Lección n°2: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

UPS, julio 2015

Índice

1. Primeras Definiciones

Sea Ω un abierto, no necesariamente acotado de $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$. Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, diremos que la expresión

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad \text{con } x \in \Omega, \tag{1}$$

es una *ecuación en derivadas parciales* (E.D.P.) de orden k, donde $F : \mathbb{R}^{k+1} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una cierta aplicación.

$\Longrightarrow$ La *incógnita* de este problema está dada por la función u.

$\Longrightarrow$ *Resolver* esta E.D.P. consiste en encontrar todas las funciones u que verifican (1) bajo cierto tipo de hipótesis adicionales (ciertas condiciones iniciales o cierto comportamiento en el borde $\partial\Omega$ del conjunto de estudio Ω).

En lo *ideal* se buscan soluciones explícitas y que se puedan respresentar por medio de fórmulas simples. Pero este no es casi nunca el caso y se busca entonces obtener otro tipo de resultados como:

- existencia,
- unicidad,
- regularidad,
- dependencia con respecto a ciertos parámetros,
- ...y todo tipo de propiedades adicionales.

Un poco de orden (1)

En función de ciertas propiedades, es posible dar una cierta clasificación de las E.D.P.s.

- Si la ecuación en derivadas parciales tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) = f(x),$$

en donde α es un multi-índice, entonces diremos que la ecuación es *lineal.*

Si además se tiene que $f = 0$, diremos que la ecuación es *homogénea.*

- Si se tiene

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0,$$

diremos entonces que la ecuación es *semi-lineal.*

- Diremos que la ecuación es *cuasi-lineal* si puede escribirse como

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x)D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0,$$

Esta clasificación toma en cuenta la *linealidad* de las ecuaciones en relación al mayor grado de las derivadas.

Un poco de orden (2)

En el caso de ecuaciones en derivadas parciales de orden 2, se tiene la siguiente clasificación.

Sea $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Consideramos ahora las ecuaciones en derivadas parciales de la siguiente forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial u}{\partial t} + E\frac{\partial u}{\partial x} + Fu = 0$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes.

- si $B^2 - 4AC < 0$, diremos que la ecuación es *elíptica.* La ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

es una ecuación elíptica.

- si $B^2 - 4AC = 0$, diremos que la ecuación es *parabólica.* La ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

es una ecuación parabólica.

- si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación es *hiperbólica.* La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

es un ejemplo de ecuaciones de este tipo.

En este curso estudiaremos algunos ejemplos de estas ecuaciones.

$\Longrightarrow$ Es muy importante recalcar que *no existe* un método universal que permita estudiar *todas* las ecuaciones en derivadas parciales.

$\Longrightarrow$ Cada tipo de ecuación tiene sus propios métodos y técnicas.

2. Ejemplos de E.D.P.s

Vamos a presentar ahora algunas ecuaciones en derivadas parciales, no todas ellas serán estudiadas en este curso introductorio, pero vale la pena presentarlas para mostrar la riqueza de este campo de las matemáticas.

Ecuaciones Lineales

- Ecuación de Laplace (matemático francés, 1749-1827) : sea $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de n variables. Definimos el *operador Laplaciano* Δ de una función por
$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u.$$
La ecuación de Laplace es entonces
$$\Delta u = 0.$$
Las funciones que verifican esta ecuación son llamadas *funciones armónicas.*
- Ecuación de Helmholtz (físico alemán 1821-1894): si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de n variables y si λ es una constante no nula, entonces la ecuación de Helmholtz es
$$-\Delta u = \lambda u.$$
- Ecuación de transporte: si b_i son constantes positivas con $i = 1, \ldots, n$ y si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en las variables (t, x), podemos modelizar el transporte por medio de la ecuación
$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_{x_i} u = 0.$$
- Ecuación del Calor: si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en las variables (t, x), es posible modelizar la diffusión del calor usando la ecuación
$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$
- Ecuación de Schrödinger (físico austríaco 1887-1961): esta ecuación describe la evolución temporal de partículas en mecánica cuántica. De forma (muy) simplificada, esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:
$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$
- Ecuación de Ondas: si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en las variables (t, x), la ecuación que describe el movimiento de ondas (luz, ondas de radio, olas, etc.) está dada por
$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0.$$

Ecuaciones No Lineales

- Ecuación de la Eikonal: si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, esta ecuación está dada por
$$|\nabla u| = 1.$$
- Ecuación del p-Laplaciano: si $a(x_1, x_2) = (a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_2))$ es un vector, la *divergencia* de a está dada por $div(a) = \partial_{x_1} a_1 + \partial_{x_2} a_2$. Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, esta ecuación está dada por la expresión:
$$div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0,$$
donde $0 < p < +\infty$.

