Lección n°1: Introducción a las Ecuaciones de Navier-Stokes

USFQ, noviembre 2015

Índice

1. De qué ecuaciones se trata? Para qué sirven?

Las ecuaciones de Navier[1]-Stokes[2] son un sistema de ecuaciones que sirven para modelizar la dinámica de los fluidos (aire, agua) y este sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases}} \tag{1}$$

Antes de entrar en detalles, es necesario explicar (rápidamente) en qué consiste cada término.

- La función $\vec{u} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un vector en tres dimensiones: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y en donde cada función u_i es función del tiempo t y de un vector del espacio: $u_i = u_i(t,x) = u_i(t, x_1, x_2, x_3)$ para todo $1 \leq i \leq 3$.
  - $\Rightarrow$ la cantidad $\partial_t\vec{u}$ designa entonces la derivada de $\vec{u}$ con respecto a la variable temporal.
  - $\Rightarrow$ se trata entonces de ecuaciones de *evolución*.
- El término $\nu\Delta\vec{u}$ es un término de *difusión* de intensidad $\nu > 0$.
  - $\Rightarrow$ La palabra *difusión* debe entenderse en el sentido de la *ecuación del calor*.
  - $\Rightarrow$ En efecto, si escribimos $\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u}$ obtenemos la ecuación del calor.
  - $\Rightarrow$ El paramétro ν modeliza la *viscosidad* del fluido.
- La cantidad no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ expresa el *movimiento* de un elemento del fluido que al tiempo t ocupa la posición x.
  - $\Rightarrow$ Estamos hablando de un fluido que está presente en *todo* el espacio.
  - $\Rightarrow$ Si escribimos $\partial_t\vec{u} = (B\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ obtenemos una ecuación de *transporte* de velocidad B.
  - $\Rightarrow$ Este término $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ es en donde se concentra buena parte de la dificultad del problema.
- La presión $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que depende del tiempo y del espacio: $p = p(t,x)$.
- La condición $div(\vec{u}) = 0$ expresa la incompresibilidad del fluido.
- El dato inicial $\vec{u}_0 = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un vector tal que cada una de sus componentes $(u_{i,0})_{1\leq i\leq 3}$ son funciones del espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$.

[1]Henri Navier (1785-1836), matemático francés
[2]George Stokes (1819-1903), matemático británico

$\Longrightarrow$ Encontrar una solución del problema (1) consiste en

* exhibir un tiempo de existencia $T > 0$,
* encontrar a partir del dato inicial $\vec{u}_0$ dos funciones $(\vec{u}, p)$ que verifican estas ecuaciones en el intervalo $[0, T]$.

2. Son ecuaciones interesantes? Por qué (y en qué sentido) son difíciles?

Interesantes?

$\Rightarrow$ Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones que requieren para su estudio un número considerable de herramientas y en su mayoría estas herramientas provienen del análisis funcional y del análisis armónico.

$\Rightarrow$ El problema de Navier-Stokes tiene una larga historia: Bernoulli (1716), D'Alembert (1743), Euler (1757), Laplace (1808), Navier (1822), Cauchy (1822), Stokes (1842), Leray (1934), Kolmogorov (1941), etc.
...y sigue siendo un *problema abierto*.

$\Rightarrow$ Es uno de los *problemas del milenio*. En el año 2000, el Instituto Matemático Clay presentó en París (Collège de France) una lista de siete problemas abiertos que un comité de expertos consideraron como los más difíciles.

- *P vs NP*: relacionada con la teoría de la complejidad en los algoritmos.
- *La Conjetura de Hodge*: variedades algebraicas.
- *La Conjetura de Poincaré*: geometría diferencial (resuelta por G. Perelman en el 2003).
- *La hipótesis de Riemann*: estudia los ceros de la función ζ de Riemann.
- *Ecuaciones de Yang-Mills*: son ecuaciones de la teoría cuántica de campos.
- *Ecuaciones de Navier-Stokes*: ecuaciones de la mecánica de fluidos.
- *La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer*: teoría de números y ecuaciones Diofantinas.

