Lección n°2: Teorema de Fujita-Kato

USFQ, septiembre 2016

Índice

En esta lección estamos interesados en exponer un método para la obtención de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.

1. Problema de punto fijo

Vamos a ver que una manera de construir soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes se basa en la utilización del principio de contracción de Picard, que es un resultado general que puede enunciarse en un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ cualquiera.

Teorema 1 (Principio de contracción de Picard) *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y sea $B : E \times E \longrightarrow E$ una aplicación bilineal acotada:*

$$\|B(e, f)\|_E \leq C_B \|e\|_E \|f\|_E. \qquad (1)$$

Si $e_0 \in E$ es tal que $\|e_0\|_E \leq \delta$ y si $0 < \delta < \frac{1}{4C_B} < 1$, entonces la ecuación

$$e = e_0 - B(e, e), \qquad (2)$$

admite una solución $e \in E$ que verifica $\|e\|_E \leq 2\delta$.

Se tiene además que esta solución es única sobre la bola cerrada $\bar{B}(0, 2\delta)$ y se tiene una dependencia continua con respecto al dato inicial: si f_0 es otro dato inicial tal que $\|f_0\|_E \leq 2\delta$, si f es solución de la ecuación $f = f_0 - B(f, f)$ con $\|f\|_E \leq 2\delta$, entonces

$$\|e - f\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_B\delta} \|e_0 - f_0\|_E.$$

Demonstración: vamos a construir la solución e por medio de un proceso iterativo. En efecto, partiendo del dato inicial podemos escribir

$$e_{n+1} = e_0 - B(e_n, e_n),$$

y vamos que ver que cuando $n \to +\infty$ se obtiene una solución de la ecuación (2). Empezamos por verificar que se tiene $\|e_n\|_E \leq 2\delta$. Como esto es cierto para e_0, podemos hacer la hipótesis de recurrencia $\|e_n\|_E \leq 2\delta$ y vamos a mostrar que esta propiedad se mantiene para e_{n+1}, en efecto tenemos:

$$\|e_{n+1}\|_E \leq \|e_0\|_E + \|B(e_n, e_n)\|_E \leq \|e_0\|_E + C_B \|e_n\|_E^2 \leq \delta + 4C_B\delta^2 \leq 2\delta,$$

en donde hemos usado la hipótesis $\delta < \frac{1}{4C_B} < 1$. Esto muestra que para todo $n \geq 1$, el elemento e_n construido de esta manera pertenece a la bola cerrada $\bar{B}(0, 2\delta)$. Queda por verificar que tendemos hacia una solución e cuando

$n \to +\infty$. Para ello escribimos

$$\begin{aligned}
\|e_{n+1} - e_n\|_E &= \|(e_0 - B(e_n, e_n)) - (e_0 - B(e_{n-1}, e_{n-1}))\|_E = \|-B(e_n, e_n) + B(e_{n-1}, e_{n-1})\|_E \\
&= \|B(e_n - e_{n-1}, e_n) + B(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E \leq \|B(e_n - e_{n-1}, e_n)\|_E + \|B(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E \\
&\leq C_B\|e_n - e_{n-1}\|_E\|e_n\| + C_B\|e_{n-1}\|_E\|e_n - e_{n-1}\|_E \\
&\leq 4C_B\delta\|e_n - e_{n-1}\|_E,
\end{aligned}$$

y a partir de esta mayoración obtenemos $\|e_{n+1} - e_n\|_E \leq (4C_B\delta)^n \|e_0 - e_1\|_E$, pero dado que se tiene $4C_B\delta < 1$, obtenemos que la parte derecha de esta desigualdad se anula si $n \to +\infty$: obtenemos entonces la convergencia en el sentido de la norma $\|\cdot\|_E$ de la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia $e \in E$, que es solución de la ecuación (2) y que verifica $\|e\|_E \leq 2\delta$.
La unicidad es inmediata por construcción. Para estudiar la dependencia con respecto a los datos iniciales escribimos

$$\begin{aligned}
\|e - f\|_E &= \|(e_0 - B(e, e)) - (f_0 - B(f, f))\|_E = \|e_0 - f_0 - B(e - f, e) - B(f, e - f)\|_E \\
&\leq \|e_0 - f_0\|_E + \|B(e - f, e)\|_E + \|B(f, e - f)\|_E \\
&\leq \|e_0 - f_0\|_E + C_B\|e\|_E\|e - f\|_E + C_B\|f\|_E\|e - f\|_E \leq \|e_0 - f_0\|_E + 4C_B\delta\|e - f\|_E \\
\|e - f\|_E &\leq \frac{1}{1 - 4C_B\delta}\|e_0 - f_0\|_E.
\end{aligned}$$

