

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	2
1.2. Definición de ecuación dispersiva . . . . .	3
<b>2. Derivación de NLS</b>	<b>3</b>
2.1. La ecuación de Korteweg-de Vries . . . . .	5
2.2. Motivaciones matemáticas para estudiar NLS y KdV . . . . .	5
<b>3. Noción de buen colocamiento</b>	<b>5</b>
<b>4. Transformada de Fourier</b>	<b>6</b>
<b>5. Distribuciones temperadas</b>	<b>7</b>
<b>6. Espacios de Sobolev</b>	<b>8</b>
6.1. Más propiedades útiles . . . . .	8
<b>7. Ejemplos de problemas bien y mal puestos</b>	<b>9</b>

## 1. Introducción

El propósito de estas notas será el de dar a entender, de una manera simple y rápida, los primeros pasos hacia el estudio de **ecuaciones dispersivas**. A través de estas notas conoceremos más en detalle los modelos físicos bajo los cuales aparecen estas ecuaciones, como así también un estudio preliminar (pero detallado) de las primeras propiedades matemáticas que poseen estas ecuaciones. Para ello, introduciremos, a medida que sea necesario, distintos conceptos utilizados para atacar estos problemas, entre ellos, la transformada de Fourier, los espacios de Sobolev, las estimaciones de Strichartz, y si el tiempo lo permite, la teoría de estabilidad de solitones. Cada uno de ellos dará lugar a un resultado particular que abordaremos.

Para ello, creo que la mejor manera es mostrar las cosas vía un ejemplo. Consideremos pues, la ecuación de Schrödinger proveniente de la Mecánica Cuántica:

$$i\hbar\psi_t = H\psi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad d \geq 1, \quad (1.1)$$

Aquí  $\hbar$  es la constante de Planck (que puede asumirse muy pequeña),  $H$  es un operador actuando sobre  $\psi$ , más precisamente el Hamiltoniano del sistema. Este operador usualmente viene dado por una combinación de la energía cinética y energía potencial del sistema, y  $\psi = \psi(t, x)$  es una función a valores complejos ( $\mathbb{C}$ ), comúnmente denominada *función de onda*. Generalmente se pide que  $\psi$  defina una probabilidad, en el sentido que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t, x)|^2 dx = 1, \quad \text{para todo } t. \quad (1.2)$$

En el caso de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano puede escribirse como un operador **diferencial lineal** de la forma

$$H = -\hbar^2 \Delta + V(t, x),$$

Donde  $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$  es el Laplaciano en coordenadas cartesianas y  $V = V(t, x)$  es un potencial dado del sistema. Vista de esta manera, esta ecuación posee innumerables aplicaciones en Física y Química atómica.

Clásicamente, se resuelve (1.1) para distintas geometrías, ya sea usando la serie de Fourier, o algún método de funciones especiales, dependientes de la geometría del dominio donde se resuelve el problema. Esta fuerte dependencia del problema con respecto al dominio hace que los métodos usuales tengan poca aplicabilidad a casos realmente generales, donde se necesita una teoría más completa.

Más precisamente, la clase de preguntas que abordaremos es la siguiente:

**Pregunta.** ¿ Como estudiar (1.1) de manera matemática, es decir, abstracta y general?

**Pregunta.** ¿ Como estudiar generalizaciones no lineales de (1.1)? Por ejemplo, suponiendo que  $\hbar = 1$  y  $V = \pm|\psi|^2$ , podemos entender las soluciones de

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi \pm |\psi|^2\psi = 0, \quad \psi = \psi(t, x) \in \mathbb{C}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d? \quad (1.3)$$

Notar que sólo estamos pidiendo resolver este problema sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^d$ , pues hacerlo sobre un dominio cualquiera puede llegar a ser muy complicado.

La respuesta a éstas y otras preguntas la da la teoría de resolución de ecuaciones dispersivas, que veremos someramente en estas notas. Para ello, vale la pena primero entender de dónde puede provenir la generalización no lineal (1.3) de (1.1).

