Lección n°4: Existencia de soluciones estacionarias

EPN & USFQ Septiembre 2018

Índice

1. Introducción

En la lección precedente introdujimos rápidamente las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y en todo el espacio $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0, \quad \text{sobre }]0,T[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, \quad div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Recordemos que estas ecuaciones el termino $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, que usualmente depende de la variable temporal $t \in [0,T]$ (donde $T > 0$) y de la variable espacial $x \in \mathbb{R}^3$, representa la fuerza exterior que se ejerce sobre el fluido y para ilustrar este término $\vec{f}$ habíamos dado como ejemplo de fuerza exterior a la fuerza de gravedad que actuá sobre una cascada de agua que cae de cierta altura.

Si pensamos más detenidamente en este ejemplo podemos darnos cuenta que la fuerza de gravedad es un ejemplo de fuerza exterior $\vec{f}$ pero que *no depende* de la variable temporal pues actuá sobre la cascada de agua indefinidamente en el tiempo. Este ejemplo nos motiva a pensar en el siguiente problema para las ecuaciones de Navier-Stokes (1): si consideramos ahora una fuerza exterior que sólo depende de la variable espacial, es decir se tiene $\vec{f} = \vec{f}(x)$, y la cual llamaremos de ahora en adelante una *fuerza estacionaria*, entonces surgen las siguientes preguntas:

- ¿ Es posible construir un campo de velocidad $\vec{U} = \vec{U}(x) \in \mathbb{R}^3$ y un termino de presión $P = P(x) \in \mathbb{R}$ que verifiquen las ecuaciones de Navier-Stokes (1) pero que solo dependan de la variable espacial?
- ¿ En qué espacio funcional se deberían construir las funciones $\vec{U}$ y P ?
- ¿ Cómo construir estas funciones ?

El par de funciones $(\vec{U}, P)$ que verifica las ecuaciones de Navier-Stokes y que unicamente dependen de la variable espacial es llamado *solución estacionaria de las ecuaciones de Navier-Stokes* y el objetivo de esta lección es responder a estas preguntas.

2. Algunas estimaciones *a priori*

Supongamos por un momento que dada una fuerza exterior estacionaria $\vec{f}$ hemos construido $(\vec{U}, P)$ una solución estacionaria de las ecuaciones de Navier-Stokes (1), es decir el par $(\vec{U}, P)$ verifica las ecuaciones

$$\partial_t \vec{U} = \Delta \vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla} P + \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0.$$

Pero, dado que el campo de velocidad $\vec{U}$ no depende de la variable de tiempo t entonces se tiene

$$\partial_t \vec{U} = 0,$$

y entonces el par $(\vec{U}, P)$ verifica las ecuaciones

$$0 = \Delta\vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P + \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0,$$

las cuales vamos a re-escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P + \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0. \qquad (2)}$$

Estas ecuaciones son también conocidas como las *ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias* y podemos hacer las siguientes observaciones:

- El problema de encontrar $(\vec{U}, P)$ una solución de las ecuaciones Navier-Stokes estacionarias significa entonces que debemos resolver la ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico (2).
- A diferencia de la ecuaciones de Navier-Stokes *no estacionarias* (1), el problema (2) ya no se trata de un problema de evolución sino de un problema estacionario: no se considera la variable temporal.
- Por esta razón, para resolver el problema estacionario (2) necesitamos como único dato la fuerza exterior $\vec{f}$ mientras que para revolver el problema de evolución (1) necesitamos además de la fuerza exterior un dato inicial $\vec{u}_0$ que representa la velocidad del fluido en el instante $t = 0$.

Ahora que hemos introducidos las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias nos preguntamos en qué espacio funcional debemos buscar soluciones $(\vec{U}, P)$ para estas ecuaciones. Además, dado que la fuerza estacionaria $\vec{f}$ es un dato de nuestra problema también es natural preguntarse qué informaciones debemos suponer sobre $\vec{f}$ para poder construir una solución $(\vec{U}, P)$.

Para poder responder a estas preguntas es a menudo muy útil realizar algunos cálculos que en general **no tienen ningún sentido riguroso** pero que nos dan buena **información** sobre las propiedades de la ecuación que queremos resolver. Estos cálculos son tambien conocidos como estimaciones *a priori*.

La idea es la siguiente: supongamos por un momento que hemos encontrado una solución $(\vec{U}, P)$ de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2). Supongamos además que las funciones $(\vec{U}, P)$ son suficientemente regulares et integrables de modo que podemos manipular estos objetos libremente.

Las estimaciones *a priori* que haremos a continuación, en donde insistimos que en el hecho que no tiene ninguna justificación rigurosa y por lo tanto son cálculos formales, son tambien conocidas como *estimaciones de energía* y la idea consiste en multiplicar (puntualmente) la ecuación (2) por la velocidad $\vec{U}$ y luego integrar cada término en variable espacial. Procediendo de esta manera se tiene la siguiente identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta\vec{U})\cdot\vec{U}dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(-(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right)\cdot\vec{U}dx + \int_{\mathbb{R}^3} (-\vec{\nabla}p)\cdot\vec{U}dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot\vec{U}dx. \qquad (3)$$

Ahora estudiamos más en detalle cada término de esta identidad. Para el primer término a la izquierda, dado el campo de velocidad $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta\vec{U})\cdot\vec{U}dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta U_j)U_j dx,$$

y haciendo una integración por partes podemos escribir (al menos formalmente)

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta U_j)U_j dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}U_j\cdot\vec{\nabla}U_j dx = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_i U_j)(\partial_j U_i)dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i U_j|^2 dx. \qquad (4)$$

Ahora recordemos que dado el campo de velocidad $\vec{U}$ entonces definimos su tensor de derivadas $\vec{\nabla} \otimes U$ como la matriz de dimensión 3×3:

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{U} = (\partial_i U_j)_{1 \leq i,j \leq 3}.$$