Esta expresión nos indica que si e_0 y f_0 son dos datos iniciales cercanos (en el sentido de la norma $\|\cdot\|_E$), entonces sus soluciones correspondientes también lo son. ■

Observación 1 *Para "cerrar el punto fijo" se necesita la condición* $0 < \delta < \frac{1}{4C_B} < 1$, *y esta condición nos induce a trabajar con datos iniciales pequeños puesto que se requiere la mayoración* $\|e_0\|_E \leq \delta$.

2. Proyector de Leray y formulación integral

Deseamos aplicar este resultado general a las ecuaciones de Navier-Stokes, pero al tener

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p,$$

tenemos un término adicional, dado por la presión $\vec{\nabla}p$, y no podemos aplicar directamente el principio de contracción de Picard. Dado que estamos trabajando sobre todo el espacio, vamos a ver que es posible deshacerse de la presión utilizando un operador especial.

Definición 1 (Proyector de Leray) *Si* $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una función suficientemente regular, definimos el proyector de Leray* $\mathbb{P}$ *por medio de la expresión*

$$\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}),$$

en donde $\frac{1}{\Delta}$ *está definido al nivel de Fourier por* $\widehat{\frac{1}{\Delta}f}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)$.

Propiedades

- Si $\vec{\varphi}$ es de divergencia nula (es decir $div(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} = 0$) entonces se tiene la identidad

$$\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi},$$

  es decir que el proyector de Leray preserva los campos de vectores de divergencia nula.

- Si $\vec{\varphi}$ es un gradiente, es decir si se puede escribir $\vec{\varphi} = \vec{\nabla}f$ para una cierta función f, entonces se tiene

$$\mathbb{P}(\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}f - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}f - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\Delta f) = \vec{\nabla}f - \vec{\nabla}f = 0,$$

  es decir que el proyector de Leray anula los gradientes.

- Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier se tiene

$$\|\mathbb{P}(\vec{\varphi})\|_{L^2} = \|\vec{\varphi} - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi})\|_{L^2} \leq \|\vec{\varphi}\|_{L^2} + \left\||\xi|\frac{|\xi|}{|\xi|^2}\widehat{\vec{\varphi}}\right\|_{L^2} \leq 2\|\vec{\varphi}\|_{L^2},$$

  de donde se deduce que el proyector de Leray es acotado en los espacios de Lebesgue L^2 y, por construcción, en todos los espacios de Sobolev H^s.

- El projector de Leray es un operador *no local*: para aplicarlo necesitamos la información de las funciones sobre *todo* el espacio.

Gracias a este proyector de Leray, vamos a poder transformar las ecuaciones de Navier-Stokes de tal manera que podamos aplicar el principio de contracción de Picard. En efecto, si aplicamos el proyecto de Leray a toda la ecuación obtenemos

$$\mathbb{P}(\partial_t\vec{u}) = \mathbb{P}(\Delta\vec{u}) - \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big) - \mathbb{P}(\vec{\nabla}p),$$

y dado que se tiene $div(\vec{u}) = 0$, por las propiedades de este operador podemos escribir

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big), \tag{3}$$

y se puede mostrar que esta ecuación es equivalente al problema original de Navier-Stokes. En particular, se observará que esta ecuación (3) es como una ecuación del calor con segundo término y esto nos permite establecer la siguiente formulación integral

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds, \tag{4}$$

y notamos que esta expresión nos permitirá aplicar el principio de contracción de Picard puesto que se tiene una ecuación con la estructura siguiente

$$e = e_0 - B(e,e),$$

en efecto, se puede verificar sin mayor problema que la integral en (4) es una forma bilineal en la variable $\vec{u}$.

Gracias a esta observación, lo único que debemos verificar son las hipótesis del Teorema 1 en un espacio funcional *adecuado*.

