3)$:

Proposición 1 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y el espacio de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^3)$ dado en la Definición 1. Para todo $u \in H^k(\mathbb{R}^3)$ se tiene*

$$\|u\|_{H^k} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \approx \|\widehat{u}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2k} |\widehat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Prueba. Empezamos por mostrar la siguiente estimación: $\|u\|_{H^k}^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}|^2 d\xi$.

Por la definición de la cantidad $\|u\|_{H^k}$ dada en (3) y utilizando la formula de Plancherel y las propiedades de la transformación de Fourer podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^k}^2 &\lesssim \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{0<|a|\leq k}\|\partial^a u\|_{L^2}^2 \lesssim \|\widehat{u}\|_{L^2}^2 + \sum_{0<|a|\leq k}\|\widehat{\partial^a u}\|_{L^2}^2 \lesssim \|\widehat{u}\|_{L^2}^2 + \sum_{0<|a|\leq k}\|\xi^a \widehat{u}\|_{L^2}^2 \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{u}|^2 d\xi + \sum_{0<|a|\leq k}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2|a|}|\widehat{u}|^2 d\xi\right) \lesssim \sum_{0<|a|\leq k}\int_{\mathbb{R}^3}(|\widehat{u}|^2 + |\xi|^{2|a|}|\widehat{u}|^2)d\xi \\
&\lesssim \sum_{0<|a|\leq k}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^{2|a|})|\widehat{u}|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para todo $|a|\leq k$ se tienen las siguientes estimaciones $1+|\xi|^{2|a|} \lesssim (1+|\xi|)^{2|a|} \lesssim (1+|\xi|)^{2k} \lesssim (1+|\xi|^2)^k$, y entonces podemos escribir la estimación deseada

$$\sum_{0<|a|\leq k}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^{2|a|})|\widehat{u}|^2 d\xi \lesssim \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}|^2 d\xi.$$

Por otro lado, la siguiente estimación $\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}|^2 d\xi \lesssim \|\widehat{u}\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}|\widehat{u}|^2 d\xi$, se deduce directamente de la estimación puntual $(1+|\xi|^2)^k \lesssim 1+|\xi|^{2k}$.

Para terminar, estudiemos la estimación: $\|\widehat{u}\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}|\widehat{u}|^2 d\xi \lesssim \|u\|_{H^k}^2$.

Volviendo a la variable de espacio, utilizando siempre la formula de Plancherel y la propiedades de la transformación de Fourier, podemos escribir

$$\|\widehat{u}\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}|\widehat{u}|^2 d\xi \lesssim \|u\|_{L^2} + \sum_{|a|=k}\|\partial^a u\|_{L^2}^2 \lesssim \|u\|_{L^2} + \sum_{0<|a|\leq k}\|\partial^a u\|_{L^2}^2 \lesssim \|u\|_{H^k}^2.$$

$\blacksquare$

Es interesante hacer las siguientes observaciones:

- Recordemos que el objetivo de los espacios de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^3)$ es medir la regularidad de las funciones. Volviendo a la primera estimación en la formula (4): $\|u\|_{H^k} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$, observamos que la regularidad de una función $u\in H^k(\mathbb{R}^3)$ puede ser estudiada a través del decrecimiento de su transformación de Fourier.

  En efecto, por esta estimación se tiene $u\in H^k(\mathbb{R}^3)$ si y solo si $(1+|\cdot|^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R}^3)$ en donde vemos que, para asegurar que la función $(1+|\cdot|^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{u}$ pertenezca al espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$, la función $\widehat{u}$ debe decrecer al infinito más rápido que el inverso del polinomio $(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}$.