Definimos además la norma de esta matriz como

$$|\vec{\nabla} \otimes \vec{U}| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |\partial_i U_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y volviendo al ultimo término a la derecha en la ecuación (4) se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i U_j|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx.$$

Así, por estas identidades podemos escribir (formalmente)

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta \vec{U}) \cdot \vec{U} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx. \tag{5}$$

Estudiamos hora el primer término a la derecha en la identidad (3). De manera más precisa, vamos a ver que la hipótesis de incompresibilidad del fluido: $div(\vec{U}) = 0$, nos permite escribir (siempre formalmente) la siguiente identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(-(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} \right) \cdot \vec{U} dx = 0. \tag{6}$$

En efecto, comenzamos por escribir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(-(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} \right) \cdot \vec{U} dx = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} -U_j (\partial_j U_i) U_i dx.$$

Notemos ahora que la expresión a la derecha podemos escribir $(\partial_j U_i) U_i = \frac{1}{2} \partial_j (U_i^2)$ y entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} -U_j (\partial_j U_i) U_i dx = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} -U_j (\frac{1}{2} \partial_j (U_i^2)) dx = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} U_j \partial_j (U_i^2) dx.$$

Ahora, en la ultima expresión a la derecha hacemos una intregración por partes y como $div(\vec{U}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j U_j = 0$, entonces se tiene

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} U_j \partial_j (U_i^2) dx = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j U_j) U_i^2 dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^{3} \partial_j U_j \right) U_i^2 dx = 0.$$

Para el segundo término a la derecha en la identidad (3) la hipótesis de divergencia nula del campo de velocidad $\vec{U}$ también nos permite escribir (formalmente):

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\vec{\nabla} p) \cdot \vec{U} dx = 0. \tag{7}$$

En efecto, por una integración por partes y como $div(\vec{U}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j U_j = 0$, entonces escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\vec{\nabla} p) \cdot \vec{U} dx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (-\partial_j p) U_j dx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} p (\partial_j U_j) dx = \int_{\mathbb{R}^3} p \, div(\vec{U}) dx = 0.$$

Ahora que tenemos las identidades formales (5), (6) y (7), volvemos a la identidad (3) para escribir

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{U} dx, \tag{8}$$

y veremos ahora cómo esta estimación *a priori* nos da información sobre el espacio funcional en que debemos construir el campo de velocidad $\vec{U}$ y a qué espacio funcional debe pertenecer la fuerza $\vec{f}$ que es nuestro dato.

Recordemos que en la Definición 6 de la Lección N°2 introdujimos el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ como el espacio de funciones $f \in L^6(\mathbb{R}^3)$ tales que $\vec{\nabla} f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, es decir todas sus derivadas (débiles) pertenecen al espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$ y como en el lado derecho de la identidad (8) aparece la norma en el espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$ del tensor de derivadas del campo de velocidad $\vec{U}$ se tiene:

$\Rightarrow$ el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ es un espacio natural para el campo de velocidad $\vec{U}$.

Con la información *a priori* sobre la velocidad del fluido: $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, recordemos rápidamente que se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \approx \|\vec{U}\|_{\dot{H}^1} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{U}}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

y esta información nos permite estudiar el término a la derecha en la identidad (8). En efecto, por la identidad de Parseval empezamos escribiendo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{U} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\vec{f}} \cdot \widehat{\vec{U}} d\xi.$$

Si en el término a la derecha multiplicamos y dividimos por la cantidad $|\xi|$ entonces tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\vec{f}} \cdot \widehat{\vec{U}} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{-1} \widehat{\vec{f}}\right) \cdot \left(|\xi| \widehat{\vec{U}}\right) d\xi,$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{-1} \widehat{\vec{f}}\right) \cdot \left(|\xi| \widehat{\vec{U}}\right) d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2} |\widehat{\vec{f}}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{U}}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos ahora que el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ se define por medio de la cantidad $\|\cdot\|_{\dot{H}^{-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2} |\widehat{(\cdot)}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ y entonces se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2} |\widehat{\vec{f}}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{U}}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}} \|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}.$$

Así podemos escribir (siempre formalmente)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{U} dx \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}} \|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}. \tag{10}$$

Con las estimaciones formales (9) y (10) volvemos ahora a la identidad (8) de donde se tiene

$$\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}^2 \lesssim \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}} \|\vec{U}\|_{\dot{H}^1},$$

y entonces podemos escribir

$$\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1} \lesssim \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}. \tag{11}$$

$\Rightarrow$ En esta estimación *a priori* podemos observar que el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ es un marco natural para la fuera exterior $\vec{f}$. Además si controlamos la cantidad $\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}$ entonces controlamos la cantidad $\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}$.

Observemos ahora que gracias a la estimación *a priori* (11) obtenemos información sobre el campo de velocidad $\vec{U}$ y la sobre la fuerza $\vec{f}$, pero esta estimación no nos proporciona ninguna informacion sobre el término de presión P en las ecuaciones de Navier-Stokes: en la estimación formal (7) nos *deshacemos* del término $\vec{\nabla}P$.

Sin embargo, en la lección anterior observamos que existe una relación entre la velocidad $\vec{U}$ y la presión P (las incógnitas de las ecuaciones de Navier-Stokes) y esta relación está dada por medio de la ecuación de tipo Poisson:

$$\Delta P = -div((\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}), \tag{12}$$

ver la ecuación (3) de la Lección N°3 para todos los detalles. Así, dada la información *a priori* sobre la velocidad: $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, usaremos la relación (12) para conocer cuál es el espacio funcional natural para la presión P.

Para ello necesitamos en primer lugar la siguiente identidad que nos será de gran utilidad a lo largo de esta lección.

