Lección n°2: Existencia y unicidad de soluciones débiles. USFQ, noviembre 2016

Índice

1. Semigrupo de operadores lineales fuertemente continuos.

Consideremos el espacio de Banach

$$X = C_{u,b}(\mathbb{R}^d) := \{u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \quad \text{acotadas y uniformemente continuas en } \mathbb{R}^d\}$$

dotado de la norma de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Definamos la familia de operadores $(T_t)_{t>0}$ dados por

$$T_t u(x) := (p(t,\cdot) * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x-y)u(y)dy$$

para $u \in X$. Esta familia de operadores verifica las siguientes propiedades:

- Para cada $t > 0$, $T_t X \subset X$.
- Para cada $t > 0$, el operador T_t es lineal y continuo con $\|T_t\| \leq 1$.
- Para todo $t, s > 0$, $T_{t+s} = T_t T_s$.
- $\lim_{t\to 0^+} \|T_t u - u\|_X = 0$.

A la familia de operadores que verifican las propiedades anteriores se los conoce como "Semigrupo de operadores fuertemente continuos". Además se puede probar que el Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^\alpha$ es un generador infinitesimal de la familia $(T_t)_{t>0}$, es decir

$$-(-\Delta)^\alpha u = \lim_{t\to 0} \frac{T_t - u}{u}$$

para los $u \in X$ donde exista el límite con la norma de la convergencia uniforme.

2. Existencia y unicidad de soluciones débiles (mild).

En lo que sigue estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones del problema

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + (-\Delta)^\alpha u(t,x) &= f(u(t,x)), & \forall (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \quad (1)\\ u(0,x) &= u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (2) \end{aligned}$$

donde u_0 es una función acotada y uniformemente continua, además f es globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Para esto comencemos considerando el siguiente problema: sea $T > 0$, $u_0 \in X$ y $h \in C([0,T]; X)$, por facilidad de notación escribiremos $A = (-\Delta)^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$. Así el problema

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= h(t), & \forall t \in (0,T)\\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución débil (mild) que está explícitamente determinada por el Principio de Duhamel

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} h(s) ds$$

para todo $t \in [0, T]$. Más aún, gracias a la regularidad de u_0 y h se deduce que $u \in C([0, T]; X)$.
Ahora para probar la existencia de soluciones consideremos el siguiente problema de Cauchy abstracto. Sea $F : X \to X$ una función globalmente Lipschitz. En nuestro caso, $F(u)(x) = f(u(x))$ para $u \in X$. Así, para $T > 0$ fijo, estamos interesados en el problema nolineal

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= F(u), \quad \text{in } (0, T) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Definición 1 *Una función $u \in C([0, T]; X)$ es una solución débil (mild) del problema (3) si verifica*

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} F(u(s)) ds \tag{4}$$

Ahora, usaremos el teorema de punto fijo para probar que existe una única función u que verifica (4). Definamos el operador

$$N_{u_0}(u)(t) := T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} G(s, u(s)) ds$$

Fácilmente se verifica que

$$N_{u_0} : C([0, T]; X) \to C([0, T]; X)$$

Además se puede probar que N_{u_0} es Lipschitz en $C([0, T]; X)$ con constante TL_F donde L_F es la constante de Lipschitz de F. Notemos que no tenemos certeza de que $TL_F < 1$ por lo que no podemos asegurar la existencia de un punto fijo. Así, por inducción se sigue que $(N_{u_0})^k$ es Lipschitz en $C([0, T]; X)$ con constante

$$\frac{(TL_F)^k}{k!}$$

donde k es un entero positivo. Esta constante es menor que 1 si k es suficientemente grande. Por tanto, haciendo uso de una modificación del teorema de punto fijo concluimos que la ecuación (4) tiene una única solución, la cual será una solución débil (mild) del problema (3).

Ahora, dado $0 < T < T'$, por unicidad, la solución débil en $(0, T')$ debe coincidir en $(0, T)$ con la solución débil en ese intervalo. Así, la solución débil de (3) se extiende de manera única para todo $t \in [0, \infty)$, es decir, es global en tiempo.

Puesto que $X = C_{u,b}(\mathbb{R}^d)$ y tomando $F(u)(x) := f(u(x))$ podemos verificar que $F : X \to X$ una función globalmente Lipschitz. Así, por el análisis hecho anteriormente existe una única solución débil $u \in C([0, \infty); X)$ del problema

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f(u), \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) &= u_0 \end{aligned}$$

para $u_0 \in X$.

Referencias

[1] C. Bucur and E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications.* Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer.

[2] X. Cabre and J. Roquejoffre. *Propagation de fronts dans les équations de Fisher KPP avec diffusion fractionnaire.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009), 1361-1366.

[3] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.