- Volvamos ahora a la segunda estimación en la formula (4): $\|u\|_{H^k} \approx \|\widehat{u}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}|\widehat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$, de donde podemos deducir las siguientes informaciones:

  $\Rightarrow$ Recordemos que en la lección anterior definimos el operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ (con $s\in\mathbb{R}$) mediante la transformación de Fourier como:

$$(\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u})(\xi) = |\xi|^s\widehat{u}(\xi), \tag{5}$$

entonces, tomando $s = k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\widehat{((-\Delta)^{\frac{k}{2}} u)}(\xi) = |\xi|^k \widehat{u}(\xi),$$

y por tanto podemos escribir

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2k} |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \widehat{(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \widehat{(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u} \right\|_{L^2}.$$

Luego, volviendo a la variable espacial (usando la formula de Plancherel) vemos que se tiene la estimación

$$\|u\|_{H^k} \approx \|u\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\frac{k}{2}} u \right\|_{L^2}. \tag{6}$$

⇒ Vemos así que la información $u \in H^k(\mathbb{R}^3)$ puede ser caracterizada por las informaciones $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^3)$. En particular, la información $(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ nos dice que es suficiente controlar (en términos de la norma $\|\cdot\|_{L^2}$) unicamente las derivadas de orden k de la función u y no las derivadas de orden menor a k.

Las expresiones (5) y (6) abren la puerta a la definición de los espacios de Sobolev *fraccionarios* que ahora son introducimos de forma natural de la siguiente manera:

Definición 2 (Espacios de Sobolev no homogéneos fraccionarios) *Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo $H^s(\mathbb{R}^3)$ como*

$$H^s(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{H^s} < +\infty\}, \tag{7}$$

donde

$$\|u\|_{H^s} = \|u\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right\|_{L^2}. \tag{8}$$

- Vemos entones que el espacio de Sobolev (no homogéneo) fraccionario $H^s(\mathbb{R}^3)$ constituye el espacio de las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ tales que $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^3)$.
- Al igual que los espacios de Sobolev de orden entero $H^k(\mathbb{R}^3)$ (con $k \in \mathbb{N}$), los espacios de Sobolev fraccionarios miden la regularidad de las funciones pero de manera *más fina* pues ahora medimos esa regularidad por medio del parámetro $s \geq 0$ que es un numero real no necesariamente entero.
- Los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ son también espacios espacios de Hilbert con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)\, v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x) \right) \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x) \right) dx,$$

  que induce una norma *equivalente* a la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ dada en (8).
- En la formulas (8) y (6) podemos ver que si tomamos $s = k \in \mathbb{N}$ entonces la definición del espacio $H^k(\mathbb{R}^3)$ dada en la Definicion 2 coincide con la defincíón del espacio $H^k(\mathbb{R}^3)$ dada en la Definición 1 y se tiene la equivalencia de normas $\|\cdot\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}}(\cdot)\|_{L^2} \approx \|\cdot\|_{H^k}$.

⇒ Por esta razón, de ahora en adelante, estudiaremos las principales propiedades de los espacios de Sobolev en el marco más general de los espacios fraccionarios.

Siguiendo las mismas lineas de la prueba de la Proposicion 1 se tiene la siguiente caracterización de los espacios de Sobolev fraccionarios:

Proposición 2 *Sea $s \geq 0$ y el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ dado en la Definición 2. Para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ se tiene*

$$\|u\|_{H^s} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

La expresión a la derecha en la formula (9) es de gran utilidad cuando se trabaja con los espacios $H^s(\mathbb{R}^3)$. En particular veremos que esta expresión nos permite definir los espacios de Sobolev con parámetro de regularidad negativo.

Definición 3 (Espacios de Sobolev no homogéneos de regularidad negativa) *Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio de Sobolev $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ como*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{H^{-s}} < +\infty\}, \tag{10}$$

donde

$$\|u\|_{H^{-s}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{-s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Los espacios de Sobolev de regularidad negativa $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ son espacios espacios funcionales que aparecen en la practica y es por eso que es necesario estudiar un poco más en detalle algunas de sus principales propiedades.

Empezamos estudiando la relación que existe entre el espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ con ($s \geq 0$) y el espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$.

Proposición 3 *Sea $s \geq 0$. Sea $H^s(\mathbb{R}^3)$ el espacio de Sobolev dado en la Definición 2 y $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ el espacio de Sobolev dado en la Definición 3. Entonces se tiene $(H^s(\mathbb{R}))' = H^{-s}(\mathbb{R}^3)$.*

Vemos de esta manera que el espacio de Sobolev de regularidad $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ es el espacio dual del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$. La prueba de esta proposición es técnica por lo que solo expondremos las ideas principales: en primer se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4 *Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ la clase se Schwartz y sea $s \geq 0$. Entonces:*

1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ es denso en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$, además,

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ es denso en el espacio de Sobolev $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$.