- Ecuación de Korteweg - de Vries (matemáticos holandeses $\sim$ 1895): si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces
$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0.$$

- Ecuación quasi-geostrófica: si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, esta ecuación que proviene de la metereología se escribe de esta forma:
$$\partial_t u + \nabla \cdot (uV) + \sqrt{-\Delta} u = 0.$$
en donde $V = (R_2 u, R_1 u)$ es la velocidad del transporte que está definida en función de u por medio de las transformadas de Riesz R_i.

- Ecuaciones de Navier-Stokes: sea $\vec{u} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $div(\vec{u}) = 0$. Entonces se tiene:
$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \Delta \vec{u} + \nabla \vec{p} = 0$$

* * *

Esta no es más que una pequeñísima lista de ecuaciones en derivadas parciales y cada una de estas ecuaciones ha sido (y sigue siendo) fuente de estudio para miles de matemáticos alrededor del mundo pues aún hay muchísimos problemas que están abiertos (inclusive ciertos puntos que podrían considerarse *sencillos* como la existencia o la unicidad).

Cada ecuación, al disponer de una estructura propia, es estudiada usando técnica adecuadas y buscar un método general de resolución para todas estas ecuaciones no tiene sentido.

3. Herramientas Indispensables

En esta sección hacemos un rápido recuento de lo que hay que saber para poder estudiar algunas ecuaciones en derivadas parciales.

3.1. Teoremas clásicos de teoría de la medida

Si bien algunas de estas nociones no aparecerán inmediatamente en nuestra primera exposición de ecuaciones en derivadas parciales, es necesario exponer algunos resultados relacionados con la teoría de la medida general.

Teorema 1 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f una función y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, ambas $\mathscr{A}$-medibles definidas sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$. Hacemos las siguientes hipótesis:*

1) para μ-casi todo $x \in X$ se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,

2) existe una función integrable $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ tal que se tenga, para todo n, la estimación $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-casi en todas partes en X.

Entonces f es una función integrable y
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) \tag{2}$$

Teorema 2 (Continuidad con respecto a un parámetro) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea (E, d) un espacio métrico. Sea $f : X \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ una función que verifica las tres condiciones siguientes:*

1) *para todo $t \in E$ la función $x \longmapsto f(x, t)$ es medible,*

2) *para μ-casi todo $x \in X$ la función $t \longmapsto f(x, t)$ es continua en el punto t_0,*

3) *en μ-casi todas partes existe una función μ-integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $t \in E$ se tiene la estimación*
$$|f(x, t)| \leq g(x)$$

Entonces, la función definida por

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \displaystyle\int_X f(x, t) d\mu(x) \end{array} \tag{3}$$

es continua en el punto t_0.

Teorema 3 (Derivación bajo el signo integral) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ una función y suponemos que existe $\mathcal{N}$ un conjunto de μ-medida nula tales que*

1) *para todo $t \in I$ la función $x \longmapsto f(x, t)$ es integrable,*

2) *la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ existe en todo punto $x \in X^0 \times I$ en donde notamos $X^0 = X \setminus \mathcal{N}$.*

3) *existe una función integrable $g : X^0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x \in X^0$ se tiene*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq |g(x)| \quad \textit{en } \mu\textit{-casi todas partes.}$$

Entonces, la función definida por

$$\begin{array}{rcl} \psi : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x, t) d\mu(x) \end{array}$$

es derivable y se tiene
$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x). \tag{4}$$

3.2. Espacios de Lebesgue

Definición 1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y sea $1 \leq p < +\infty$ un real. Definimos al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, dx)$ como el conjunto de funciones medibles f tal que*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$ definimos el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, dx)$ como el conjunto de funciones medibles tales que

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess |f(x)| < +\infty.$$

Estos son espacios de *base* y servirán para definir al resto de espacios funcionales.