Difíciles?

El gran problema de las ecuaciones de Navier-Stokes es que podemos decir muy poco sobre ellas. Se trata de un problema de Cauchy de valor inicial: es decir que partimos de un dato inicial $\vec{u}_0$ de energía finita ($\|\vec{u}_0\|_{L^2} < +\infty$) y evidentemente las soluciones que se buscan dependerán fuertemente de las propiedades del dato inicial.

$\Rightarrow$ Si fijamos un dato inicial muy regular, en el estado actual de nuestro conocimientos, podemos *construir* soluciones débiles de estas ecuaciones pero estamos en la incapacidad de decir si son únicas o si son regulares.

$\Rightarrow$ Otro problema que no sabemos resolver consiste en tomar como punto inicial una función $\vec{u}_0$ regular, y mostrar que la solución asociada "explota" en tiempo finito.

* * *

Plan del Curso

- Soluciones Clásicas
- Soluciones Débiles
- Problemas recientes de regularidad local

3. La ecuación del Calor

Sea $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables: $u = u(t, x)$ en donde t representa el tiempo y x es un vector del espacio $\mathbb{R}^n$. La ecuación del calor consiste en estudiar la propagación del calor en, digamos, una placa homogénea. La ecuación que se obtiene es la siguiente

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = \partial_t u(t, x) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(t, x) = 0. \tag{2}$$

Definición 1 (Solución fundamental de la Ecuación del Calor) *La función*

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & si\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases}$$

es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Vemos sin problema que $\partial_t h(t, x) - \Delta h(t, x) = 0$ si $x \neq 0$ para todo $t > 0$.

Observación 1

- *La solución fundamental es una función radial positiva.*
- *Esta función es singular en el punto $(0, 0)$ y si $t > 0$, esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty$.*
- *La solución fundamental de la ecuación del calor es una función* gaussiana.

Proposición 1 *Se tienen las siguientes estimaciones para la solución fundamental de la ecuación del calor Φ:*

(i) para todo $t > 0$:

$$|h(t, x)| \leq \begin{cases} c|x|^{-n} & si\ |x|^2 \geq t \\ ct^{-n/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, y si $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h(t, x) \right| \leq \begin{cases} c|x|^{-[n+|\alpha|+2k]} & si\ |x|^2 \geq t \\ ct^{-[n+|\alpha|+2k]/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(iii) para todo $t > 0$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h(t, \cdot) \right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k+n(1-1/p)}{2}}$$

(iv) para todo $t > 0$ y para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h(t, \cdot) * f \right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k}{2}} \|f\|_{L^p}$$

Notación: a veces escribiremos $h_t(x)$ en vez de $h(t, x)$.

Problema de valor inicial

Nos interesamos ahora en estudiar el siguiente problema cuando el dato inicial está dado por una función $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Las propiedades de la solución fundamental de la ecuación del calor nos permiten construir por convolución funciones que resuelven este problema de valor inicial.

Teorema 1 *Sea $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, si para todo $t > 0$ definimos la función $u(t,x)$ por medio de la expresión*

$$u(t,x) = h_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t, x-y)u_0(y)dy,$$

entonces tenemos:

- *la función u pertenece al espacio $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n)$,*
- *la función u es solución del problema de valor inicial (3), con $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$,*
- *para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\displaystyle\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x) \\ t>0, y\in\mathbb{R}^n}} u(t,y) = u_0(x)$.*

Observación 2

- *Este teorema nos indica que si partimos de un dato inicial u_0 que es apenas continuo, la solución de la ecuación del calor asociada $u(t,x)$ es* inmediatamente *regular. Este hecho muestra el poder regularizante del operador Laplaciano.*
- *Dado que la solución fundamental es una función positiva, si el dato inicial u_0 es una función acotada y positiva, entonces la solución que se construye por convolución también es positiva para todo tiempo $t > 0$. Dicho de otra manera, si la temperatura inicial es positiva en algún lado, entonces la temperatura en un tiempo futuro es positiva en todo el espacio.*

Problema no-homogéneo

Consideramos ahora el siguiente problema, donde $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Por simplicidad, hemos fijado $u_0 \equiv 0$, veremos posteriormente cómo considerar un caso más general.