Lema 1 *Sea $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ tal que $div(\vec{U}) = 0$. Entonces se tiene la siguiente identidad en el sentido de las distribuciones: $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = div(\vec{U} \otimes \vec{U})$.*

Antes de probar este lema conviene hacer las siguientes explicaciones:

- Recordemos rápidamente que el producto tensorial $\vec{U} \otimes \vec{U}$ está definido como la matriz de dimensio 3×3: $\vec{U} \otimes \vec{U} = (U_i U_j)_{1 \leq i,j \leq 3}$ y la divergencia de esta matriz está definida como el *vector*:

$$div(\vec{U} \otimes \vec{U}) = \left(\sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_1), \sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_2), \sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_3) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

- La hipótesis $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ nos permite dar un sentido a la expresión $div(\vec{U} \otimes \vec{U})$ como una distribución. En efecto, si $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene $\vec{U} \otimes \vec{U} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y por lo tanto la expresión $div(\vec{U} \otimes \vec{U})$ está bien definida en el sentido de las distribuciones.

- Observemos finalmente que por la desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev (ver el Teorema 1, página 12 de la Lección N°2) se tiene la inclusión $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ y se tiene además la inclusión $L^6(\mathbb{R}^3) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Así, si se tiene $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ (el marco natural para la velocidad $\vec{U}$) entonces se tiene $\vec{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y como $div(\vec{U}) = 0$ podemos escribir sin ningún problema la identidad dada en este lema.

Prueba. Recordemos que el término $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$ está definido como:

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \left(\sum_{j=1}^{3} U_j(\partial_j U_i), \sum_{j=1}^{3} U_j(\partial_j U_2), \sum_{j=1}^{3} U_j(\partial_j U_3) \right).$$

Luego, para $i = 1, 2, 3$ escribimos (en el sentido de las distribuciones) $U_j(\partial_j U_i) = \partial_j(U_j U_i) - (\partial_j U_j)U_i$ y entonces, como $div(\vec{U}) = 0$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{3} U_j(\partial_j U_1) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_i) - \sum_{j=1}^{3} (\partial_j U_j)U_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_i) - div(\vec{U})U_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j(U_j U_i),$$

de donde se tiene la identidad deseada. ■

Ahora podemos encontrar el espacio funcional adecuado para la presión P. Si la velocidad $\vec{U}$ verifica $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ entonces por el Lema 1 escribimos $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = div(\vec{U} \otimes \vec{U})$ y reemplazando esta identidad en el lado derecho de la ecuación (12) entonces tenemos

$$\Delta P = -div(div(\vec{U} \otimes \vec{U})),$$

y luego escribimos

$$P = \frac{1}{-\Delta}(div(div(\vec{U} \otimes \vec{U}))), \tag{13}$$

donde recordemos que el operador $\frac{1}{-\Delta}$ está dado en la Definición 6, página 5 de la Lección N°1.

Ahora, como hemos puesto $\vec{U}\in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ entonces por las leyes de producto en los espacios de Sobolev (ver el punto 2) del Teorema 3, página 12 de la Lección N° 2) se tiene $\vec{U}\otimes\vec{U}\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Observemos ahora que en el lado derecho de la identidad (13) estamos aplicando dos veces el operador divergencia a la expresión $\vec{U}\otimes\vec{U}$ y como $\vec{U}\otimes\vec{U}\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene $div(div(\vec{U}\otimes\vec{U}))\in \dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Si aplicamos ahora el operador $\frac{1}{-\Delta}$ se tiene $\dfrac{1}{-\Delta}(div(div(\vec{U}\otimes\vec{U})))\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ y de esta manera, siempre por la identidad (13) se tiene:

- $\Rightarrow$ si la velocidad $\vec{U}$ verifica $\vec{U}\in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ entonces el espacio de Sobolev $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ es un marco funcional natural para la presión P.

Observamos entonces que las estimaciones *a priori* que acabamos de hacer nos permiten fijar de manera precisa el problema que queremos resolver para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias:

Problema 1 *Si $\vec{f}\in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ es una fuerza exterior* estacionaria *y a divergencia nula, entonces se quiere construir dos funciones $\vec{U}\in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ y $P\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ tales que el par $(\vec{U},P)$ verifica las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2) en el sentido de las distribuciones.*

En la siguiente sección veremos cómo las ecuaciones (2) pueden escribirse como un problema de punto fijo que nos permitirá resolver el Problema 1.

3. Formulación como problema de punto fijo

Siguiendo las mismas idas de la Sección 3,3 (página 7) de la Lección N°3, vemos que la velocidad $\vec{U}$ y la presión P que son la incógnitas de la ecuación (2) están relacionadas por medio de la expresión (13) y entonces resulta util encontrar primero la velocidad $\vec{U}$ para luego recuperar recuperar P por medio de esta relación.

Queremos entonces *deshacernos* del termino $\vec{\nabla}P$ en las ecuaciones (2) y aplicando el proyector de Leray (ver la Definición 1, página 8 de la Leccion N°3) a estas ecuaciones y además, como $div(\vec{U})=0$ y $div(\vec{f})=0$, entonces escribimos (formalmente)

$$-\Delta\vec{U}=-\mathbb{P}\left((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right)+\vec{f}.$$

Aplicamos ahora el operador $\frac{1}{-\Delta}$ a cada lado de esta identidad y como se tiene

$$\frac{1}{-\Delta}\left(-\Delta\vec{U}\right)=\vec{U},$$

para convencerse de esta identidad basta pasar a Fourier, entonces obtenemos la siguiente identidad formal:

$$\vec{U}=-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right)\right)+\frac{1}{-\Delta}\left(\vec{f}\right). \tag{14}$$

- $\Rightarrow$ Observamos entonces que las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2) pueden escribirse *formalmente* como el problema de punto (14), en donde sólo interviene la velocidad $\vec{U}$.

Así, para resolver el Problema 1 seguiremos los siguientes pasos:

- Usar algún teorema de punto fijo para resolver el problema (14) y obtener le velocidad $\vec{U}$.
- A partir de la velocidad $\vec{U}$ recuperar la presión P por medio de la relacion (13).
- Verificar que el par $(\vec{U},P)$ verifica las ecuaciones (2) en el sentido de las distribuciones.