## 1.1. Ecuaciones de Maxwell

En lo que sigue, buscaremos entender de dónde proviene la ecuación de Schrödinger (1.3). Modelos físicos donde esta ecuación aparece hay varios y variados, por lo que nos remitiremos al más simple, esto es, el estudio de paquetes de luz en medios no lineales. Para ello, necesitaremos recordar primero las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell modelan la evolución de los campos eléctrico  $E$  y magnético  $B$  en el vacío. Si suponemos que todas las constantes físicas son iguales a uno, tendremos las ecuaciones

$$\text{(Maxwell)} \quad \begin{cases} \nabla \cdot E = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \partial_t B = -\nabla \times E, \\ \partial_t E = \nabla \times B. \end{cases} \quad (1.4)$$

Aquí, los campos  $E = E(t, x)$  y  $B = B(t, x)$  son a valores en  $\mathbb{R}^3$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , y  $t \in \mathbb{R}$  es la variable de tiempo. No es difícil darse cuenta que, bajo la validez de estas ecuaciones, y derivando una vez más la ecuación para  $\partial_t E$  con respecto al tiempo, obtendremos la ecuación de ondas para el campo eléctrico

$$\partial_t^2 E - \Delta E = 0. \quad (1.5)$$

Esta ecuación representa entonces una de las primeras verificaciones del hecho que la luz en el vacío se comporta como una onda (y no sólo como partícula).

Un análisis ya probablemente hecho con anterioridad, pero que siempre vale la pena hacer, es el de *medir la dispersión de la ecuación*, en este caso, de (1.5). Para ello, buscamos soluciones tipo onda plana: dado un vector fijo cualquiera  $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , colocamos

$$E(t, x) = e^{i(k \cdot x - wt)} \mathbf{e}_0, \quad k \in \mathbb{R}^3, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Notemos que para satisfacer la condición  $\nabla \cdot E = 0$  en (1.4), necesitamos

$$k \cdot \mathbf{e}_0 = 0,$$

lo que se puede lograr sin pérdida de generalidad si  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1$ , el primer vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , y

$$k = (0, k_y, k_z), \quad (1.6)$$

es decir,  $k$  vive en el plano  $yz$ . Por lo mismo, suponiendo (1.6) desde ahora, podemos colocar

$$E_0(t, x) = e^{i(k \cdot x - wt)} \mathbf{e}_1, \quad k \in \mathbb{R}^3, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Busquemos pues  $w = w(k)$  para el cual esta función es solución de (1.5). Reemplazando en esta última identidad, obtenemos

$$-w^2 + |k|^2 = 0, \implies w = w(k) = |k| = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}.$$

Por lo tanto, la frecuencia  $w(k)$  de la onda plana varía con  $k$ , y la llamada *velocidad de grupo*, esto es,  $\nabla w(k)$ , está dada por

$$\nabla w(k) = \left(0, \frac{k}{|k|}\right) \in \mathbb{S}^2. \quad (1.8)$$

## 1.2. Definición de ecuación dispersiva

El cálculo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 1.1** Una ecuación lineal se dice **dispersiva** si la velocidad de grupo correspondiente  $\nabla w(k)$  es a valores reales y varía con el número de onda  $k$ . Es decir, ondas planas que se mueven con vector de onda  $k$  viajan con velocidad de grupo diferente, dependiendo del valor de  $k$ .

Por último, una ecuación no lineal se dice dispersiva si su parte lineal lo es.

Es claro entonces que la ecuación de ondas (1.5) es dispersiva, como muestra (1.8) (aunque muy poco, pues su velocidad de grupo tiene tamaño uno y sólo varía su componente angular).

Casos clásicos de ecuaciones no dispersivas son las ecuaciones de Laplace ( $\Delta u = 0$ ), Calor ( $\partial_t u - \Delta u = 0$ ) y de Transporte ( $\partial_t u + v_0 \cdot \nabla u = 0$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^d$  dado), todas definidas en  $\mathbb{R}^d$ . En cada una de ellas, o bien la frecuencia  $w(k)$  es a valores complejos, o bien no varía con respecto a  $k$ .