Algunas propiedades de estos espacios:

- Invariancia por traslación: si $\tau \in \mathbb{R}^n$ es un vector, entonces para todo $1 \leq p \leq +\infty$:

$$\|f(\cdot + \tau)\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

- Homogeneidad, si $\lambda > 0$ es un real y si notamos $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ entonces para todo $1 \leq p \leq +\infty$:

$$\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-n/p}\|f\|_{L^p}.$$

- Son espacios de Banach: espacios vectoriales normados completos y toda sucesión de Cauchy es convergente, ésta es una propiedad fundamental para pasar al límite.

Proposición 1 (Desigualdades importantes)

1) ***Desigualdad de Hölder***: *si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles y si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se tiene la desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

2) ***Desigualdad de Tchebychev***: *sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ se tiene la desigualdad*

$$\big|\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big|^{1/p} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^p}$$

3) ***Desigualdad de Interpolación***: *sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$ y se tiene además la desigualdad*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{1/p}\|f\|_{L^\infty}^{1-1/p}$$

Teorema 4 (de diferenciación de Lebesgue) *Para toda funcion localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n$ tenemos*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x). \tag{5}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3.3. El producto de Convolución

Presentamos ahora una herramienta fundamental del análisis:

Definición 2 (Producto de convolución) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Definimos el producto de convolución entre f y g, notado $f * g$ por la expresión:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Algunas propiedades **importantes**:

Proposición 2 *Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles.*

- *se tiene $f * g(x) = g * f(x)$ (comutatividad) y se tiene $(f + g) * h = f * h + g * h$*
- *hay que tomar precauciones al definir el producto de convolución, de gran importancia es la **desigualdad de Young**:*
$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^r} \qquad \text{con } 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$
- *el espacio $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ es una álgebra de Banach pues se tiene $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.*
- *se tiene siempre, para todo $1 \leq p \leq +\infty$, las desigualdades*
$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$$

Proposición 3 (Propiedad Fundamental) *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles y sea $g \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Se tiene*
$$\partial^\alpha\big(f * g\big)(x) = f * \big(\partial^\alpha g\big)(x)$$
Es decir, al hacer el producto de convolución entre una función f (que no tiene por qué ser regular) con una función g que si es regular, se obtiene una función regular. Dicho de otra manera, el hecho de hacer un producto de convolución con una función regular permite ganar *en regularidad.*

Esta propiedad será de gran utilidad cuando estudiemos algunas propiedades de las ecuaciones en derivadas parciales: en efecto, veremos cómo el producto de convolución permite *suavizar* las funciones que intervienen en estas ecuaciones de manera que podremos *justificar* matemáticamente cada uno de los términos y etapas de los teoremas.

3.4. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una de las herramientas más poderosas en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 3 (Transformada de Fourier) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Definimos su transformada de Fourier $\widehat{f}$ por medio de la expresión:*
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

Ejemplo: en una dimensión $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, entonces $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}$.

Ejercicio: calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ y obtener $\widehat{f}(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$.

El éxito de la transformada de Fourier en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales se explica por el hecho que esta operación permite *transformar* las derivadas en la multiplicación por polinomios en el sentido siguiente:

Proposición 4 (Una Propiedad básica) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y "suficientemente regular a soporte compacto". Entonces se tienen las relaciones:*

- $\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi)$
- *en particular se tiene $\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2\widehat{f}(\xi)$*

Definición 4 (Transformada de Fourier inversa) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es una función integrable, entonces se tiene la fórmula de inversión de Fourier:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

Cuando se conjuga la transformada de Fourier con los espacios de Lebesgue se obtiene un resultado muy interesante.