4. Existencia de soluciones estacionarias

Siguiendo los pasos arriba mencionados el objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ una fuerza exterior* estacionaria *y a divergencia nula. Existen dos funciones $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ y $P \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ tales que el par $(\vec{U}, P)$ es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2). Además, la velocidad $\vec{U}$ verifica la estimación (11).*

Antes de entrar en los detalles técnicos de la demostración de este teorema es conveniente hacer los siguientes comentarios.

Como se explicó anteriormente, el primer paso para demostrar este teorema es resolver el problema de punto fijo (14) y para ello utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 2 (Teorema de punto fijo de Schaefer) *Sea E un espacio de Banach y $T : E \longrightarrow E$ un operador. Si el operador T verifica:*

1) *T es un operador continuo,*

2) *T es un operador compacto y*

3) *existe una constante $M > 0$ tal que para todo parámetro $0 \leq \lambda \leq 1$ si $e \in E$ verifica $T(e) = \lambda e$ entonce se tiene $\|e\|_E \leq M$,*

entonces existe $e \in E$ una solución del problema de punto fijo $T(e) = e$.

Expliquemos ahora rápidamente cómo usaremos este resultado. Podemos observar que si consideramos un espacio de Banach E y un operador (no necesariamente lineal) definido en E y con valores en E entonces si este operador T verifica los tres puntos arriba mencionados podemos asegurar la existencia de *al menos* una solución $e \in E$ del problema de punto fijo $T(e) = e$.

Para aplicar este resultado a nuestro caso de estudio definimos entonces el espacio de Banach E como

$$E = \{\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) : div(\vec{U}) = 0\}, \tag{15}$$

y es importante resaltar que consideramos aquí el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ dado en la Definición 6 de la Lección N°2 (página 9) para asegurarnos de que este espacio es un espacio de Banach dotado con su norma usual: $\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1} = \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\vec{U}\|_{L^2} \approx \|\vec{\nabla} \otimes \vec{U}\|_{L^2}$.

Una vez que hemos fijado nuestro espacio de Banach E, volvemos al problema de punto fijo (14) en donde podemos ver que es natural definir el operador T como:

$$T(\vec{U}) = -\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left((\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}\right)\right) + \frac{1}{-\Delta}\left(\vec{f}\right), \tag{16}$$

y entonces queremos mostrar que existe $\vec{U} \in E$ tal que $\vec{U} = T(\vec{U})$. Entonces, es natural intentar mostrar que el operador T aquí arriba verifica todas las hipótesis del Lema 2 pero señalemos desde ya que esto presenta algunos problemas técnicos: no disponemos de la información necesaria para mostrar que el operador T verifica los puntos 1) y 2) del Lema 2, es decir, en el estado actual de nuestros conocimientos no sabemos cómo verificar que este operador es continuo y compacto sobre el espacio E. Tampoco no sabemos si este operador *no* verifica estas dos propiedades.

En cuanto al punto 3) de este lema veremos que esta propiedad reposa en la estimación en la estimación *a priori* (27) pero debemos tener cuidado pues ahora todas las estimaciones deben ser justificadas rigurosamente.

Para contornar estos problemas técnicos usaremos la siguiente estrategia: la idea es *aproximar* el operador T por una familia de operadores $(T_r)_{r>0}$ que verifican todas la hipotesis del Lema 2. Obtenemos así, para todo $r>0$, una función $\vec{U}_r \in E$ que es solución del problema de punto fijo *aproximado* $\vec{U}_r = T_r(\vec{U}_r)$. Luego, es posible mostrar que la familia de soluciones aproximadas $(\vec{U}_r)_{r>0}$ converge (en un sentido a precisar) hacia una función $\vec{U} \in E$ y además esta función verifica las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2) donde la presión P estará definida por medio de la relacion (13).

Con estas ideas en mente pasamos a la demostración del Teorema 1 en donde nos concentraremos en las ideas generales de la demostración de este teorema y dejaremos de lado algunos detalles técnicos.

Demostración del Teorema 1. Sea $r>0$ fijo. Comenzamos por definir el operador aproximado T_r de la siguiente manera. Sea $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \theta(x) \leq 1$, $\theta(x)=1$ si $|x|<1$ y $\theta(x)=0$ si $|x|>2$. Definimos la función de truncartura $\theta_r(x)$ como $\theta\left(\frac{x}{r}\right)$ y entonces, volviendo a la definición del operador T dada en la expresión (16), en el término $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$ de esta expresión escribimos ahora $((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})$ y entonces definimos el operador aproximado T_r como

$$T_r(\vec{U}) = -\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right)\right) + \frac{1}{-\Delta}\left(\vec{f}\right). \tag{17}$$

Mostremos ahora que el operador T_r verifica todas las hipótesis del Lema 2, donde recordemos que el espacio E está definido en la formula (15).

1) Continuidad. Sean $\vec{U},\vec{V} \in E$. Se tiene:

$$\left\|T_r(\vec{U}) - T_r(\vec{V})\right\|_{\dot{H}^1} = \left\|\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U}) - (\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla}(\theta_r\vec{V})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1},$$

y si escribimos

$$((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U}) - ((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{V}) = ((\theta_r(\vec{U}-\vec{V}))\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U}) + ((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r(\vec{U}-\vec{V})), \tag{18}$$

entonces tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\left\|T_r(\vec{U}) - T_r(\vec{V})\right\|_{\dot{H}^1} \leq\ & \left\|\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(\left(((\theta_r(\vec{U}-\vec{V}))\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right)\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1} \\ & + \left\|\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r(\vec{U}-\vec{V}))\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Para estudiar cada término a la derecha de esta estimación necesitaremos el siguiente lema técnico:

Lema 3 *Sea $r>0$. Existe una constante $c(r)>0$, que sólo depende de $r>0$, tal que para todo $\vec{U},\vec{V} \in E$ se tiene:*

$$\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{V})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1} \leq c(r)\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}.$$