**Ejercicio.** Probar la afirmación anterior.

## 2. Derivación de NLS

Ahora bien, cuando el medio ya no es vacío, las ecuaciones de Maxwell (1.4) ya no son válidas. En un medio material (dieléctrico), debemos considerar un campo eléctrico modificado,

$$D := E + P,$$

donde  $P$  es la llamada *polarización del medio*. Las ecuaciones correctas son ahora,

$$(\text{Maxwell dieléctrico}) \quad \begin{cases} \nabla \cdot D = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \partial_t B = -\nabla \times E, \\ \partial_t D = \nabla \times B. \end{cases} \quad (2.1)$$

Como  $P$  es en principio desconocido, se necesita alguna información de él. El caso más conocido corresponde al **modelo de Kerr** (o medio no lineal), donde la polarización depende de manera cúbica en el campo eléctrico:

$$P = c_0 |E|^2 E, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Asumiendo  $c_0 = 1$ , y por el mismo método de antes,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 D &= \nabla \times \partial_t B \\ &= -\nabla \times \nabla \times E \\ &= \Delta E - \nabla(\nabla \cdot E); \end{aligned}$$

de donde llegamos a la ecuación de ondas “cuasilinear”

$$\partial_t^2 (E + |E|^2 E) - \Delta E + \nabla(\nabla \cdot E) = 0. \quad (2.2)$$

Notemos pues que la onda plana (1.7) ya no es solución de esta ecuación, pues es de carácter no lineal. Esta ecuación es de difícil tratamiento, aún con los métodos que veremos en este curso.

Sin embargo, nos gustaría entender perturbaciones pequeñas de ondas planas que nos permitan reducir (2.2) a un régimen mas lineal que no lineal. Para ello, introducimos un parámetro  $\varepsilon > 0$  pequeño, y colocamos

$$E = \varepsilon u(\varepsilon^2 t, \varepsilon y, \varepsilon z) E_0, \quad E_0 \text{ como en (1.7)}. \quad (2.3)$$

Esta elección de variables garantiza como antes que  $\nabla \cdot E = \nabla \cdot D = 0$ , pues la derivada en la divergencia se calcula sólo sobre la variable  $x$ , que no aparece en nuestra representación de  $E$ . Las variables originales de  $u$  las llamaremos  $T$  e  $Y, Z$ , esto es,  $u = u(T, Y, Z)$ .

En la literatura se dice que (2.3) corresponde al régimen donde la onda plana original  $E_0$  *acarrea una modulación* dada por la función  $u$ . Además se pide que  $u$  varíe lentamente, de manera proporcional a  $\varepsilon$  en las variables  $y$  y  $z$ , mientras que a tasa  $\varepsilon^2$  en tiempo. (Se pueden dar distintas explicaciones sobre la elección de este escalamiento, pero todas contienen un cierto grado de arbitrariedad o libertad. Cualquier otra elección nos dará probablemente un resultado diferente.)

Por otro lado, el hecho que  $E$  en (2.3) sea de tamaño  $\varepsilon$  se denomina usualmente como el régimen *débilmente no lineal* (weakly nonlinear).

Reemplazando (2.3) en (2.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t^2(E + |E|^2 E) - \Delta E + \nabla(\nabla \cdot E) &= \\ &= \partial_t^2(\varepsilon u E_0 + \varepsilon^3 |u|^2 u E_0) - \varepsilon \Delta(u E_0) \\ &= -2i\varepsilon^3 w \partial_T u E_0 + (-iw)^2 \varepsilon^3 |u|^2 u E_0 + O(\varepsilon^4) \\ &\quad - \varepsilon^3 E_0 \Delta_{Y,Z} u - 2\varepsilon^2 (\nabla_{Y,Z} u \cdot ik) E_0 \\ &= -\varepsilon E_0 \left( \varepsilon^2 (2iw \partial_T u + \Delta_{Y,Z} u + w^2 |u|^2 u) + 2i\varepsilon (k \cdot \nabla_{Y,Z} u) + O(\varepsilon^3) \right) \end{aligned}$$