3. Soluciones *Mild*

La parte más delicada para utilizar el principio de contracción consiste en encontrar un espacio funcional en donde se pueda *cerrar* el punto fijo, es decir en donde se tenga las estimaciones $\|B(e,f)\|_E \leq C_B\|e\|_E\|f\|_F$. Indiquemos que existen varios espacios funcionales en los cuales esto es posible, pero uno el primer ejemplo histórico es el siguiente.

Teorema 2 (Fujita-Kato 1964) *Sea $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ un dato inicial. Entonces existe un tiempo $T > 0$ y $\vec{u}$ una función que pertenece al espacio funcional $L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ tal que $\vec{u}$ es solución del problema*

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds.$$

Demonstración: Como anunciado, vamos a utilizar el principio de contracción de Picard en el espacio funcional $E = L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ dotado de la norma

$$\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_E = \sup_{0\leq t\leq T}\Big(\|\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\vec{\nabla}\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^2}\Big) + \left(\int_0^T \|\Delta\vec{f}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Para ello debemos verificar los siguientes puntos:

- para el dato inicial se tiene $\|h_t * \vec{u}_0\|_E \leq \delta$, donde el parámetro δ será fijado posteriormente,
- para la forma bilineal se tiene

$$\left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds \right\|_E \leq C_B \|\vec{u}\|_E \|\vec{u}\|_E,$$

- y se tiene la condición $0 < \delta < \frac{1}{4C_B} < 1$.

Para ello necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 1 *Si* $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *entonces* $h_t * \vec{u}_0 \in L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ *y se tiene la mayoración*

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *entonces* $h_t * \vec{u}_0 \in L^2([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ *y se tiene la mayoración*

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Prueba. Para el primer punto simplemente escribimos utilizando las desigualdades de Young y las propiedades del núcleo del calor

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2_x} \leq \|h_t\|_{L^1_x} \|\vec{u}_0\|_{L^2} = \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Obtenemos una estimación uniforme con respecto a la variable temporal lo que nos permite obtener la mayoración

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Para el segundo punto utilizamos la fórmula de Plancherel y el teorema de Fubini:

$$\|h_t * \vec{u}_0\|^2_{L^2_t \dot{H}^1_x} = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi dt = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 dt d\xi,$$

y con el cambio de variable $\tau = 2t|\xi|^2$ obtenemos

$$\|h_t * \vec{u}_0\|^2_{L^2_t \dot{H}^1_x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\tau d\xi = \frac{1}{2} \|\widehat{\vec{u}_0}\|_{L^2},$$

de donde se obtiene la expresión

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

■

El segundo lema que necesitaremos es el siguiente.

Lema 2 *Si* $\vec{f} \in L^2([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ *y si notamos* $\vec{F}(t,x) = \displaystyle\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}(s,x)ds$, *entonces tenemos:*

- $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{F}(t,\cdot)\|_{L^2_x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{f}\|_{L^2_t L^2_x}$,
- $\|\Delta \vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^2_t L^2_x} \leq \|\vec{f}\|_{L^2_t L^2_x}$,

  a esta última mayoración se la conoce como la regularidad maximal *del núcleo del calor.*

Prueba. Para el primer punto, razonamos por dualidad y escribimos:

$$\begin{aligned}
\|\vec{\nabla}\otimes\vec{F}(t,\cdot)\|_{L^2_x} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}\otimes\vec{F}(t,x)\varphi(x)dx\right| = \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_0^t\vec{\nabla}h_{t-s}*\vec{f}(s,x)ds\right)\varphi(x)dx\right|\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}(s,x)\cdot\vec{\nabla}h_{t-s}*\varphi(x)dxds\right| \leq \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2}\|\vec{\nabla}h_{t-s}*\varphi\|_{L^2}ds\\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^2_tL^2_x}\|h_{t-s}*\vec{\nabla}\varphi\|_{L^2_tL^2_x},
\end{aligned}$$

pero por el Lema 1 anterior tenemos $\|h_{t-s}*\vec{\nabla}\varphi\|_{L^2_tL^2_x}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi\|_{L^2}$, de donde se obtiene la mayoración

$$\|\vec{\nabla}\otimes\vec{F}(t,\cdot)\|_{L^2_x}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{f}\|_{L^2_tL^2_x}.$$

Para el segundo punto observamos que se tiene $\Delta\vec{F}(t,x)=\displaystyle\int_0^t\Delta[h_{t-s}]*\vec{f}(s,x)ds=\int_0^t\frac{1}{t-s}[\Delta h_{t-s}]*\vec{f}(s,x)ds$, de manera que si prolongamos la función $\frac{1}{t}\Delta h_t$ por 0 si $t<0$ entonces podemos escribir

$$\Delta\vec{F}(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{t-s}[\Delta h](t-s,x-y)f(s,y)dyds,$$

y notamos que $\Delta\vec{F}$ es un producto de convolución en las variables temporales y espaciales de la función $\vec{f}$ con la función $\frac{1}{t}[\Delta h]$ y vamos a estudiar su símbolo en variable de Fourier.