Ahora, consideremos el funcional bilineal $B(\cdot,\cdot) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$B(\varphi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\phi(x)dx,$$

donde se tiene

$$|B(\varphi, \phi)| \leq \|\varphi\|_{H^{-s}} \|\phi\|_{H^s}.$$

En efecto, por la relación de Parseval, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las formulas (9) y (11) podemos escribir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\phi(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)d\xi \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{\varphi}(\xi) \right) \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\phi}(\xi) \right) d\xi \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{-s} |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{s} |\widehat{\phi}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi\|_{H^{-s}} \|\phi\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Ahora, usando la densidad de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ en el espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ y en el espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ dadas por la Proposición 4, se puede mostrar que este funcional bilineal $B(\cdot,\cdot)$ se extiende a un único funcional bilineal y continuo

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_{H^{-s}\times H^s} : H^{-s}(\mathbb{R}^3)\times H^s(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que para todo $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ y $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$ se tiene

$$|\langle u,v\rangle_{H^{-s}\times H^s}| \leq \|u\|_{H^{-s}}\|v\|_{H^s}. \tag{12}$$

Este funcional bilineal es precisamente el corchete de dualidad entre el espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ y el espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$.

Además, se puede mostrar que para todo $g \in (H^s)'$ existe una única distribución temperada $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ tal que para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ se tiene

$$\langle g,\varphi\rangle_{(H^s)'\times H^s} = \langle u,\varphi\rangle_{H^{-s}\times H^s},$$

y se tiene $\|g\|_{(H^s)'} = \|u\|_{H^{-s}}$.

Observación 1

1) *Como $H^s(\mathbb{R}^3)$ es un espacio de Hilbert y como $H^{-s}(\mathbb{R}^3) = \left(H^s(\mathbb{R}^3)\right)'$ entonces $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ es también un espacio de Hilbert para todo $s \geq 0$.*

2) *Dado que $H^s(\mathbb{R}^3)$ es en particular un espacio* reflexivo *se tiene entonces $\left(H^{-s}(\mathbb{R}^3)\right)' = H^s(\mathbb{R}^3)$ para todo $s \geq 0$.*

Una vez que hemos introducido los espacios de Sobolev (no homogéneos) fraccionarios (con parámetro de regularidad positivo y negativo) en la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades de estos espacios que son de utilidad.

Proposición 5 (Algunas propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos)

1) ***Relaciones de inclusión****: sean $s_1 \leq s_2 \leq 0 \leq s_3 \leq s_4$ números reales. Entonces se tienen las siguientes inclusiones:*

$$H^{s_4}(\mathbb{R}^3) \subset H^{s_3}(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^3) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^3). \tag{13}$$

2) ***Desigualdad de interpolación:*** *sean s_1, s_2 dos números reales. Sea $u \in H^{s_1}(\mathbb{R}^3)\cap H^{s_2}(\mathbb{R}^3)$ entonces para todo $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, con $\theta \in [0,1]$, se tiene $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ y se tiene además*

$$\|u\|_{H^s} \leq c\|u\|_{H^{s_1}}^{\theta}\|u\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}. \tag{14}$$

3) ***Relación con las funciones de test:*** *el espacio de las funciones de test $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ está contenido y es denso en $H^s(\mathbb{R}^3)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Para cerrar esta sección, es interesante hacer la siguientes observaciones con respecto al parámetro de regularidad $s \in \mathbb{R}$:

- Si $s \geq 0$ entonces por la formula (13) se tiene $H^s(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ y vemos entonces que todos los elementos del espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ son necesariamente funciones.
- Si $s < 0$ entonces el espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ puede contener objetos que no son necesariamente funciones: se tiene por ejemplo que la masa de Dirac δ_0 pertenece al espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ si $s < -\frac{3}{2}$. En efecto, dado que $\widehat{\delta_0} = 1$ entonces por la formula (11) se tiene: $\|\delta_0\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$, y se puede ver sin ningún problema que esta integral converge cuando $s < -\frac{3}{2}$.