El término  $2i\varepsilon(k \cdot \nabla_{Y,Z} u)$  se puede cancelar si colocamos ahora

$$u(T, Y, Z) = \tilde{u}\left(T, Y - \frac{k_y T}{\varepsilon w}, Z - \frac{k_z T}{\varepsilon w}\right), \quad \tilde{u} = \tilde{u}(s, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^2.$$

que corresponde a una reestructuración de la variable espacial. De aquí,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( 2iw \partial_T u + \Delta_{Y,Z} u + w^2 |u|^2 u \right) + 2i\varepsilon (k \cdot \nabla_{Y,Z} u) &= \\ = 2i\varepsilon^2 w \partial_s \tilde{u} - 2i\varepsilon (k \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{u}) + \varepsilon^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u} + w^2 \varepsilon^2 |\tilde{u}|^2 \tilde{u} + 2i\varepsilon (k \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{u}) &= \\ = \varepsilon^2 (2iw \partial_s \tilde{u} + \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u} + w^2 |\tilde{u}|^2 \tilde{u}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\partial_t^2(E + |E|^2 E) - \Delta E + \nabla(\nabla \cdot E) = \varepsilon^3 (2iw \partial_s \tilde{u} + \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u} + w^2 |\tilde{u}|^2 \tilde{u}) + O(\varepsilon^4),$$

y si queremos como error sólo los términos de orden  $\varepsilon^4$ , necesariamente  $\tilde{u}$  satisface la EDP

$$2iw \partial_s \tilde{u} + \Delta_{\tilde{x}} \tilde{u} + w^2 |\tilde{u}|^2 \tilde{u} = 0,$$

que corresponde a NLS (1.3) en  $(t, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , después de hacer escalamiento.

**Ejercicios.** Considere las ecuaciones siguientes:

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad (\text{Schrödinger lineal}),$$

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0, \quad (\text{Airy}),$$

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + 2 \operatorname{Re} u = 0, \quad (\text{Schrödinger modulacionalmente inestable}),$$

Para cada una de estas ecuaciones, realice un análisis detallado de ondas planas para cada una de estas ecuaciones, y decida si es o no dispersiva. Si no es el caso, vea si la ecuación puede ser dispersiva en un cierto régimen particular.

La realización rigurosa de estos pasos (es decir, probar por cuánto tiempo la aproximación encontrada se aproxima a la solución general de la ecuación original) requiere de técnicas avanzadas, y no es fácil de probar en general. Aún así, existen variados resultados probando que los pasos dados anteriormente son matemáticamente correctos, por cierto tiempo, y bajo cierto rango de parámetros  $\varepsilon$  pequeño.

## 2.1. La ecuación de Korteweg-de Vries

Como observación general, también es importante explicar, al menos con palabras, de donde proviene otra ecuación dispersiva importante, la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0, \quad u(t, x) \in \mathbb{R}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Esta derivación es más complicada, y requiere de supuestos físicos importantes. Para ello, se debe partir con las **ecuaciones de Euler** para un fluido perfecto (sin viscosidad), incompresible en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{R}^3, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Además de esta ecuación, uno debe considerar el caso de frontera libre, es decir, el fluido está en contacto con el aire. Si ahora suponemos además que el fluido es **irrotacional** (una hipótesis importante pero necesaria para simplificar la dificultad del problema), obtendremos las ecuaciones llamadas **water waves**. Estas ecuaciones han sido tratadas en detalle en los últimos años, y se tiene una buena teoría de ellas. Sin embargo, en un límite específico de olas en aguas de profundidad baja, se puede obtener (2.4) después de varias simplificaciones.

## 2.2. Motivaciones matemáticas para estudiar NLS y KdV

El estudio formal de estas ecuaciones comenzó a fines del '70, mucho después del estudio de las ecuaciones elípticas y parabólicas. Desde entonces, ha habido un avance muy significativo en la comprensión de éstas y varias ecuaciones similares. Una de las principales motivaciones matemáticas para estudiar, o bien (1.3), o bien (2.4), es que, a diferencia de la teoría elíptica vista en el curso de EDPs, los teoremas clásicos del análisis funcional ya no se aplican, y por ende se necesitan nuevas ideas, y por lo tanto nuevos métodos.