Prueba. Para estimar el término a la izquierda de esta desigualdad utilizaremos la siguiente identidad vectorial: sean $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ y $\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$ dos funciones vectoriales, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}((\theta_r\vec{A})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{B}) &= \sum_{j=1}^{3}(\theta_r A_j)\partial_j(\theta_r\vec{B}) = \sum_{j=1}^{3}\left(\partial_j(\theta_r A_j\theta_r\vec{B}) - \partial_j(\theta_r A_j)\theta_r\vec{B}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\theta_r A_j\theta_r\vec{B}) - \sum_{j=1}^{3}(\partial_j\theta_r)A_j\theta_r\vec{B} - \sum_{j=1}^{3}\theta_r(\partial_j A_j)\theta_r\vec{B} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\theta_r^2 A_j\vec{B}) - (\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{A})\theta_r\vec{B} - \theta_r^2 div(\vec{A})\vec{B}.\end{aligned} \tag{20}$$

En esta identidad tomamos $\vec{A}=\vec{U}$ y $\vec{B}=\vec{V}$ y notando que se tiene $div(\vec{A})=div(\vec{V})=0$ entonces escribimos

$$\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{V})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq\sum_{j=1}^{3}\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(\partial_j(\theta_r^2U_j\vec{V})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}+\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left((\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}. \tag{21}$$

El primer término a la derecha de esta desigualdad puede ser estimado de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^{3}\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(\partial_j(\theta_r^2U_j\vec{V})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq\left(\|\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^\infty}\right)\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1}. \tag{22}$$

En efecto, comenzamos escribiendo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(\partial_j(\theta_r^2U_j\vec{U})\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1} &\leq c\sum_{j=1}^{3}\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\partial_j(\theta_r^2U_j\vec{V})\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq c\sum_{j=1}^{3}\left\|\partial_j(\theta_r^2U_j\vec{V})\right\|_{\dot{H}^{-1}}\\ &\leq c\sum_{j=1}^{3}\|\theta_r^2U_j\vec{V}\|_{L^2}\leq c\|(\theta_r\vec{U})\otimes(\theta_r\vec{V})\|_{L^2}.\end{aligned}$$

En la ultima expresión aplicamos las desigualdades de Hölder (con $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$) y entonces escribimos

$$c\left\|(\theta_r\vec{V})\otimes(\theta_r\vec{U})\right\|_{L^2}\leq c\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}\|\theta_r\vec{U}\|_{L^6}\leq c\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}\|\theta_r\|_{L^\infty}\|\vec{U}\|_{L^6}.$$

Ahora, en el término $\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}$ volvemos a aplicar las desigualdades de Hölder (con $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$) de donde se tiene $\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}\leq\|\theta_r\|_{L^6}\|\vec{V}\|_{L^6}$, y volviendo a la estimación precedente podemos escribir

$$c\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}\|\theta_r\|_{L^\infty}\|\vec{U}\|_{L^6}\leq c\left(\|\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^\infty}\right)\|\vec{U}\|_{L^6}\|\vec{V}\|_{L^6}.$$

Recordemos que por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev se tiene la estimación $\|\vec{U}\|_{L^6}\leq c\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}$, y volviendo a la ultima estimación obtenemos

$$c\left(\|\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^\infty}\right)\|\vec{U}\|_{L^6}\|\vec{V}\|_{L^6}\leq c\left(\|\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^\infty}\right)\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1},$$

de donde se deduce la estimacion (22).

El segundo término a la derecha de la desigualdad (21) es estimado como sigue:

$$\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left((\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq c(\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^6})\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1}. \tag{23}$$

En efecto, se tiene

$$\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left((\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq c\left\|-\frac{1}{-\Delta}\left((\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\right)\right\|_{\dot{H}^1}\leq c\|(\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\|_{\dot{H}^{-1}},$$

y usando las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev y las desigualdades de Hödler escribimos

$$\begin{aligned}\|(\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq c\|(\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U})\theta_r\vec{V}\|_{L^{\frac{6}{5}}}\leq c\|\vec{\nabla}\theta_r\cdot\vec{U}\|_{L^2}\|\theta_r\vec{V}\|_{L^3}\\ &\leq c(\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^3}\|\vec{U}\|_{L^6})\left(\|\theta_r\|_{L^6}\|\vec{V}\|_{L^6}\right)\leq c(\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^6})\|\vec{U}\|_{L^6}\|\vec{V}\|_{L^6}\\ &\leq c(\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^3}+\|\theta_r\|_{L^6})\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1},\end{aligned}$$

de donde se obtiene la estimación (23).

El resultado directamente se sigue de las estimaciones (22) y (23). ■

Aplicando la estimación obtenida en este lema a cada término a la derecha de la estimación (19) podemos escribir

$$\begin{aligned}\left\|T_r(\vec{U})-T_r(\vec{V})\right\|_{\dot{H}^1} &\leq c(r)\left(\left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|_{\dot{H}^1}\left\|\vec{U}\right\|_{\dot{H}^1}+\left\|\vec{V}\right\|_{\dot{H}^1}\left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|_{\dot{H}^1}\right)\\ &\leq c(r)\left(\left\|\vec{U}\right\|_{\dot{H}^1}+\left\|\vec{V}\right\|_{\dot{H}^1}\right)\left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|_{\dot{H}^1},\end{aligned}$$

de donde se sigue la continuidad del operador T_r sobre el espacio E.