Teorema 2 *Sea $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$. Si definimos una función $u(t,x)$ por medio de la expresión*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h(t-s, x-y)f(s,y)dyds,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, entonces se tiene que

- *$u \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$,*
- *la función u es solución del problema no homogéneo (4) para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$,*
- *además, para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene el límite $\displaystyle\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x) \\ t>0, y\in\mathbb{R}^n}} u(t,y) = 0$.*

Combinando los dos teoremas anteriores obtenemos:

Teorema 3 *Sea $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$. Sea $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si consideramos el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \textit{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \textit{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Entonces la función $u(t,x)$ definida por medio de la expresión

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h(t-s,x-y)f(s,y)dyds,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$ es solución del problema anterior.

4. La ecuación de Poisson

Ecuación de Laplace

Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, en donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, entonces la ecuación de Laplace homogénea está dada por

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(x) = 0, \tag{5}$$

para todo $x \in \Omega$. En este problema, la incógnita está dada por una función $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Este problema es de gran importancia en las matemáticas y las soluciones de esta ecuación merecen la siguiente definición.

Definición 2 *Una función de clase $\mathcal{C}^2$ que verifica la ecuación de Laplace (5) es llamada una* función armónica.

Problema Homogéneo y Solución fundamental

Definición 3 *Si v_n es la medida de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, la función*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log(|x|) & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)v_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & (n > 2), \end{cases}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$ es llamada la solución fundamental *de la ecuación de Laplace.*

Tenemos $\Delta\Phi(x) = 0$ si $x \neq 0$.

Observación 3

- *La solución fundamental Φ es, evidentemente, una función* radial.
- *La función Φ explota cuando $x \longrightarrow 0$.*
- *Si $x \neq 0$ se tienen las estimaciones siguientes:*

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \qquad y \qquad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n},$$

donde C es una constante positiva.

Problema no Homogéneo: Ecuación de Poisson

La noción de *solución fundamental* es muy práctica cuando se desea estudiar los problemas no homogéneos.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La ecuación de Poisson está dada entonces por el problema

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

La solución del problema de Poisson está dada por el siguiente teorema:

Teorema 4 (Solución de la ecuación de Poisson (I)) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, que suponemos de soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y definamos u por medio de la expresión*

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy. \tag{6}$$

Entonces se tiene que la función u es de clase $\mathcal{C}^2$ y además es solución de la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f, \quad \textit{sobre } \mathbb{R}^n.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ La primera cosa que debemos verificar es que la función u determinada por la expresión (7) está *bien definida*: en efecto para un $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)||f(y)|dy.$$

Dado que la función f es a soporte compacto, existe $R_f > 0$ tal que $sop(f) \subset B(x, R_f)$ y por lo tanto podemos escribir

$$|u(x)| \leq \int_{B(x,R_f)} |\Phi(x-y)||f(y)|dy \leq \|f\|_\infty \int_{B(x,R_f)} |\Phi(x-y)|dy = \|f\|_\infty \int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy.$$

Lo único que debemos hacer ahora es calcular (o estimar) la integral y para ello usamos la definición de Φ.