Si calculamos la transformada de Fourier en variable de espacio tenemos

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{1}{t}\Delta h(x/\sqrt{t})\right]=-|\xi|^2e^{-t|\xi|^2},$$

y si ahora calculamos la transformada de Fourier en variable temporal obtenemos

$$\mathcal{F}_t\left[-|\xi|^2e^{-t|\xi|^2}\right]=\int_0^{+\infty}-|\xi|^2e^{-t|\xi|^2}e^{-i\tau t}dt=\frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2+i\tau}.$$

De esta manera, tenemos

$$\mathcal{F}_{t,x}\left[\Delta\vec{F}\right](\tau,\xi)=\frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2+i\tau}\times\widehat{\vec{f}}(\tau,\xi),$$

observamos en particular que el símbolo $\frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2+i\tau}$ es acotado y utilizando la fórmula de Plancherel podemos escribir

$$\|\Delta\vec{F}\|_{L^2_tL^2_x}=\left\|\mathcal{F}_{t,x}\left[\Delta\vec{F}\right]\right\|_{L^2_tL^2_x}=\left\|\frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2+i\tau}\times\widehat{\vec{f}}\right\|_{L^2_tL^2_x}\leq\|\vec{f}\|_{L^2_tL^2_x},$$

lo que termina la prueba de este lema. ■

El último lema que necesitaremos es el siguiente.

Lema 3 (Leyes de producto) *Sea $0<\delta<3/2$ y sea $s\geq 0$, si $f,g\in H^s(\mathbb{R}^3)\cap\dot{H}^\delta(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene la mayoración*

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}}\leq C\left(\|f\|_{\dot{H}^\delta}\|g\|_{H^s}+\|g\|_{\dot{H}^\delta}\|f\|_{H^s}\right).$$

Cuando todos los espacios que intervienen son homogéneos tenemos lo siguiente

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+\delta-3/2}}\leq C\left(\|f\|_{\dot{H}^\delta}\|g\|_{\dot{H}^s}+\|g\|_{\dot{H}^\delta}\|f\|_{\dot{H}^s}\right).$$

Asumiremos este resultado.

Un ejemplo que será utilizado a menudo corresponde al caso cuando $\delta = 1$ y $s = 3/2$, entonces la desigualdad que se obtiene es:

$$\|fg\|_{\dot{H}^1} \leq C\left(\|f\|_{\dot{H}^1}\|g\|_{\dot{H}^{3/2}} + \|g\|_{\dot{H}^1}\|f\|_{\dot{H}^{3/2}}\right). \tag{6}$$

Con estos tres lemas podemos regresar a la demostración del Teorema 2 y vamos a acotar, en el sentido de la norma (5) del espacio E, cada uno de estos términos recordando que se tiene $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\boxed{\vec{u}(t,x) = \underbrace{h_t * \vec{u}_0(x)}_{(1)} - \underbrace{\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds}_{(2)}.} \tag{7}$$

- Para la parte (1) debemos estudiar

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_E = \sup_{0\leq t\leq T}\left(\underbrace{\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2}}_{(1.a)} + \underbrace{\|\vec{\nabla}(h_t * \vec{u}_0)\|_{L^2}}_{(1.b)}\right) + \underbrace{\left(\int_0^T \|\Delta(h_t * \vec{u}_0)\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2}}_{(1.c)}. \tag{8}$$

$\Longrightarrow$ Para la parte $(1.a)$ tenemos por el Lema 1 la mayoración $\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}$.

$\Longrightarrow$ Para la parte $(1.b)$, escribimos $\|\vec{\nabla}(h_t * \vec{u}_0)\|_{L^\infty_t L^2_x} = \|h_t * (\vec{\nabla}\vec{u}_0)\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\vec{\nabla}\vec{u}_0\|_{L^2} = \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}$.