3. Espacios de Sobolev homogéneos

En la sección anterior introducimos (rápidamente) los espacios de Sobolev no homogéneos $H^s(\mathbb{R}^3)$ (con $s \in \mathbb{R}$) y empezamos esta sección explicando el carácter *no homogeneo* de estos espacios. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 4 (Homogeneidad) *Sea E un espacio funcional dado por*

$$E = \{u \in S^{'}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_E < +\infty\},$$

donde $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty[$ un funcional definido sobre E. Decimos que este espacio es homogéneo de grado $\sigma \in \mathbb{R}$ si para todo $u \in E$ se verifica: definiendo la dilatación de la distribución u como $u_\lambda(\cdot) = u(\lambda \cdot)$, donde $\lambda > 0$, entonces se tiene

$$\|u_\lambda\|_E = \lambda^\sigma \|u\|_E. \tag{15}$$

Un ejemplo clásico de espacios homogéneos está dado por los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ (con $p \in [1, +\infty]$) donde se tiene

$$\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p}, \tag{16}$$

y entonces $L^p(\mathbb{R}^3)$ es un espacio homogéneo de grado $-\frac{3}{p}$.

Veamos ahora que los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ (con $s \in \mathbb{R}$) definidos en la sección precedente *no son espacios homogéneos* en el sentido de la Definición 4. En efecto, para fijar las ideas consideremos el caso cuando $s \geq 0$. Por la formula (8) sabemos entonces que la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ se compone de dos partes: para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ se tiene

$$\|u\|_{H^s} = \|u\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}, \tag{17}$$

y si consideramos ahora la dilatación de la función u con respecto al parametro $\lambda > 0$: u_λ, se tiene

$$\|u_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{-\frac{3}{2}} \|u\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{s-\frac{3}{2}} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}. \tag{18}$$

Observamos de esta manera que los dos componentes de la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ tiene grados de homogeneidad *diferentes* ($-\frac{3}{2}$ y $s - \frac{3}{2}$ respectivamente) y entonces la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ no verifica la propiedad (15).

Sin embargo, en la practica, es necesario considerar *versiones homogéneas* de los espacios de Sobolev y por lo tanto necesitamos definir los *espacios de Sobolev homogéneos*. En particular, en la siguiente lección veremos que los espacios de Sobolev homogéneos son un marco natural para construir soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Volviendo a las formulas (17) y (18), podemos observar que una manera natural de definir los espacios de Sobolev homogéneos es *quitar* el término $\|\cdot\|_{L^2}$ de la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ y considerar unicamente el segundo termino de esta norma que contiene el parámetro de regularidad $s \geq 0$: $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\cdot)\|_{L^2}$.

Vemos entonces que una definición natural de los espacios de Sobolev homogéneos, que notaremos por $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ con $s \geq 0$, es la siguiente:

Definición 5 (Espacios de Sobolev homogéneos-definición general)

1) Sea $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev homogéneo de orden entero k como

$$\dot{H}^k(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \sum_{|a|=k} \|\partial^a u\|_{L^2} < +\infty\}. \tag{19}$$

2) Sea $s > 0$. Definimos el espacio de Sobolev homogéneo fraccionario $\dot{H}^s$ como

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2} < +\infty\}. \tag{20}$$

Para $k \in \mathbb{N}$ se denota $\|u\|_{\dot{H}^k} = \sum_{|a|=k} \|\partial^a u\|_{L^2}$ y de manera general para $s \geq 0$ se denota $\|u\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}$.

Se tiene entonces que estos espacios son homogéneos de orden $s - \frac{3}{2}$ (para todo $s \geq 0$) en el sentido de la Definición 4.