- Si $n = 2$ tenemos
$$\int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy = C\int_0^{R_f} |\log(|\rho|)|\rho d\rho < +\infty.$$
- Si $n > 2$ se tiene
$$\int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy = C\int_0^{R_f} \rho d\rho < +\infty.$$

Es decir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$|u(x)| \leq C\|f\|_\infty.$$

$\Longrightarrow$ Continuamos verificando que la función u definida por convolución por medio de la expresión (7) es de clase $\mathcal{C}^2$. Para ello escribimos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy,$$

de manera que si e_i es el i-ésimo vector unidad de $\mathbb{R}^n$ y si $h \neq 0$ se tiene la identidad

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\left(\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right)dy,$$

de manera que pasando al límite cuando $h \longrightarrow 0$ se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy,$$

y razonando de manera totalmente similar tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy.$$

En particular tenemos que esta función es continua en la variable x, además, dado que f es una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, por un razonamiento similar al primer punto obtenemos que u es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Debemos verificar ahora que la función u definida por convolución es solución de la ecuación de Poisson. Para ello escribimos:

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^c} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy}_{I_2}.$$

- Para el primer término I_1 tenemos:

$$|I_1| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)\Delta_x f(x-y)|dy \leq C\|\Delta f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq C \begin{cases} \varepsilon^2|\ln(\varepsilon)| & (n=2) \\ \varepsilon^2 & (n>2). \end{cases}$$

- Para el segundo término I_2 se tiene, por una integración por partes

$$I_2 = \underbrace{-\int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla\Phi(y)\nabla f(x-y)dy}_{I_3} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y)}_{I_4},$$

en donde ν es el vector unitario interno a lo largo del borde $\partial B(0,\varepsilon)$ de la bola $B(0,\varepsilon)$. Tenemos entonces para la integral I_4 la estimación:

$$|I_4| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq C \begin{cases} \varepsilon|\ln(\varepsilon)| & (n=2) \\ \varepsilon & (n>2). \end{cases}$$

Para la integral I_3 tenemos, integrando una segunda vez por partes:

$$I_3 = \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta\Phi(y)f(x-y)dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y) = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y),$$

puesto que la función Φ es armónica fuera del origen.

Ahora, dado que $\nabla\Phi(y) = \frac{-1}{nv_n}\frac{y}{|y|^n}$ cuando $y \neq 0$ y como se tiene que $\nu = \frac{-y}{|y|} = \frac{-y}{\varepsilon}$ sobre $\partial B(0,\varepsilon)$, tenemos la identidad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot \nabla\Phi(y) = \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}}$$

sobre $\partial B(0,\varepsilon)$. Finalmente, dado que $nv_n\varepsilon^{n-1}$ es la superficie del área de la esfera $\partial B(0,\varepsilon)$, podemos escribir

$$I_3 = -\frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)dS(y) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -f(x).$$

De esta manera, haciendo $\varepsilon \to 0$ en nuestra descomposición del producto de convolución obtenemos finalmente que

$$-\Delta u(x) = f(x),$$

y de esta manera hemos terminado la demostración del teorema. ■

Observación 4 *Se puede demostrar que se tiene la identidad $-\Delta\Phi = \delta_0$, de manera que se tiene*

$$-\Delta u = -\Delta(\Phi * f) = (-\Delta\Phi) * f = \delta_0 * f = f.$$

Teorema 5 (Solución de la ecuación de Poisson (II)) *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, suponemos que*

1) *f es de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^3$,*

2) *para $2 < \beta < 3$ y para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^3$ se tiene*

$$\sup_{|\alpha|\leq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|)^\beta |\partial^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Entonces la función u:

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy, \tag{7}$$

es de clase $\mathcal{C}^2$ y es solución de la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n.$$

Además se tienen las acotaciones siguientes:

- $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{\beta-2}|u(x)| < +\infty.$
- $\sup\limits_{|\alpha|\leq 1} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{\beta-1}|\partial^\alpha u(x)| < +\infty.$

La demostración es similar al caso anterior y esta versión nos permite considerar objetos con soporte definido sobre todo el espacio.

$\Rightarrow$ En particular tenemos estimaciones sobre el decrecimiento de la solución u y de sus primeras derivadas.