$\Longrightarrow$ Para la parte $(1.c)$ tenemos, utilizando la fórmula de Plancherel y el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta(h_t * \vec{u}_0)|^2 dxdt &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}h_t * \vec{\nabla}\vec{u}_0|^2 dxdt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2}|\widehat{\vec{\nabla}\vec{u}_0}|^2 d\xi dt \leq \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2}|\widehat{\vec{\nabla}\vec{u}_0}|^2 dtd\xi,\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $\tau = 2t|\xi|^2$ obtenemos

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta(h_t * \vec{u}_0)|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau\right)|\widehat{\vec{\nabla}\vec{u}_0}|^2 d\xi = \frac{1}{2}\|\vec{\nabla}\vec{u}_0\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}.$$

De esta manera podemos escribir $\|h_t * \vec{u}_0\|_E \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}$, de donde se deduce la estimación siguiente para (8)

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_E \leq (1 + 1/\sqrt{2})\|\vec{u}_0\|_{H^1}. \tag{9}$$

- Para la parte (2) debemos estudiar

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right\|_E =\\ &\sup_{0\leq t\leq T}\left(\underbrace{\left\|\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right\|_{L^2}}_{(2.a)} + \underbrace{\left\|\vec{\nabla}\left(\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\right\|_{L^2}}_{(2.b)}\right) \\ &+ \underbrace{\left(\int_0^T \left\|\Delta\left(\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\right\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2}}_{(2.c)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Esta parte es un poco más delicada de estudiar y antes de lanzarse en cálculos complicados es necesario hacer unas observaciones.

Observación 2

1) *Como se tiene $div(\vec{u}) = 0$, entonces podemos escribir*

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L^2} = \|div(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L^2} \leq \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^1}, \tag{11}$$

y esto nos llevará a estudiar la cantidad $\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^1}$.

2) *Dado que estamos trabajando en el espacio $L^\infty_t(H^1_x) \cap L^2_t(\dot{H}^2_x)$, tenemos la mayoración*

$$\|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^{3/2}_x} \leq \|\vec{u}\|^{1/2}_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \|\vec{u}\|^{1/2}_{L^2_t \dot{H}^2_x}, \tag{12}$$

en efecto, utilizando la fórmula de Plancherel y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{3/2}_x} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^3 |\widehat{\vec{u}(t,\xi)}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\widehat{\vec{u}(t,\xi)}| \times |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}(t,\xi)}| d\xi \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2_x},$$

y a partir de esta mayoración basta calcular la norma L^4 en la variable temporal para obtener el resultado buscado.

3) *En el marco de trabajo $L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ tenemos la mayoración*

$$\|\vec{u}(\cdot,\cdot)\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \leq T^{1/4} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}, \tag{13}$$

en efecto se tiene

$$\|\vec{u}(\cdot,\cdot)\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} = \left(\int_0^T \|\vec{u}(t,\cdot)\|^4_{\dot{H}^1_x} dt\right)^{1/4} \leq \|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \left(\int_0^T dt\right)^{1/4} = T^{1/4} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}.$$

Con estas estimaciones vamos a estudiar cada uno de los términos $(2.a) - (2.c)$ de la página anterior.

$\Longrightarrow$ Para la parte $(2.a)$ tenemos, con las desigualdades de Young y las propiedades del núcleo del calor:

$$(2.a) = \sup_{0\leq t\leq T} \left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x) ds \right\|_{L^2} \leq \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \left\| h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x) \right\|_{L^2} ds$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \|h_{t-s}\|_{L^1} \left\| \mathbb{P}\big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x) \right\|_{L^2} ds \leq \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \left\| \mathbb{P}\big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x) \right\|_{L^2} ds,$$

y ahora, por la continuidad del proyector de Leray, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por la estimación (11) tenemos

$$\leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \left\| (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s,x) \right\|_{L^2} ds \leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_0^t ds\right)^{1/2} \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} = 2T^{1/2} \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x},$$

usamos ahora las leyes de producto (6) en la variable de espacio y la desigualdad de Hölder en la variable temporal para escribir

$$(2.a) \leq 2T^{1/2} \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^{3/2}_x} \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x},$$

de manera que utilizando las estimaciones (12) y (13) obtenemos

$$(2.a) \leq 2T^{1/2} \left(\|\vec{u}\|^{1/2}_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \|\vec{u}\|^{1/2}_{L^2_t \dot{H}^2_x} \right) \times \left(T^{1/4} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \right).$$