## 3. Noción de buen colocamiento

Nuestro objetivo desde ahora será el de entender cómo construir una solución al problema (1.3). Para ello, lo ideal es primero entender cómo se comporta la ecuación lineal

$$i\partial_t u + \Delta u = 0. \quad (3.1)$$

Antes de intentar cualquier análisis detallado, debemos recordar la noción de **problema bien puesto**. Dada una ecuación cualquiera de carácter espacio-temporal (no necesariamente dispersiva), y una condición inicial dada en un espacio fijo, diremos que este problema de Cauchy está bien puesto (en el sentido de Hadamard) si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe una solución en tal espacio, y es única;
2. Si la solución posee cierta regularidad (suavidad), ésta es preservada por el flujo en tiempo; y
3. La solución completa depende continuamente del dato inicial.

Si cualquiera de estas condiciones **no** se cumple, diremos que el problema está **mal puesto** (en el sentido de Hadamard). Esta noción de mal colocamiento es tal vez la más fuerte que existe, aunque ciertas ecuaciones pueden estar bien puestas pero poseer nociones débiles de mal colocamiento, un tópico que veremos más avanzado el curso.

Ejemplos de ecuaciones que están bien y mal puestas hay varias, pero para entenderlas es necesario introducir ciertas nociones de Análisis de Fourier, que recordaremos a continuación.

## 4. Transformada de Fourier

Recordemos que para  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , su transformada de Fourier  $\hat{f}(\xi)$  (o bien  $\mathcal{F}[f](\xi)$ ) se define como

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad (4.1)$$

aunque a veces se denota como  $\mathcal{F}[f](\xi)$ . Recordemos también que  $\hat{f}$  está en  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , con

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty_\xi} \leq \|f\|_{L^1_x},$$

como se puede ver directamente de la definición (4.1). Recordemos también que no solo  $\hat{f}$  está acotada, sino que también es **continua y tiende a cero en infinito**; es decir,  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d_\xi)$ . La continuidad sigue fácilmente del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, mientras que el hecho que converge a cero proviene de la identidad

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|} \|\partial_x f\|_{L^1_x}, \quad C \text{ independiente de } f,$$

válida para funciones a soporte compacto en  $\mathbb{R}^d$ . Esta propiedad pasa al límite en  $L^1$  casi seguramente si aproximamos  $f \in L^1_x$  por una sucesión de funciones suaves y a soporte compacto  $f_n$  que satisfacen además que  $\|\partial_x f_n\|_{L^1_x}$  es uniformemente acotada en  $n$ .

Asimismo, se cumplen las identidades

1. Si  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  es un muti-índice y  $x^\beta f \in L^1$  para todo  $|\beta| \leq |\alpha|$ , entonces  $\partial_\xi^\alpha \hat{f}$  está bien definida y se tiene (aquí si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , entonces  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$  y  $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ )

$$\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f)(\xi). \quad (4.2)$$

2. Si  $\beta \in \mathbb{N}^d$  es un muti-índice y  $\partial_x^\beta f$  está en  $L^1_x$ , entonces

$$\mathcal{F}(\partial_x^\beta f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \hat{f}(\xi). \quad (4.3)$$

3. Si  $f, g \in L^1$ , entonces su convolución

$$(f \star g)(x) := \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy$$

está en  $L^1$  y se tiene la identidad

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

4. Para la Gaussiana  $f(x) := \frac{1}{(4\pi a)^{d/2}} e^{-|x|^2/4a}$ ,  $a > 0$ , uno tiene

$$\mathcal{F}[f](\xi) = e^{-4\pi^2 a |\xi|^2}. \quad (4.4)$$

El lector puede intentar demostrar estas identidades como buen ejercicio, o bien remitirse al Capítulo 1 del libro de Linares y Ponce [2] para la demostración de estas identidades.

Asimismo, definimos la transformada de Fourier inversa  $\check{f}$  como

$$\check{f}(\xi) := \int e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx,$$

siempre que  $f$  esté en  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Por lo mismo, se puede probar que si  $f$  y  $\hat{f}$  están en  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $f = \check{\hat{f}}$ . Por lo mismo, se suele denotar

$$\mathcal{F}^{-1}(f) := \check{f}.$$

Otra identidad bastante conocida es la siguiente:

**Lema 4.1 (Plancharel)** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\int \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi. \quad (4.5)$$

La gran utilidad de esta identidad radica en que si ahora  $f \in L^1 \cap L^2$ , escogiendo (formalmente)  $g = \overline{\hat{f}}$  en (4.5) obtendremos

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int f^2(x)dx, \quad (4.6)$$

la que se conoce también como identidad de Plancharel, y tiene como consecuencias

1. que por densidad se puede definir  $\hat{f}$  para  $f$  en  $L^2$ , y
2. esta transformada de Fourier es una **isometría** en  $L^2$ , esto es, un isomorfismo que preserva la norma  $L^2$ .