2) Compacidad. Sea $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en el espacio E. Podemos observar que la sucesión $(\theta_r\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada en E y además, como la función θ_r es definida como $\theta_r(x)=\theta\left(\frac{x}{r}\right)$ y como la función θ verifica $supp\,(\theta)\subset\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<2\}$, entonces se tiene $supp\,(\theta_r)\subset\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<2r\}$ y de esta manera tenemos: para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$supp\,(\theta_r\vec{V}_n)\subset\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<2r\}.$$

Así, par el Lema de Rellich-Lions (ver el Teorema 4, página 12 de la Lección N°2) existe una sub-sucesión de $(\theta_r\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\theta_r\vec{V}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, la cual notaremos como $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unicamente para simplificar la escritura, y además, existe $\vec{V}\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3)$ tales que esta sub-sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función $\vec{V}$ (donde $r>0$ está fijo y $n\longrightarrow+\infty$) en la topología fuerte del espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Mostremos ahora que la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función $\vec{V}$ en la topología fuerte del espacio $L^p(\mathbb{R}^3)$ para $2<p<6$. En efecto, por la desigualdad de interpolación en los espacios de Lebesgue, para $2<p<6$ podemos escribir: con $\theta\in]0,1[$ que verifica $\frac{1}{p}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{6}$,

$$\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^p}\leq c\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}^{\theta}\|V_n-\vec{V}\|_{L^6}^{1-\theta}\leq c\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}^{\theta}\left(\|\vec{V}_n\|_{L^6}^{1-\theta}+\|\vec{V}\|_{L^6}^{1-\theta}\right). \tag{24}$$

Ahora, usando las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev podemos escribir

$$c\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}^{\theta}\left(\|\vec{V}_n\|_{L^6}^{1-\theta}+\|\vec{V}\|_{L^6}^{1-\theta}\right)\leq c\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}^{\theta}\left(\|\vec{V}_n\|_{\dot{H}^1}^{1-\theta}+\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1}^{1-\theta}\right),$$

y la convergencia se sigue del hecho que la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\vec{V}$ en la topología fuerte del espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$ y además del hecho que esta sucesión es acotada en el espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Con estas convergencias podemos ahora verificar que la sucesión $(T_r(\vec{V}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T_r(\vec{V})$ en la topología fuerte del espacio E y por lo tanto el operador T_r es compacto en este espacio. En efecto, usando la identidad (18) podemos escribir

$$\begin{aligned}\|T(\vec{V}_n)-T(\vec{V})\|_{\dot{H}^1} &\leq \left\|\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V}))\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{V}_n)\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\left\|\frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V}))\right)\right)\right\|_{\dot{H}^1},\\ &\leq c\left\|((\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V}))\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{V}_n)\right\|_{\dot{H}^{-1}}\\ &\quad+\left\|((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V}))\right\|_{\dot{H}^{-1}}.\\ &\leq (a)+(b),\end{aligned}$$

y mostraremos ahora que los términos (a) y (b) convergen a cero cuando n tiende al infinito. Para tratar el término (a) de manera adecuada utilizaremos la siguiente identidad vectorial: sean $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ y $\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$ dos funciones vectoriales, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}((\theta_r\vec{A})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{B}) &= \sum_{j=1}^{3}(\theta_r A_j)\partial_j(\theta_r\vec{B})=\sum_{j=1}^{3}\left(\theta_r A_j(\partial_j\theta_r\vec{B}+\theta_r\partial_j\vec{B})\right)\\ &= (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\theta_r)(\theta_r\vec{B})+(\theta_r^2\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.\end{aligned}\tag{25}$$

En esta identidad tomamos $\vec{A}=\vec{V}_n-\vec{V}$ y $\vec{B}=\vec{V}_n$, y entonces escribimos

$$\|([\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V})]\cdot\vec{\nabla})[\theta_r\vec{V}_n]\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \underbrace{\left\|((\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla}\theta_r)[\theta_r\vec{V}_n]\right\|_{\dot{H}^{-1}}}_{(a,1)} + \underbrace{\left\|(\theta_r^2(\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla})\vec{V}_n\right\|_{\dot{H}^{-1}}}_{(a,2)},$$

donde vamos a estimar los términos $(a,1)$ y $(a,2)$. Para el término $(a,1)$, por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev y las desigualdades de Hölder se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\|((\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla}\theta_r)[\theta_r\vec{V}_n]\right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \left\|((\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla}\theta_r)[\theta_r\vec{V}_n]\right\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq \|((\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla}\theta_r)\|_{L^2}\|\theta_r\vec{V}_n\|_{L^3}\\
&\leq \|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^\infty}\|\theta_r\|_{L^6}\|\vec{V}_n\|_{L^6}\\
&\leq \|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2}\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^\infty}\|\theta_r\|_{L^6}\|\vec{V}_n\|_{\dot{H}^1},
\end{aligned}$$

pero recordemos que la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ y entonces se tiene

$$\left\|((\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla}\theta_r)(\theta_r\vec{V}_n)\right\|_{\dot{H}^{-1}} \leq C(r)\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^2},$$

con $C(r)>0$ una constante que sólo depende de $r>0$. Así, como la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\vec{V}$ en la topología fuerte del espacio dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ obtenemos que el término $(a,1)$ converge a cero cuando $n\longrightarrow+\infty$.

Para el término $(a,2)$, siempre por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev y la desigualdad de Hölder podemos escribir

$$\begin{aligned}
\left\|(\theta_r^2(\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla})\vec{V}_n\right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq c\left\|(\theta_r^2(\vec{V}_n-\vec{V})\cdot\vec{\nabla})\vec{V}_n\right\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq \|\theta_r^2(\vec{V}_n-\vec{V})\|_{L^3}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{V}_n\|_{L^2}\\
&\leq \|\theta_r^2\|_{L^{12}}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4}\|\vec{V}_n\|_{\dot{H}^1} \leq C_2(r)\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4},
\end{aligned}$$

donde $C_2(r)>0$ denota siempre una constate que sólo depende de $r>0$, y como la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\vec{V}$ en la topología fuerte del espacio $L^4(\mathbb{R}^3)$ obtenemos que el término $(a,2)$ converge a cero cuando $n\longrightarrow+\infty$.

