Lección n°1: Propiedades básicas.

USFQ, noviembre 2016

Índice

1. Laplaciano fraccionario

Consideremos el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ formado por las funciones $C^\infty(R^d)$ de decaimiento rápido, así, para $u \in \mathcal{S}$ y $\alpha \in (0,1)$, el Laplaciano fraccionario denotado por $(-\triangle)^\alpha$ está definido como

$$(-\Delta)^\alpha u(x) = C(d,\alpha) P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y\mid^{d+2\alpha}} dy \tag{1}$$

donde los valores principales son tomados como el límite de la integral sobre $\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $C(d,\alpha)$ es una constante que depende de α, dada por

$$C(d,\alpha) = \pi^{-(2\alpha+\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}$$

Lema 1 *Si $\alpha \in (0,1/2)$ y u es una función Lipschitz acotada, entonces $(-\Delta)^\alpha u(x)$ es no singular en x.*

Demostración. Veamos que no es necesario tomar los valores principales en la definición de $(-\Delta)^\alpha$ si $\alpha \in (0,1/2)$. En efecto, sea u es una función Lipschitz acotada, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y\mid^{d+2\alpha}} dy &\leq C \int_{B_R(x)} \frac{|x-y|}{|x-y|^{d+2\alpha}} dy + 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B_R(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{d+2\alpha}} dy \\
&= C \left(\int_{B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{d+2\alpha-1}} dy + \int_{B_R(x)^c} \frac{1}{|x-y|^{d+2\alpha}} dy \right) \\
&= C \left(\int_0^R \frac{1}{r^{2\alpha}} dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^{2\alpha+1}} dr \right) < +\infty
\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. $\square$

Lema 2 *Si $\alpha \in (1/2,1)$ y $u \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\beta > 2\alpha - 1$, entonces $(-\Delta)^\alpha u(x)$ es no singular en x.*

Demostración. En efecto, basta notar que el integrando en una vecindad de x tiene la forma $\frac{|x-y|^{1+\beta}}{|x-y|^{d+2\alpha}}$. $\square$

Lema 3 *Sea $\alpha \in (0,1)$ y $u \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$(-\triangle)^\alpha u = -\frac{1}{2} C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2\alpha}} dy$$

Demostración. Haciendo dos cambios de variable $z = y - x$ y $z' = x - y$, podemos reescribir $(-\triangle)^\alpha u$ como:

$$(-\triangle)^\alpha u = \frac{1}{2} C \left(P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(x+z)}{|z|^{d+2\alpha}} dz + P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(x-z')}{|z'|^{d+2\alpha}} dz' \right)$$

$$= -\frac{1}{2}C \cdot P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2\alpha}} dy$$

Usando el desarrollo de Taylor de segundo orden, tenemos que

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2\alpha}} \leq \frac{\|D^2 u\|_{L^\infty}}{|y|^{d+2\alpha-2}}$$

el cual es integrable cerca de cero, así podemos escribir la integral dada por (1) como:

$$(-\triangle)^\alpha u = -\frac{1}{2}C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{d+2\alpha}} dy$$

□

Para finalizar esta introducción a las propiedades básicas del Laplaciano fraccionario veremos que el símbolo de su transformada de Fourier está dado por $|\xi|^{2\alpha}$.

Teorema 1 *Sea $\alpha \in (0,1)$ y $u \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$(-\Delta)^\alpha u = C\mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha}(\mathfrak{F}u)), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

para una constante C que depende solo de α y d.

Demostración. Aplicando el Teorema de Fubini-Tonelli tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}((-\Delta)^\alpha u)(\xi) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathfrak{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{d+2\alpha}} dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi\cdot t}+e^{-i\xi\cdot t}-2}{|y|^{d+2\alpha}} dy(\mathfrak{F}u)(\xi) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{d+2\alpha}} dy(\mathfrak{F}u)(\xi) \\
&= c|\xi|^{2\alpha}(\mathfrak{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

□

Observación 1 *Notemos que $\mathfrak{F}(-\Delta u) = |\xi|^2(\mathfrak{F}u)$. Por este motivo a $(-\Delta)^\alpha$ se lo llama Laplaciano fraccionario.*