Sin embargo, se debe prestar *mucha atención* cuando se trabaja con los espacios de Sobolev homogéneos pues el precio a pagar por la propiedad de homogeneidad de estos espacios es (entre otras cosas) la perdida de la estructura de espacio normado:

$\Rightarrow$ *las cantidades $\|\cdot\|_{\dot{H}^k}$ y $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ son semi-normas pero* ***no son normas***.

Para convencerse de esto consideremos por ejemplo $s = k = 1$. Se tiene entonces

$$\|u\|_{\dot{H}^1} = \|\vec{\nabla} u\|_{L^2},$$

donde $\vec{\nabla}$ denota el operador gradiente, y vemos de esta manera que todas las funciones constantes $u = c$ verifican $\|u\|_{\dot{H}^1} = 0$.

Para nuestro estudio posterior, sobre la existencia de las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes, veremos que el espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ es un marco natural para construir estas soluciones estacionarias pero necesitamos que este espacio sea un espacio normado (más aún necesitamos que sea un espacio de Banach !).

Existen varias formas de *evitar* que las funciones constantes pertenezcan al espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ y una manera natural de hacer esto es la siguiente: en la Sección 4.1 estudiaremos una herramienta *fundamental* en el estudio de los espacios de Sobolev conocida como las *desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev*. Adelantándonos un poco, estas desigualdades se escriben de la siguiente manera:

Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev: para $0 < s < \frac{3}{2}$ y $2 < q < +\infty$ tales que

$$-\frac{3}{q} = s - \frac{3}{2}, \tag{21}$$

se tiene

$$\|u\|_{L^q} \leq c\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}, \tag{22}$$

En la Sección 4.1 explicaremos más en detalle estas desigualdades, por ahora observemos que el control de la cantidad $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}$ induce un control sobre la norma $\|u\|_{L^q}$ siempre y cuando los parámetros q y s estén relacionados por (21).

Vemos en particular que cuando $s = 1$ se tiene entonces $q = 6$ lo que nos da la famosa desigualdad de Sobolev en $\mathbb{R}^3$ (que nos será de gran utilidad más adelante):

$$\|u\|_{L^6} \leq \|\vec{\nabla} u\|_{L^2}. \tag{23}$$

Esta desigualdad sugiere *re-definir* el espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ de la siguiente manera

Definición 6 (El espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$) *Definimos el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ como*

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^6(\mathbb{R}^3) : \vec{\nabla} u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}, \tag{24}$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\dot{H}^1} = \|\vec{\nabla} u\|_{L^2} \approx \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}. \tag{25}$$

Siguiendo esta idea, volviendo a la Definición 5 de los espacios de Sobolev homogéneos $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ se tienen las siguientes observaciones con respecto al parámetro de regularidad $s \geq 0$:

Observación 2

1) *Cuando $0 < s < \frac{3}{2}$ se pueden utilizar las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev dadas en (22) para* re-definir *los espacios $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ de la misma manera que el espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ dado en la Definición 6.*

2) *Señalemos rápidamente que cuando $s \geq \frac{3}{2}$, para asegurar que el espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ sea un espacio normado respecto a la cantidad $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\cdot)\|_{L^2}$, es necesario pasar por el marco del espacio de las distribuciones temperadas módulo el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$.*

Sin embargo, un estudio más detallado del espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ está totalmente fuera de los objetivos de este curso y por lo tanto no entraremos en más detalles. El lector que quiera profundizar en este tema (y en general en los espacios de Sobolev) puede consultar el libro *Modern Fourier Analysis* de L. Grafakos.

Motivados por el punto 1) de la Oservación 2, y para fines prácticos en los cálculos que haremos en las siguientes lecciones, vamos a *re-definir* los espacios de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, con $s \in]0, \frac{3}{2}[$, de la siguiente manera:

Definición 7 (El espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ con $0 < s < \frac{3}{2}$) . *Cuando $0 < s < \frac{3}{2}$, definimos el espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ como*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^3) : \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2} < +\infty\}, \tag{26}$$

donde el parámetro $2 < q < +\infty$ está dado por (21).

⇒ De ahora en adelante, cuando nos refiramos a los espacios $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ con $s \in]0, \frac{3}{2}[$ será en el sentido de Definición 7. En el marco de estos espacios el funcional $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ si es una norma.