Teorema 5 (Fórmula de Plancherel) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de cuadrado integrable. Entonces la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ y se tiene*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Observación 1 *Es muy importante notar que el espacio L^2 es el* único *espacio L^p que verifica esta identidad.*

3.5. Cálculo Vectorial, cambio de variables y algunas fórmulas útiles

Regla de la Cadena

- Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos funciones derivables donde A, B, C son subconjuntos de la recta real, se tiene la fórmula:
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$
- En varias dimensiones se tiene lo siguiente, si $A = \mathbb{R}^n$, $B = \mathbb{R}^m$ y $C = \mathbb{R}^p$, si notamos
$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \qquad g(y) = (g_1(y), \ldots, g_p(y))$$
y
$$(g \circ f)(x) = h(x) = (h_1(x), \ldots, h_p(x)),$$
entonces se tiene
$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Ejemplo: sea $f(x_1, x_2) = (2x_2 + 3x_2, x_1 + 2x_2)$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $g(y_1, y_2) = (\cos(y_1), \sin(y_2))$ con $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$. Si definimos $h = g \circ f$, tenemos $\partial_{x_1} h = -2\sin(2x_1 + 3x_2) + \cos(x_1 + 3x_2)$.

Cambio de variable

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(x_0,\rho)} f dS \right) d\rho,$$

para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

En particular, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{B(x_0,\rho)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0,\rho)} f dS,$$

para todo $\rho > 0$.

Los cambios de coordenadas son muy útiles cuando se estudia las invariancias de ciertos operadores diferenciales y las coordenadas polares nos permitirán realizar varios cálculos de forma directa.

Fórmula de Gauss-Green

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto acotado y si $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, en cada punto del borde $\partial\Omega$ es posible definir el vector normal exterior $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$.

Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, entonces escribiremos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u,$$

para designar la derivada normal exterior de u. Con estas notaciones podemos enunciar un resultado de gran utilidad.

Teorema 6 (Fórmula de Gauss-Green) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado. Sea $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Entonces*

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_i dS,$$

donde dS es la medida superficial y $i = 1, \dots, n$.

Este teorema posee varios corolarios interesantes.

Teorema 7 *Si $u, v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ son dos funciones, entonces tenemos*

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u \; v dx = -\int_{\Omega} u \; \partial_{x_i} v dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i dS$$

Observación 2 *Esta expresión es en realidad una* fórmula de integración por partes *y es interesante compararla con la tradicional fórmula de integración por partes en una variable.*

Teorema 8 *Tenemos las fórmulas siguientes para dos funciones regulares u, v definidas sobre Ω:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= -\int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \end{aligned}$$

En particular en dimensión 2 tenemos: para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto cuya frontera es una curva regular. Sea ν el vector normal exterior de $\partial\Omega$ y sea F una función

$$F = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

de clase $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Entonces se tiene

$$\iint\limits_{\Omega} div(F(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS.$$

$\Longrightarrow$ ¿Cómo calcular la normal exterior?
Si $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$, con $t \in [a, b]$ es una parametrización del borde de Ω, el vector normal ν es un vector ortogonal al vector $\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$.

Es decir se tiene que $\nu(t) = (-x_2'(t), x_1'(t))$ ó $\nu(t) = (x_2'(t), -x_1'(t))$ y hay que escoger uno de estos dos vectores para obtener el vector *exterior*.

$\Longrightarrow$ Un ejemplo. Sea Ω el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y sea $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 2)$.

- Obtenemos sin problema que
$$\iint_{\Omega} div(F) dx_1 dx_2 = 2|\Omega| = 2.$$
- El borde $\partial\Omega$ se puede descomponer en $\partial\Omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, donde
  - $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [-1, 1]$, de normal exterior $\nu_1 = (0, -1)$,
  - $\gamma_2(t) = (1 - t, t)$ con $t \in [0, 1]$, de normal exterior $\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,
  - $\gamma_3(t) = (-t, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$, de normal exterior $\nu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

  De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS &= \int_{\gamma_1} F \cdot \nu_1 dS_1 + \int_{\gamma_2} F \cdot \nu_2 dS_2 + \int_{\gamma_3} F \cdot \nu_3 dS_3 \\ &= \int_{-1}^{1} (t, 2) \cdot (0, -1) dt + \int_0^1 (1 - t, t + 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)(\sqrt{2} dt) + \int_0^1 (-t, 3 - t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)(\sqrt{2} dt) \\ &= \int_{-1}^{1} (-2) dt + \int_0^1 3 dt + \int_0^1 3 dt = 2. \end{aligned}$$