2. Problema de Cauchy fraccionario: Solución fundamental.

Consideremos el problema

$$p_t + (-\Delta)^\alpha p = 0 \qquad (2)$$

$$p(0,\cdot) = \delta_0(\cdot), \qquad (3)$$

donde δ_0 es la delta de Dirac en 0. Para encontrar una solución de este problema tomaremos transformadas de Fourier en el problema anterior, obteniendo que

$$p(t,x) = \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^{2\alpha}t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}^d e^{ix\cdot\xi - t|\xi|^{2\alpha}} d\xi$$

La solución fundamental p también conocida como Distribución de Lévy, satisface las siguientes propiedades:

1. $0 < p \in C((0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)$ y $\int_{\mathbb{R}^d} p(t,x)dx = 1$ para todo $t > 0$.
2. $p(t,\cdot) * p(s,\cdot) = p(t+s,\cdot)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$.
3. $p(t,x) = t^{-d/2\alpha}p(1, t^{-d/2\alpha}x)$.

4. Existe una constante $B>1$ tal que, para $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$:

$$\frac{B^{-1}}{t^{\frac{1}{2\alpha}}(1+\mid xt^{-\frac{1}{2\alpha}}\mid^{1+2\alpha})}\leq p(t,x)\leq\frac{B}{t^{\frac{1}{2\alpha}}(1+\mid xt^{-\frac{1}{2\alpha}}\mid^{1+2\alpha})}. \tag{4}$$

5. $\text{lím}_{|x|\to\infty}|x|^{d+2\alpha}p(1,x)=\frac{2^{2\alpha}\alpha}{\pi^{d/2+1}}sen(\pi\alpha)\Gamma(d/2+\alpha)\Gamma(\alpha)$.

La propiedad 1) son las propiedades básicas que toda función de distribución debe cumplir. La propiedad 2) sale diréctamente de la convolución de transformadas inversas de Fourier, la propiedad 3) es solo un cambio de variable y la propiedad 4) se la puede deducir de 5).

Para demostrar 5) consideremos la representación de la transfomada de Fourier inversa para funciones radiales en términos de las funciones de Bessel de primera clase, así

$$p(1,x)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|x|^{d/2-1}}\int_0^\infty e^{-t^{2\alpha}}t^{d/2}J_{d/2-1}(|x|t)dt$$

Tomando el cambio de variable $r=|x|$, integrando por partes y usando la propiedad $\frac{d}{dt}(t^\nu J_\nu(t))=t^\nu J_{\nu-1}(t)$ se deduce

$$|x|^{d+2\alpha}p(1,x)=\frac{2\alpha}{(2\pi)^{d/2}}\Re\left[\int_0^\infty e^{-(t/r)^{2\alpha}}t^{d/2+2\alpha-1}H^{(1)}_{d/2}(t)dt\right]$$

donde $H^{(1)}_{d/2}$ es la función de Bessel de tercera clase. La última integral sobre $\mathbb{R}_+$ es igual a la integral sobre $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ con θ suficientemente pequeño ya que la integral sobre el arco se va a cero, así

$$|x|^{d+2\alpha}p(1,x)=\frac{2\alpha}{(2\pi)^{d/2}}\Re\left[\int_0^\infty e^{-(te^{i\theta}/r)^{2\alpha}}(te^{i\theta})^{d/2+2\alpha-1}H^{(1)}_{d/2}(te^{i\theta})e^{i\theta}dt\right].$$

Notemos que el término dentro de la integral converge puntualmente a $(te^{i\theta})^{d/2+2\alpha-1}H^{(1)}_{d/2}(te^{i\theta})e^{i\theta}$ cuando $r\to\infty$. Así por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue

$$|x|^{d+2\alpha}p(1,x)=\frac{2\alpha}{(2\pi)^{d/2}}\Re\left[\int_0^\infty(te^{i\theta})^{d/2+2\alpha-1}H^{(1)}_{d/2}(te^{i\theta})e^{i\theta}dt\right].$$

Es importante notar que la última integral no depende de r, así continuando con el cálculo, nuevamente rotando el eje de integración a $i\mathbb{R}_+$ se concluye 5).

Referencias

[1] C. Bucur and E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications.* Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer.

[2] X. Cabre and J. Roquejoffre. *Propagation de fronts dans les équations de Fisher KPP avec diffusion fractionnaire.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009), 1361-1366.

[3] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.