Pasemos ahora a la definición de los espacios de Sobolev homogéneos de regularidad negativa. Para definir estos espacios utilizaremos la dualidad.

Definición 8 (Espacios de Sobolev homogéneos de regularidad negativa) *Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$ como*

$$\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \left|\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}\right| \leq C\|\varphi\|_{\dot{H}^s}, \ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \right\}, \tag{27}$$

donde para $u \in \dot{H}^{-s}$ definimos la cantidad

$$\|u\|_{\dot{H}^{-s}} = \inf\{C > 0 : |\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} \leq C\|\varphi\|_{\dot{H}^s}, \ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)\}. \tag{28}$$

Se tienen las siguientes observaciones:

- El espacio $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$ puede ser caracterizado como

$$\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)=\left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3):\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}u\|_{L^2}<+\infty\right\}, \tag{29}$$

  y se tiene

$$\|u\|_{\dot{H}^{-s}}=\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}u\|_{L^2}. \tag{30}$$

- Para $s>0$, el operador $(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}$ es también conocido como el *potencial de Riesz* y se define en variable de Fourier como

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}\varphi}(\xi)=\frac{1}{|\xi|^s}\widehat{\varphi}(\xi), \tag{31}$$

  para todo $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

- Señalemos rápidamente que, para $s>0$, la cantidad $\|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}(\cdot)\|_{L^2}$ tampoco es una norma y por lo tanto los espacios $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$ *no son espacios normados*. Para conseguir que esta cantidad sea una norma se puede pasar por el marco del espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$.

  Ahora que hemos introducido los espacios de Sobolev (homogéneos) fraccionarios (con parámetro de regularidad positivo y negativo) estudiaremos algunas de sus principales propiedades. En la medida de los posible intentaremos hacer un estudio comparativo con respecto a las propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos estudiados en la sección anterior.

Proposición 6 (Algunas propiedades de los espacios Sobolev homogéneos)

1) ***No existe ninguna relación de inclusión entre espacios****: dados $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, los espacios $\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3)$ y $\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^3)$ no pueden ser comparados por la relación de inclusión.*

2) ***Desigualdad de interpolación:*** *sean $s_1,s_2\in\mathbb{R}$. Sea $u\in\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3)\cap\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^3)$ entonces para todo $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2$, con $\theta\in[0,1]$, se tiene $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ y se tiene además*

$$\|u\|_{\dot{H}^s}\leq c\|u\|^{\theta}_{\dot{H}^{s_1}}\|u\|^{1-\theta}_{\dot{H}^{s_2}}.$$

3) ***Relación con las funciones de test:*** *si $s\leq-\frac{3}{2}$ entonces el espacio de las funciones de test $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ y de manera más general la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$* no están contenidos *en el espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$.*

4) ***Relación con los espacios de Sobolev no homogéneos:*** *Sea $s\in\mathbb{R}$:*

4.1) Si $s\geq 0$ entonces se tiene la inclusión estricta *$H^s(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ y se tiene $\|u\|_{\dot{H}^s}\leq c\|u\|_{H^s}$.*

4.2) Si $s<0$ entonces se tiene la inclusión estricta *$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\subset H^s(\mathbb{R}^3)$ y se tiene $\|u\|_{H^s}\leq c\|u\|_{\dot{H}^s}$.*

5) ***Derivación fraccionaria:*** *Sean $s_1,s_2\in\mathbb{R}$. Si $u\in\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3)$ entonces $(-\Delta)^{\frac{s_2}{2}}u\in\dot{H}^{s_1-s_2}$ y se tiene*

$$\|(-\Delta)^{\frac{s_2}{2}}u\|_{\dot{H}^{s_1-s_2}}=\|u\|_{\dot{H}^{s_1}}.$$

Antes de cerrar esta sección es **muy útil** hacer el siguiente comentario:

$\Rightarrow$ En la practica, para saber si una distribución $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ pertenece o al espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ o al espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, con $s\in\mathbb{R}$, estudiamos las cantidades $\|u\|_{H^s}$ o $\|u\|_{\dot{H}^s}$ respectivamente y para ello es a menudo muy útil escribir estas cantidades en variable de Fourier:

$$\|u\|_{H^s}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{y}\quad\|u\|_{\dot{H}^s}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^{2d\xi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

En otras palabras, si queremos saber si la distribución u pertenece o no al espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ o $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ debemos entonces estudiar la convergencia de estas cantidades.