Para probar (4.6) de manera rigurosa se debe usar una aproximación Gaussiana de la identidad, de tal manera que cada término en (4.5) esté bien definido, para luego pasar al límite.

Una última consecuencia de esta identidad es la identidad de polarización

$$\int f\bar{g} = \int \widehat{f\bar{g}}.$$

## 5. Distribuciones temperadas

Recordemos la clase de Schwartz en  $\mathbb{R}^d$ . Para  $\alpha, \beta$  multi-índices en  $\mathbb{N}^d$ , y  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  definimos las seminormas

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|. \quad (5.1)$$

No necesariamente estas cantidades son finitas si  $f \in C^\infty$  solamente. Por lo mismo,

**Definición 5.1** Se define la **clase de Schwartz**  $S(\mathbb{R}^d)$  como el espacio de funciones  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  para las cuales  $p_{\alpha,\beta}(f) < +\infty$ , no importando los multi-índices  $\alpha, \beta$ .

Ejemplos de funciones en  $S(\mathbb{R}^d)$  son las funciones suaves a soporte compacto ( $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ), las Gaussianas y toda función que decaiga igual o más rápido que una exponencial. No son funciones en la clase de Schwartz las que decaen de manera racional solamente.

Por otro lado, la topología de  $S(\mathbb{R}^d)$  es simplemente la inducida por la familia de seminormas  $p_{\alpha,\beta}$  en (5.1): tenemos que  $f_n \rightarrow 0$  en  $S(\mathbb{R}^d)$  si  $p_{\alpha,\beta}(f_n) \rightarrow 0$  para cualquier  $\alpha, \beta$  multiíndices.

Notemos también que las propiedades (4.2)-(4.3) pueden traducirse naturalmente para funciones en  $S(\mathbb{R}^d)$ : ellas aseguran que la transformada de Fourier de una función en  $S(\mathbb{R}^d)$  está en el mismo espacio  $S(\mathbb{R}^d)$ , y similarmente para la transformada inversa. Decimos pues que  $\mathcal{F}$  es un automorfismo en  $S(\mathbb{R}^d)$ .

El espacio dual de  $S(\mathbb{R}^d)$ , es decir, el espacio de funcionales continuos en  $S(\mathbb{R}^d)$ , se denota usualmente como  $S' = S'(\mathbb{R}^d)$ , y se le denomina espacio de *distribuciones temperadas*. La topología sobre  $S'(\mathbb{R}^d)$  es natural y simple:

$$T_n \rightarrow 0 \text{ en } S' \text{ si } T_n(f) \rightarrow 0 \text{ para cada } f \in S(\mathbb{R}^d).$$

Por último, la transformada de Fourier sobre  $S'$  se define usando su caracterización dual sobre  $S$ : si  $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\langle \mathcal{F}(T), f \rangle := \langle T, \mathcal{F}(f) \rangle, \quad \text{para cada } f \in S(\mathbb{R}^d).$$

Por lo mismo, la  $\mathcal{F} : S' \rightarrow S'$  es también un automorfismo.

**Ejercicio.** Calcular la transformada de Fourier de la distribución

$$\langle \text{vp } \frac{1}{x}, f \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(y)}{y} dy.$$

## 6. Espacios de Sobolev

Partamos con una definición estándar.