Verifiquemos ahora que el término (b) converge hacia cero cuando $n\longrightarrow+\infty$. Siguiendo las mismas ideas que el término (a) utilizaremos en este caso la siguiente identidad vectorial (20) en donde tomamos ahora $\vec{A}=\vec{V}$ y $\vec{B}=\vec{V}_n-\vec{V}$ y además, observando que se tiene $div(\vec{A})=div(\vec{V})=0$, entonces podemos escribir

$$\left\|((\theta_r\vec{V})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V}))\right\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{3}\|\partial_j(\theta_r^2V_j(\vec{V}_n-\vec{V}))\|_{\dot{H}^{-1}}}_{(b,1)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{3}\|(\partial_j\theta_r)V_j\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V})\|_{\dot{H}^{-1}}}_{(b,2)}.$$

Para el término $(b,1)$, usando primero las desigualdades de Hölder y luego las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev escribimos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\|\partial_j(\theta_r^2V_j(\vec{V}_n-\vec{V}))\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \sum_{j=1}^{3}\|\theta_r^2V_j(\vec{V}_n-\vec{V}))\|_{L^2} \leq c\|\theta_r^2\vec{V}\|_{L^4}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4} \leq c\|\theta_r^2\|_{L^{12}}\|\vec{V}\|_{L^6}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4}\\
&\leq c\|\theta_r^2\|_{L^{12}}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4}.
\end{aligned}$$

Para el término $(b,2)$, usando primero las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev y luego las desigualdades de Hölder escribimos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\|(\partial_j\theta_r)V_j\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V})\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \sum_{j=1}^{3}\|(\partial_j\theta_r)V_j\theta_r(\vec{V}_n-\vec{V})\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq c\|(\vec{\nabla}\theta_r)\vec{V}\|_{L^{\frac{12}{7}}}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4}\\
&\leq c\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^{\frac{12}{5}}}\|\vec{V}\|_{L^6}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4} \leq c\|\vec{\nabla}\theta_r\|_{L^{\frac{12}{5}}}\|\vec{V}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{V}_n-\vec{V}\|_{L^4}.
\end{aligned}$$

Así, como la sucesión $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\vec{V}$ en la topología fuerte del espacio $L^4(\mathbb{R}^3)$ obtenemos que el término $(b,1)$ y el término $(b,2)$ convergen a cero cuando $n \longrightarrow +\infty$.

Hemos mostrado que la sucesión $(T_r(\vec{V}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $T(\vec{V})$ en la topología fuerte del espacio E y entonces T_r es un operador compacto sobre este espacio.

3) Estimación *a priori*. Sea $\lambda \in [0,1]$. Si $\vec{U} \in E$ verifica la ecuación $\vec{U} = \lambda T_r(\vec{U})$ entonces por la definición del operador T_r dado en la formula (17) se tiene:

$$\vec{U} = -\lambda \frac{1}{-\Delta}\left(\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right)\right) - \lambda\frac{1}{-\Delta}(\vec{f}),$$

y ahora, aplicando el operador $-\Delta$ a cada lado de esta identidad podemos observar que $\vec{U}$ verifica la siguiente ecuación:

$$-\Delta\vec{U} = -\lambda\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right) - \lambda\vec{f}.$$

Como $\vec{U} \in E$ entonces se tiene $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ (ver la definicion del espacio E dada en la expresión (15)) y luego se tiene $-\Delta\vec{U} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Se tiene además $\mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ (se deja como ejercicio verificar esto) y como por hipótesis tenemos $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ entonces podemos escribir:

$$\langle -\Delta\vec{U}, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} = -\lambda\left\langle \mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right), \vec{U}\right\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} - \langle\vec{f},\vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1}, \tag{26}$$

y debemos estudiar cada término en esta identidad, donde dejamos al lector la verificación de todos los detalles en los cálculos que haremos a continuación. Para el término a la izquierda, por una integración por parte se tiene:

$$\langle -\Delta\vec{U}, \vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} = \|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|^2_{\dot{H}^1} = \|\vec{U}\|^2_{\dot{H}^1}.$$

Pare el primer término a la izquierda, usando la ecuación $div(\vec{U}) = 0$ y por una integración por partes se tiene:

$$-\lambda\left\langle \mathbb{P}\left(((\theta_r\vec{U})\cdot\vec{\nabla})(\theta_r\vec{U})\right), \vec{U}\right\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} = 0.$$

Finalmente, para el segundo término a la derecha, como se tiene $\lambda \in [0,1]$ entonces escribimos

$$-\lambda\langle\vec{f},\vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} \leq \lambda\left|-\langle\vec{f},\vec{U}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1}\right| \leq \lambda\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1}.$$

Con estas estimaciones volvemos a la identidad (26) para escribir

$$\|\vec{U}\|^2_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1},$$

y entonces tenemos

$$\|\vec{U}\|_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}. \tag{27}$$

Observamos entonces que si $\vec{U} \in E$ verifica la ecuación $\vec{U} = \lambda T_r(\vec{U})$ entonces se tiene la estimación aquí arriba y si fijamos la constante $M = \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}$ entonces el operador T_r verifica el punto 3) del Lema 2.

Así, para todo $r > 0$, por el Lema 2 existe $\vec{U}_r \in E$ una solución del problema de punto fijo $\vec{U} = T_r(\vec{U})$.

Mostremos ahora que la familia de funciones $(\vec{U}_r)_{r>0}$ converge hacia una funciíon $\vec{U} \in E$ que verifica la ecuación de Navier-Stokes estacionaria

$$-\Delta\vec{U} = -\mathbb{P}\left((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right) + \vec{f}. \tag{28}$$

Notemos en primer lugar que por la estimación (27) se tiene: $\sup\limits_{r>0}\|\vec{U}_r\|_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}$, y entonces existe $\vec{U} \in E$ y existe une sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal $r_n \longrightarrow +\infty$ cuando $n \longrightarrow +\infty$ (la cual es construida por le proceso diagonal de Cantor) y tal que la sucesión $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función $\vec{U}$ en la topología débil$-*$ del espacio E.