Por ejemplo, al final de la Sección 2 vimos que la masa de Dirac δ_0 pertenece al espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ solamente si $s<-\frac{3}{2}$ y esto está dado por el hecho la integral $\|\delta_0\|_{H^s}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ converge solamente si $s<-\frac{3}{2}$.

Veamos ahora que la masa de Dirac *no pertenece* a ningún espacio espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ con $s\in\mathbb{R}$. Dado que $\widehat{\delta_0}=1$ entonces se tiene

$$\|\delta_0\|^2_{\dot{H}^s}=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2s}d\xi,$$

y veremos que esta integral diverge para todo parámetro $s\in\mathbb{R}$. En efecto, para estudiar la convergencia o no de una integral es muy útil *partir* esta integral en varias partes. Escribimos entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2s}d\xi=\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2s}d\xi+\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{2s}d\xi,$$

y consideremos los siguientes casos:

- Si $s\leq -\frac{3}{2}$ entonces la función $|\xi|^{2s}$ no es integrable cerca del origen: pasando a coordenadas radiales $\rho=|\xi|$, donde en el caso del espacio $\mathbb{R}^3$ el jacobiano está dado por la expresión $\rho^{3-1}=\rho^2$; y dado que $s\leq -\frac{3}{2}$ entonces se tiene $2+2s\leq -1$ y por lo tanto:

$$\int_{|\xi|<1}|\xi|^{2s}d\xi=\int_0^1\rho^2\rho^{2s}d\rho=\int_0^1\rho^{2-2s}d\rho=+\infty.$$

- Si $s>-\frac{3}{2}$ entonces la función $|\xi|^{2s}$ no es integrable en el infinito: pasando siempre a coordenadas radiales y dado que $s>-\frac{3}{2}$ entonces se tiene $2+2s>-1$ y por lo tanto:

$$\int_{|\xi\geq 1}|\xi|^{2s}d\xi=\int_1^{+\infty}\rho^{2-2s}d\rho=+\infty.$$

Una vez que hemos dado un corto panorama general de los espacios de Sobolev (no homogéneos y homogéneos) vamos a estudiar tres herramientas *fundamentales* para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales que se tienen en el marco de estos espacios.

4. Tres herramientas fundamentales

Es muy importante mencionar que hasta ahora nos hemos limitado a trabajar en el espacio $\mathbb{R}^3$ pues en la siguientes lecciones consideraremos las ecuaciones de Navier-Stokes en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, y unicamente en esta sección, enunciaremos los siguientes resultados en el marco general del espacio $\mathbb{R}^d$ donde $d\in\mathbb{N}$ es la dimensión. El objetivo de esto es proporcionar al lector herramientas que son **gran utilidad** no solo en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio $\mathbb{R}^3$ sino también para otras ecuaciones en derivadas parciales en el espacio $\mathbb{R}^d$.

4.1. Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev

Las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev nos permiten controlar el tamaño de una función u, en términos de la norma del espacio $L^q(\mathbb{R}^d)$, mediante el control de su derivada fraccionaria $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u$ en términos del espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$, siempre y cuando los parámetros q,s y p verifiquen una *estricta* relación que está determinada por la homogeneidad de los espacios que intervienen.