En este punto observamos que cada una de las normas de esta expresión puede ser controlada por la norma $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|\cdot\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} + \|\cdot\|_{L^2_t \dot{H}^2_x}$, de manera que se obtiene la mayoración

$$(2.a) \leq 2T^{1/2} T^{1/4} \|\vec{u}\|_E \|\vec{u}\|_E. \tag{14}$$

$\Longrightarrow$ Para la parte $(2.b)$ tenemos,

$$(2.b) = \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\vec{\nabla}\left(\int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\right\|_{L^2},$$

aplicamos ahora el primer punto del Lema 2, las propiedades del proyector de Leray y la estimación (11) para obtener

$$(2.b) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)\|_{L^2_tL^2_x} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x},$$

y con las leyes de producto (6) en la variable de espacio y la desigualdad de Hölder en la variable temporal podemos escribir

$$(2.b) \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^{3/2}_x}\|\vec{u}\|_{L^4_t\dot{H}^1_x},$$

de modo que usando las estimaciones (12) y (13) obtenemos

$$(2.b) \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\|\vec{u}\|^{1/2}_{L^\infty_t\dot{H}^1_x}\|\vec{u}\|^{1/2}_{L^2_t\dot{H}^2_x}\right)\times\left(T^{1/4}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t\dot{H}^1_x}\right).$$

Es decir

$$(2.b) \leq \frac{2}{\sqrt{2}}T^{1/4}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E. \tag{15}$$

$\Longrightarrow$ Para la parte $(2.c)$ tenemos,

$$(2.c) = \left(\int_0^T\left\|\Delta\left(\int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\right\|^2_{L^2}dt\right)^{1/2} = \left\|\Delta\left(\int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\right\|_{L^2_tL^2_x},$$

basta entonces aplicar el Lema 2, y la regularidad maximal del núcleo del calor para obtener

$$(2.c) \leq \|\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)\|_{L^2_tL^2_x},$$

de manera que, repitiendo los cálculos anteriores obtenemos sin problema

$$(2.c) \leq 2T^{1/4}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E. \tag{16}$$

Finalmente, juntando todas estas estimaciones (14)-(16) y regresando a la expresión (10) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right\|_E &= (2.a)+(2.b)+(2.c)\\
&\leq 2T^{1/2}T^{1/4}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E + \frac{2}{\sqrt{2}}T^{1/4}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E + 2T^{1/4}\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E\\
&\leq CT^{1/4}\left(1+T^{1/2}\right)\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E,
\end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos que la constante de continuidad de la forma bilineal es $C_B = CT^{1/4}\left(1+T^{1/2}\right)$ y hemos terminado el estudio de la segunda parte de la expresión (7).

Recopilando la información que hemos obtenido hasta ahora, tenemos para el problema integral

$$\vec{u}(t,x) = h_t*\vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds,$$

las estimaciones:

- $\|h_t*\vec{u}_0\|_E \leq C_1\|\vec{u}_0\|_{H^1}$,
- $\left\|\int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right\|_E \leq C_2T^{1/4}\left(1+T^{1/2}\right)\|\vec{u}\|_E\|\vec{u}\|_E$,

de manera que para *cerrar el punto fijo* necesitamos las dos condiciones siguientes:

$$C_1\|\vec{u}_0\|_{H^1} < \delta \quad \text{y} \quad \delta < \tfrac{1}{4C_2T^{1/4}\left(1+T^{1/2}\right)} < 1.$$

Como la cantidad $\|\vec{u}_0\|_{H^1}$ está fijada por el dato inicial, estaremos en capacidad de obtener una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes si se tiene la estimación

$$T \leq \text{mín}\left(1, \frac{1}{C\|\vec{u}_0\|^4_{H^1}}\right), \tag{17}$$

y con esto terminamos la demostración del Teorema 2. ■

Observación 3 *La estimación (17) nos impone una dicotomía entre el tamaño del dato inicial $\|\vec{u}_0\|_{H^1}$ y el tamaño del tiempo de existencia T: por este procedimiento, si el dato inicial es* grande*, entonces forzosamente el tiempo de existencia es* pequeño*.*

Este tipo de soluciones obtenidas por medio de la formulación integral

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds,$$

se denominan soluciones *mild*.