**Definición 6.1** Sea  $s \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $H^s = H^s(\mathbb{R}^d)$  el espacio de Sobolev (inhomogéneo, de índice  $s$ ) dado por

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Asimismo, definimos el espacio de Sobolev homogéneo  $\dot{H}^s = \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$  como

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d) : |\xi|^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

El espacio  $H^s$  es un espacio de Hilbert si se le asocia el producto punto asociado a la norma

$$\|f\|_{H^s} := \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)\|_{L^2}. \quad (6.1)$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades estándares:

1. Si  $s < s'$ , entonces  $H^{s'} \subseteq H^s$ , y si  $f \in H^{s_1} \cap H^{s_2}$ , con  $s_1 < s_2$ , entonces  $f \in H^s$  para cada  $s \in [s_1, s_2]$ .
2. Si  $s > \frac{d}{2}$ , entonces  $H^s$  está incluido en  $C_0(\mathbb{R}^d)$ , la clase de funciones continuas que decaen a cero en infinito.

El lector puede probar el primer ítem como ejercicio. Para probar el último, basta probar que  $\hat{f} \in L^1_{\xi}$ , de donde  $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$  será necesariamente una función en la clase  $C_0$ . Para ello, basta notar que, gracias a Holder,

$$\int |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \left( \int |\hat{f}|^2 (1 + |\xi|^2)^s \right)^{1/2} \left( \int (1 + |\xi|^2)^{-s} \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{H^s},$$

donde la última desigualdad es consecuencia del hecho que  $s > \frac{d}{2}$ .

### 6.1. Más propiedades útiles

Por otro lado, se cumplen las propiedades más avanzadas

1. Si  $s > \frac{d}{2}$ ,  $H^s$  define un álgebra multiplicativa, es decir  $f, g \in H^s$  implica  $fg \in H^s$ , y además

$$\|fg\|_{H^s} \leq C_s \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}.$$

2. Si  $s = n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2 : \partial_x^\alpha f \in L^2, \quad |\alpha| \leq n \text{ en el sentido débil}\},$$

es decir, para exponente  $s$  natural, el espacio de Sobolev  $H^m$  coincide con el obtenido vía derivadas débiles.

3. Si  $s < \frac{d}{2}$ , entonces  $H^s$  se inyecta continuamente en el espacio  $L^p$ , con  $p = \frac{2d}{d-2s}$ . De manera más general, si  $p < d$ , las funciones en el espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^p : \nabla f \in L^p, \text{ en el sentido débil}\},$$

están en el espacio  $L^{p^*}$ , con  $p^* := pd/(d-p)$ .

4. No es cierto que si  $s = \frac{d}{2}$ , entonces  $H^s$  se inyecta en  $L^\infty$ , sino más bien en un espacio ligeramente más grande que  $L^\infty$  (ver por ejemplo, el curso de Diego Chamorro).

La demostración de estas propiedades no es simple en general, y requiere de detalles que escapan al largo de este curso. Sin embargo, el estudiante debiese buscar la demostración de cada uno de estas propiedades, por ejemplo, en el libro de Linares y Ponce [2].



## 7. Ejemplos de problemas bien y mal puestos

En este párrafo vamos a considerar dos problemas que muestran cuando una ecuación puede estar bien o mal puesta. Para ello, tomemos primero (3.1) con dato en  $S(\mathbb{R}^d)$  (aquí la clase de Schwartz es a valores complejos):

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(t=0) = u_0 \in S(\mathbb{R}_x^d).$$

Tomando transformada de Fourier en espacio solamente, obtenemos

$$i\partial_t \hat{u} - 4\pi|\xi|^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(t=0) = \hat{u}_0 \in S(\mathbb{R}_\xi^d).$$

Esta es una EDO en la variable  $t$  (tomando  $\xi$  fijo), por lo que podemos decir que

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi i|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi),$$

lo que usualmente denotaremos como

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0,$$

usando notación funcional. El carácter dispersivo de la ecuación se puede ver en este cálculo: el núcleo de Schrödinger  $e^{-i|\xi|^2 t}$  es claramente oscilatorio (algo que caracteriza las ecuaciones dispersivas).