En las formulas (21) y (22) enunciamos estas desigualdades en el caso particular del parámetro $p=2$ y en dimensión $d=3$ pero en esta sección daremos introduciremos las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev en un marco más general cuando consideramos el parámetro $1 < p < +\infty$ y $d \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 1 (Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Sean* $1 < p < q < +\infty$ *y* $0 < s < \frac{d}{p}$. *Si*

$$-\frac{d}{q} = s - \frac{d}{p}, \tag{33}$$

entonces se tiene

$$\|u\|_{L^q} \leq c\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^p}. \tag{34}$$

Estas desigualdades son *rígidas* en el sentido que podemos escribir la estimación (34) unicamente si los parámetros q, s y p verifican la relación (33), en donde podemos observar que la cantidad $-\frac{d}{q}$ corresponde precisamente al grado de homogeneidad asociado a la norma $\|\cdot\|_{L^q}$ mientras que la cantidad $s - \frac{d}{p}$ es la homogeneidad asociada a la semi-norma $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\cdot)\|_{L^p}$.

En la Lección n°5 del curso de *Espacios de Lorentz* de D. Chamorro se puede encontrar una demostración interesante de este teorema que hace intervenir los espacios de Lorentz y los potenciales de Riesz.

4.2. Leyes de producto

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que introduciremos en la siguiente lección, son ecuaciones en derivadas parciales *no lineales* y este carácter *no lineal* está dado por la presencia de un término de transporte que *en cierto sentido* se comporta como el termino no lineal u^2.

El hecho que debamos tratar este termino no lineal en el marco de los espacios de Sobolev motiva el estudio del siguiente resultado.

Teorema 2 (Leyes de producto 1) *Sean* $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *y sean* $s \geq 0$.

1) *Si* $s > \frac{d}{2}$ *entonces se tiene* $\|u\, v\|_{H^s} \leq c\|u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}$.

2) *Si* $s = \frac{d}{2}$, *para* $\varepsilon > 0$ *entonces se tiene* $\|u\, v\|_{H^{\frac{d}{2}-\varepsilon}} \leq c\|u\|_{H^{\frac{d}{2}}}\|u\|_{H^{\frac{d}{2}}}$.

3) *Si* $\frac{d}{4} < s < \frac{d}{2}$ *entonces se tiene* $\|u\, v\|_{H^{2s-\frac{d}{2}}} \leq c\|u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}$.

Se tiene además el siguiente resultado que hace intervenir los espacios de Sobolev homogéneos:

Teorema 3 (Leyes de producto 2) *Sean* $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. *Sean* $s \geq 0$ *y* $0 < \delta < \frac{d}{2}$. *Entonces se tiene:*

1) $\|u\, v\|_{H^{s+\delta-\frac{d}{2}}} \leq c\left(\|u\|_{\dot{H}^\delta}\|v\|_{H^s} + \|v\|_{\dot{H}^\delta}\|u\|_{H^s}\right)$

2) $\|u\, v\|_{\dot{H}^{s+\delta-\frac{d}{2}}} \leq c\left(\|u\|_{\dot{H}^\delta}\|v\|_{\dot{H}^s} + \|v\|_{\dot{H}^\delta}\|U\|_{\dot{H}^s}\right)$

En los Teoremas 2 y 3 observamos en qué casos del parámetro de regularidad $s \geq 0$ podemos asegurar que la multiplicación de dos funciones que pertenecen a un espacio de Sobolev es también elemento de un espacio de Sobolev.

4.3. Lema de Rellich-Lions

Un método (a menudo utilizado) para construir una solución de una ecuación en derivadas parciales consiste en obtener dicha solución como el limite de una familia de soluciones que verifican ciertas ecuaciones aproximadas: se construyen soluciones de las ecuaciones aproximadas y se quiere mostrar que esta familia de soluciones aproximadas converge hacia un limite, el cual deberá verificar la ecuación que se desea resolver.

Para mostrar la existencia de al menos un limite de la familia de soluciones aproximadas los lemas de Rellich-Lions son de gran utilidad. Existen varias versiones de estos lemas y enunciamos a continuación la versión que nos será de utilidad para estudiar la existencia de las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Teorema 4 (Lema de Rellich-Lions) *Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ con $s > 0$. Si para toda función de test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ existe une constante $0 < C_\varphi < +\infty$, que solo depende de la funcion φ, tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi u_n\|_{H^s} \leq C_\varphi,$$

entonces existe una función $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y existe $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que esta subsucesión converge a la función u en la topología fuerte del espacio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$: para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|\phi\,(u_{n_k} - u)\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{35}$$