Por otro lado, usando el Lema de Rellich-Lions (ver el Teorema 4 de la página 13 de la Lección N°2) mostraremos que la sucesión $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ también converge hacia $\vec{U}$ en la topología fuerte del espacio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. En efecto, siempre por la estimación (27), para todo $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ podemos escribir

$$\sup_{r>0} \|\varphi \vec{U}_r\|_{\dot{H}^1} \leq C_\varphi \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}},$$

donde $C_\varphi > 0$ es una constante que sólo depende de φ, y entonces existe une sub-sucesión $(\vec{U}_{r_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, que por comodidad en la escritura la notaremos como $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que esta sucesión converge a $\vec{U}$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Con estas convergencias podemos mostrar el siguiente resultado técnico.

Lema 4 *Sea la sucesión $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $\vec{U} \in E$. Entonces se tiene*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(((\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})\cdot\vec{\nabla})(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})) = \mathbb{P}((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}),$$

en el sentido de las distribuciones.

Prueba. Notemos en primer lugar que por la estimación (24) se tiene que la sucesión $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\vec{U}$ en la topología fuerte del espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $2 \leq p < 6$.

Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, como se tiene $div(\vec{U}_{r_n}) = 0$ entonces por el Lema 1 podemos escribir

$$((\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})\cdot\vec{\nabla})(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n}) = \theta_r\left((\vec{U}_{r_n}\cdot\vec{\nabla})(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})\right) = \theta_r div(\vec{U}_{r_n}\otimes(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})),$$

y como la sucesión $(\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente hacia $\vec{U}$ en $L^4_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y además, dado que se tiene $\theta_{r_n}(x) = 1$ cuando $|x| < r_n$, entonces obtenemos que la sucesión $(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente hacia $\vec{U}$ en el espacio $L^4_{loc}(\mathbb{R}^3)$. De esta manera, por las desigualdades de Hölder (con $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$) se tiene que la sucesión $(\vec{U}_{r_n}\otimes(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\vec{U}\otimes\vec{U}$ en la topología fuerte del espacio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y entonces la sucesión $(\theta_r div(\vec{U}_{r_n}\otimes[\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n}])_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $div(\vec{U}\otimes\vec{U})$ en la topología fuerte del espacio $\dot{H}^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

En este punto notemos que por el Lema 1 siempre podemos escribir $div(\vec{U}\otimes\vec{U}) = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$.

Finalmente, como el proyector de Leray $\mathbb{P}$ es continuo en el espacio $\dot{H}^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene la convergencia de la sucesión $(\mathbb{P}(\theta_r div(\vec{U}_{r_n}\otimes[\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n}])))_{n\in\mathbb{N}}$ hacia $P(div(\vec{U}\otimes\vec{U}))$ en la topología fuerte de este espacio y finalmente en el sentido de la distribuciones. ■

Por este lema tenemos la convergencia del término no lineal $\mathbb{P}(((\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n})\cdot\vec{\nabla})(\theta_{r_n}\vec{U}_{r_n}))$ hacia el término no lineal $\mathbb{P}((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})$ y entonces la función $\vec{U} \in E$ verifica las ecuaciones (28) en el sentido de las distribuciones.

Para terminar la demostracíon de este teorema debemos recuperar la presión P relacionada a la velocidad $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. En efecto, inspirándose de la identidad formal (13), definimos ahora la presión P como:

$$P = -\frac{1}{-\Delta}(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})),$$

en donde recordemos que como $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ entonce se tiene $P \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Por otro lado, recordemos que por la définición del proyector $\mathbb{P}$ (ver la Definición 1 de la página 8 de la Lección N°2) se tiene

$$\mathbb{P}\left((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right) = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{-\Delta}\left(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U})\right)\right) = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{-\Delta}(div((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}))\right)$$

y por la definición de la presión P podemos entonces escribir

$$\mathbb{P}\left((\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}\right) = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}P.$$

Así, volviendo a las ecuaciones (28), por esta identidad podemos ahora escribir

$$-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P + \vec{f},$$

y entonces el par $(\vec{U}, P)$ verifica (en el sentido de las distribuciones) las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias. El Teorema 1 está demostrado. ■

Para finalizar esta lección es interesante hacer algunas observaciones sobre el Teorema 1 que acabamos de demostrar.

- Recordemos que para resolver el problema de punto fijo (14) la herramienta de base que utilizamos fue el Teorema de punto fijo de Scheafer enunciado en el Lema 2. Por otro lado, recordemos que en la Lección N°3 enunciamos otro teorema de punto fijo: el principio de contracción de Picard, que fue enunciado en el Teorema 4 de la página 10 de la Lección N°3. Es natural preguntarse si para estudiar el problema (14) podemos usar el principio de contracción de Picard en lugar del teorema de punto fijo de Scheafer y la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

  Sin embargo es importante notar que para poder utilizar el principio de contracción de Picard es necesario suponer un control adicional sobre el tamaño de la fuerza exterior: $\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}} < \delta$, donde $\delta > 0$ debe ser una cantidad suficientemente pequeña. Por esta razón hemos preferido utilizar el teorema de punto fijo de Schaefer en donde no necesitamos ningún control sobre la cantidad $\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}$.

- En el Teorema 1 mostramos la existencia de al menos una solucioón $(\vec{U}, P) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias (2), pero es importante insistir que este resultado no nos proporciona ninguna información adicional sobre la *unicidad* de esta solución.

- La pregunta si hay unicidad o no de la solucón $(\vec{U}, P) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ es una pregunta completamente abierta hasta la actualidad y en el estado actual de nuestros conocimientos no sabemos cómo responder a esta pregunta.

  Sin embargo, esta pregunta nos lleva a otra pregunta interesante: si consideramos ahora que la fuerza exterior es nula: $\vec{f} = 0$, entonces sabemos que las funciones $\vec{U} = 0$ y $P = 0$ es una solución *trivial* de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

  $$-\Delta\vec{U} = -(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{\nabla}P,$$

  y nos preguntamos si entonces esta solución trivial es la única solución de estas ecuaciones.

  Esta pregunta también se conoce como *problema de Liouville para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias* y en la siguiente lección daremos algunos resultados (clásicos y recientes) sobre este problema.