Notemos que para cada tiempo  $e^{-i|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi)$  está bien definida en  $S'(\mathbb{R}_\xi^d)$ , por lo que  $u(t, x)$  será siempre Schwartz (respetando el segundo punto de los requeridos por Hadamard). Por otro lado, usando transformada de Fourier inversa,

$$u(t, x) = \int e^{2i\pi x \cdot \xi} e^{-4\pi i|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Por lo tanto, la solución existe y es única. Mejor aún, cualquier seminorma  $p_{\alpha, \beta}$  de  $u(t, x)$  sigue siendo finita y dependiente sólo de la de  $u_0$ , por lo que la continuidad en la clase de Schwartz está también asegurada:

$$\begin{aligned} \left| x^\alpha \partial_x^\beta \int e^{2i\pi x \cdot \xi} e^{-4\pi i|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi \right| &\lesssim \left| x^\alpha \int e^{2i\pi x \cdot \xi} e^{-4\pi i|\xi|^2 t} (2i\pi\xi)^\beta \hat{u}_0(\xi) d\xi \right| \\ &\lesssim \left| \int \partial_\xi^\alpha (e^{2i\pi x \cdot \xi}) e^{-4\pi i|\xi|^2 t} (2i\pi\xi)^\beta \hat{u}_0(\xi) d\xi \right| \\ &\lesssim \left| \int \langle \xi \rangle^{-m} e^{2i\pi x \cdot \xi} \langle \xi \rangle^m \partial_\xi^\alpha [e^{-4\pi i|\xi|^2 t} (2i\pi\xi)^\beta \hat{u}_0(\xi)] d\xi \right| \\ &\lesssim p_{\alpha, \beta+m}(u_0). \end{aligned}$$

Aquí  $\langle \xi \rangle := \sqrt{1 + |\xi|^2}$  (el *japanese bracket*), y  $m$  es cualquier número suficientemente grande. Como la función  $\langle \xi \rangle^m \partial_\xi^\alpha [e^{-i|\xi|^2 t} (2i\pi\xi)^\beta \hat{u}_0(\xi)]$  sigue estando en la clase de Schwartz, concluimos que si  $u_{n,0}$  converge a cero en  $S$ , entonces la correspondiente función  $u_n(t)$  también lo hace. Luego, esta ecuación está bien puesta. Usando la representación de la función Gaussiana (4.4), válida aún si  $a$  es complejo puro, obtenemos

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int e^{\frac{i|x-y|^2}{4\pi t}} u_0(y) dy.$$

Consideremos ahora la ecuación del calor *backwards in time*. Esto es, resolvamos

$$\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(t=0) = u_0 \in S(\mathbb{R}_x^d), \tag{7.1}$$

que equivale a resolver la ecuación de calor “en reversa” (es decir, cambiando  $u(t, x)$  por  $u(-t, x)$ ). Para este caso, podemos hacer la misma analogía de antes, usando Transformada de Fourier. Vamos a obtener

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{4\pi|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi),$$

de donde

$$u(t, x) = \int e^{2i\pi x \cdot \xi} e^{4\pi|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Sin embargo, aquí vemos que aún si  $\hat{u}_0$  es Schwartz, la expresión anterior puede no estar bien definida para valores de tiempo suficientemente grandes (o simplemente para ningún tiempo  $t > 0$ ). Luego, la solución puede no existir en la clase de Schwartz, y entonces la ecuación está mal puesta. Comparar con el hecho que la ecuación del calor suaviza las soluciones, por lo que la ecuación (7.1) debiese des-regularizarlas (una propiedad contraria al carácter bien puesto de Hadamard).

Sin embargo, esta ecuación puede arreglarse un poco si suponemos por ejemplo que  $u_0$  tiene soporte compacto en Fourier, digamos  $\text{supp } \hat{u}_0 \subseteq B(0, M)$ . En este caso,

$$|u(t, x)| = \left| \int e^{2i\pi x \cdot \xi} e^{4\pi|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi \right| \lesssim e^{M^2 t}.$$

Luego, hay una inestabilidad (un crecimiento potencial y exponencial en tiempo de la solución), pero ella está bien definida para cualquier tiempo. En este sentido, la ecuación sigue teniendo una única solución, con la misma regularidad de antes y continuidad, pero las cotas se hacen cada vez más grandes a medida que avanza el tiempo.

## Referencias

- [1] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes vol. 10, 2003.
- [2] Felipe Linares y Gustavo Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Universitext 2009, Springer New-York.
- [3] Terence Tao, *Nonlinear Dispersive equations: local and global analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006, 373pp.